GÉOMÉTRIE

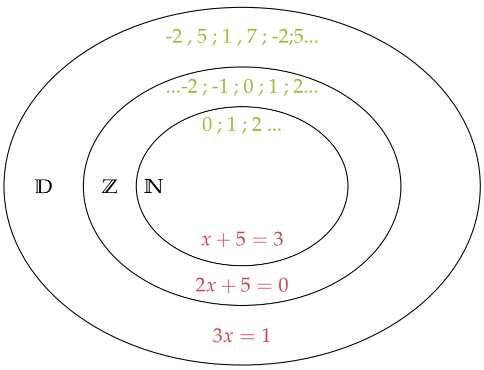
1

Vers maths expertes

S'entraîner

1

1) L'ensemble de nombres le plus simple est celui de nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ et qui contient les nombres que vous connaissez depuis longtemps : 0 ; 1 ; 2 ; 3...
   a) Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 7 donne 12 ?
   b) Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 12 donne 7 ?
2) L'exemple précédent montre que l'ensemble $\mathbb{N}$ est « insuffisant » car certaines équations simples n'y trouvent pas de solution. On peut alors utiliser l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, et qui contient $\mathbb{N}$ et les opposés des entiers naturels (par exemple : -3 ; -2).
   a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x + 8 = 0$.
   b) Même question avec l'équation : $2x + 7 = 0$.
3) De nouveau l'ensemble $\mathbb{Z}$ est en quelque sorte insuffisant pour exprimer les solutions de certaines équations.
   a) De quel autre ensemble de nombres a-t-on au minimum besoin pour que l'équation du $2x + 7 = 0$ ait une solution ?
   b) Dans ce nouvel ensemble quelles sont les solutions de l'équation : $9x^2 = 16$?
   c) Décrire l'ensemble de nombres dont on a besoin au minimum pour que l'équation précédente ait une solution. On notera $\mathbb{Q}$ cet ensemble.
4) Modifier l'équation précédente pour qu'elle n'admette pas de solution dans l'ensemble des rationnels. Dans quel ensemble faut-il travailler pour pouvoir dire qu'elle a deux solutions ?
5) Que pouvez-vous dire de l'équation $x^2 + 1 = 0$ en terme de solutions dans les ensembles de nombres précédents ?
6) Compléter le schéma commencé ci-dessous, qui montre les inclusions successives des ensembles de nombres en donnant à chaque fois une équation qui n'a pas de solution dans l'ensemble, mais en a une dans le suivant.



2

À l’époque de la Renaissance, les mathématiciens Girolamo Cardano (1501-1576), Scipione Del Ferro (1465-1526) et Niccolò Fontana (1499-1557) trouvèrent une méthode pour résoudre les équations de degré trois du type $x^3 + px + q = 0$. Le principe général était acquis mais butait sur des cas comme l’équation de Bombelli (1526-1572) : $x^3 - 15x - 4 = 0$. Or pour cette dernière, Raffaello Bombelli savait qu’il y avait trois solutions dont une évidente !

1) Point de départ de la méthode dite de Cardan

a) On pose $x = u + v$. Et on cherche les valeurs de x telles que $x^3 - 15x - 4 = 0$.
En utilisant que $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3vu^2 + v^3$, démontrer que u et v doivent satisfaire l’équation :

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u+v) - 15(u+v) - 4 = 0.$$

b) En déduire que u et v sont solutions de l’équation :

$$(u^3 + v^3) - 4 + (3uv - 15)(u+v) = 0.$$

c) Expliquer pourquoi on aura trouvé une solution dès que l’on obtient u et v solutions du système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = & 4 \\ u \times v & = & 15 \end{cases}$$

d) Démontrer alors que les nombres u^3 et v^3 sont solutions de l’équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$. Puis expliquer pourquoi on ne pourra pas ainsi déterminer u et v (et par conséquent la solution connue).

2) Le tour de passe-passe de Bombelli.

a) Néanmoins des solutions existaient et Bombelli pensait que la méthode devait les donner. Il décida alors de terminer le calcul en utilisant un nombre « imaginaire » que nous noterons $\sqrt{-1}$. À l’aide de cette notation, expliquer pourquoi l’équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ a alors deux solutions : $2 - 11\sqrt{-1}$ et $2 + 11\sqrt{-1}$.

b) Vérifier alors que : $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$ et que $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

c) En déduire que la méthode permet bien de retrouver une solution attendue pour l’équation de Bombelli.

S'entraîner

3 Nombres parfaits et nombres amiables

1) Un diviseur strict d'un entier naturel n est un entier naturel, distinct de n, qui divise n.

a) Déterminer les 12 diviseurs de 220. Quels sont ses diviseurs stricts ?

b) Déterminer les 10 diviseurs de 496. Quels sont ses diviseurs stricts ?

2) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts.
496 est-il un nombre parfait ?

3) Deux entiers sont dits amiables si chacun d'eux est égal à la somme de tous les diviseurs stricts de l'autre. Faire la somme des diviseurs stricts de 220. En déduire avec quel entier n, le nombre 220 peut être amiable. Vérifier alors que n et 220 sont amiables.

4 Clés des numéros ISBN

L'*International Standard Book Number* permet de coder tous les ouvrages édités dans le monde entier. Il est composé de 13 chiffres.

Étudions le numéro ISBN : 978-2-86889-006-1. Il est décomposé en :

- une première partie N de 12 chiffres commençant par 978 ou 979. Ici, en enlevant les tirets, on a $N = 978\ 286\ 889\ 006$;
- une seconde partie K, qui représente la clé, composée de 1 chiffre (de 1 à 9). Ici $K = 1$.

On détermine la clé K de la façon suivante :

- on forme un nombre n en additionnant les chiffres du numéro ISBN après avoir multiplié par 3 les chiffres de rang pair :
  $n = 9 + 3\times7 + 8 + 3\times2 + 8 + 3\times6 + 8 + 3\times8 + 9 + 3\times0 + 0 + 3\times6 = 129$;
- on détermine le reste r dans la division euclidienne de n par 10 :
  $129 = 10 \times 12 + 9$, on obtient alors $r = 9$.
- on soustrait ce reste à 10 : $K = 10 - r = 10 - 9 = 1$.

ISBN : 978-2-210-10467-9

1) Vérifier la clé sur le code ISBN de l'image ci-contre.

2) Quelle doit être la valeur de a pour que le code 978-2-84225-01a-1 soit un code ISBN ?