De la seconde à la première Olympiades

N3

1

S'entraîner

1 Soit a un nombre entier naturel non nul.

On rappelle qu'un diviseur strict de a est un diviseur positif de a distinct de a.

On dit que a est un nombre parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts.

On dit que a est un nombre à moyenne harmonique entière lorsque la moyenne harmonique de ses diviseurs positifs, a compris, est un nombre entier.

On rappelle que la moyenne harmonique h des nombres strictement positifs $x_1,\ x_2\ ,\dots\ ,x_n$ est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses.

$$h = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n}}$$

1) **a)** Soit p un nombre premier. Peut-il être parfait ? Peut-il être à moyenne harmonique entière ?

b) Le nombre 28 est il parfait ? Est-il à moyenne harmonique entière ?

c) Le nombre 140 est il parfait ? Est-il à moyenne harmonique entière ?

2) N désigne un nombre entier naturel supérieur à 1. On note S la somme des diviseurs de N.On désigne par d_1, d_2,. . .,d_n la liste rangée par ordre croissant des diviseurs positifs de N. Ainsi $d_1 = 1$ et $d_n = N$.

a) On note $\Sigma = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \dots + \dfrac{1}{d_n}$. Exprimer Σ en fonction de N et S.

b) Si N est un nombre parfait, quelle est la valeur de Σ ?

c) En déduire une condition nécessaire pour qu'un nombre parfait soit à moyenne harmonique entière.

3) L'algorithme rédigé ci-dessous a pour but d'identifier les diviseurs d'un entier. On demande de le compléter pour qu'il permette de déterminer si le nombre a saisi est un nombre parfait et s'il est un nombre à moyenne harmonique entière.

```
Variables entières a, k
Entrer a
Pour k allant de 1 à a
   Si le reste de la division euclidienne de a par k vaut 0
      Afficher k
   Fin Si
Fin Pour
```

4) Au livre IX des Éléments, Euclide, savant de la Grèce antique, énonce : « Si, à partir de l'unité, on prend tant de nombres que l'on voudra successivement proportionnels en raison double, et que leur somme soit un nombre premier, ce que fera cette somme multipliée par le dernier sera un nombre parfait. »

En langage moderne, cette affirmation signifie que, pour tout entier n tel que le nombre $2^n - 1$ soit premier, le nombre $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $2^n - 1$ est un nombre premier.

a) Démontrer que n est un nombre premier.

b) Quels sont les diviseurs du nombre $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$?

c) N est il un nombre parfait ?

d) N est -il à moyenne harmonique entière ?

e) En déduire que les nombres 496 et 8128 sont des nombres parfaits et des nombres à moyenne harmonique entière.

2 En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure - y compris la base en contact avec le sol - de ce bâtiment, mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1) Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

- **a)** Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.
- **b)** Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.
- **c)** Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.
- **d)** En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2) On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z.

- **a)** Vérifier que pour tous nombres a, b, et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right).$$

- **b)** En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc.$$

- **c)** En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geqslant 3.$$

- **d)** Montrer que le facteur de compacité c de ce pavé est :

$$c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

- **e)** Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3) Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leqslant q \leqslant r$.

- **a)** Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

- **b)** Démontrer que $3 \leqslant p \leqslant 6$.
- **c)** Démontrer que, si $p = 3$ alors $7 \leqslant q \leqslant 12$.
- **d)** Terminer la résolution.