Thème 2 Suites de réels

Fiche 1

Analyse- SUITES DE RÉELS
Suites arithmétiques et géométriques

I. Résumé

Le tableau ci-dessous rassemble les principaux résultats obtenus en classe de première.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = r \times n + b$	$u_n = k \times q^n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
S= somme des N termes consécutifs	$S = \begin{pmatrix} moyenne \\ des\ termes \\ extrêmes \end{pmatrix} \times N$	$S = \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} \times \dfrac{1-q^N}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

II. Exemples

Calculer les sommes $A = 5+9+13+\ldots+61$ et $B = 5^2+5^3+\ldots+5^{10}$.

- A est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4, le nombre de termes est $\dfrac{61-5}{4}+1=15$ et la moyenne des termes extrêmes est 33. Donc $A = 33\times 15 = 495$.
- B est la somme de neuf termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.
  Donc $B = 5^2\times\dfrac{1-5^9}{1-5}$ soit $B = 12207025$.

Les résultats relatifs à la somme de termes consécutifs résultent de deux formules sommatoires suivantes qu'il est important de connaître :

$$1+2+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1+q+\ldots+q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q}\ (si\ q\neq 1)$$

III. Suites arithmético-géométriques

Définition 6
On appelle suite arithmético-géométrique une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme : quel que soit l'entier n, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent des réels.

Remarque
— si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique
— si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.

III.1. Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le cas où $a\neq 1$

— Rechercher une suite constante (c) vérifiant la relation de récurrence.
— Prouver que la suite $(u_n - c)$ est géométrique de raison a
— Exprimer le terme général de la suite $(u_n - c)$ en fonction de n
— Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

III.2. Exemple

Soit (C_n) la suite définie par $C_{n+1} = 1{,}005\times C_n - 400$, de premier terme 50000. Exprimer le terme général de cette suite en fonction de n.

— Résolvons l'équation d'inconnue x, $x = 1{,}005\times x - 400$. Après quelques prouesses techniques, on obtient $-0{,}005x = -400$ donc $x = 80000$. La suite (α_n) de premier terme 80000, vérifiant la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = 1{,}005\times\alpha_n - 400$ est une suite constante.
— Prouvons que la suite $(C_n - \alpha)$ est géométrique de raison a :
Soit n un entier naturel,

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & = & 1,005\times C_n - 400 \\ \alpha & = & 1,005\times\alpha - 400 \\ \text{Soustrayons} & \text{la} & \text{deuxième égalité} \quad \text{à la première} \\ C_{n+1}-\alpha & = & 1,005(C_n-\alpha) \end{array}$$

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, $C_{n+1}-\alpha = 1,005(C_n-\alpha)$. La suite $(C_n-80000)$ est donc géométrique de raison $1,005$. Le premier terme est $C_0-80000$ c'est à dire -30000.

— Exprimons le terme général de la suite $(C_n-80000)$ en fonction de n :
$C_n-80000=(C_0-80000)\times 1,005^n$. On obtient $C_n-80000=-30000\times 1,005^n$

— Exprimons alors le terme général de (C_n) en fonction de n.
De l'étape précédente, on déduit que, pour tout entier naturel n, $C_n = 80000-30000\times 1,005^n$

IV. Exercices

Exercice 5. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite arithmétique de raison r, vérifiant :

1. $u_0=2$ et $r=\dfrac{3}{2}$
2. $u_5=1$ et $u_{11}=8$
3. $u_0=1$ et $u_0+u_1+\ldots+u_{100}=2$

Exercice 6. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite géométrique de raison q, vérifiant :

1. $u_1=5$ et $q=\dfrac{2}{3}$
2. $u_4=1$ et $u_9=25\sqrt{5}$
3. $q=2$ et $u_0+u_1+\ldots+u_{12}=24573$

Exercice 7. Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique et préciser la raison.

1. $u_n=3^{n+2}$
2. $u_n=5^{1-3n}$
3. $u_n=(-1)^n\times 6^{2n+3}$
4. $u_n=2+(2+2^2+\ldots+2^n)$

Exercice 8. Calculer les sommes :

1. $A=8+13+18+\ldots+2018+2023$
2. $2^2+2^5+2^8+\ldots+2^{20}$
3. $x+x^2+\ldots+x^n$ (lorsque $x\neq 1$, puis $x=1$).

Suites arithmético-géométriques

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite en fonction de n.

— $u_0=1$ et $u_{n+1}=1,5u_n+5$

— $u_1=1$ et $u_{n+1}=1,5u_n+5$

— $u_0=10000$ et $u_{n+1}=1,05u_n-300$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 0,90u_n + 300$

Exercice 10. TOTORO va voir son banquier pour obtenir un crédit de 10000 euros. Celui-ci lui propose de rembourser une somme de 400 euros par mois avec un taux mensuel de 0,05%. Combien de temps va mettre TOTORO pour rembourser son crédit ?

Fiche 2

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement global d'une suite

Suites monotones

Définition 7
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est non monotone si elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Techniques d'étude :
Trois techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

1. **La technique fonctionnelle**.
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
2. **Les techniques algébriques**.
   Elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
   — soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
   — soit en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition 8
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que , pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que , pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.
- La suite (u_n) est non bornée si elle n'est pas majorée ou elle n'est pas minorée.

Les techniques précédentes s'appliquent encore ici.

— suites $u_n = f(n)$: si f est majorée sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) l'est aussi.

— méthodes algébriques. Exemple si on conjecture un majorant M de la suite (u_n) alors on peut chercher à étudier algébriquement le signe de $u_n - M$.

Exercices

Suites croissantes, décroissantes

Exercice 11. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n^2 - 5n$
3. $u_n = 3n + (-1)^n$
4. $u_n = n - 3^n$

Exercice 12. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$
2. $u_n = 0,1^n \times n^2$
3. $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n}$

Exercice 13. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la fonction f $(u_n = f(n))$.

1. $u_n = n + \cos(n)$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
3. $u_n = n^2(3 - n)$

Suites majorées, minorées

Exercice 14. Montrer que chacune des suites ci-après est majorée et en déterminer un majorant.

1. $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \ldots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$
2. $u_n = 10 + 2\cos(n)$
3. $u_n = 9 + 3 + 1 + \ldots + 3^{-n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, étudier les bornes éventuelles de la suite (u_n) à l'aide du sens de variation de la fonction f. ($u_n = f(n)$).

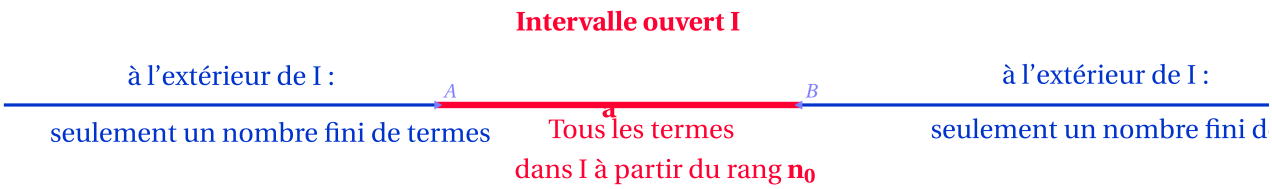
1. $u_n = n^2 - 10n - 3$
2. $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + 1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Fiche 3

Analyse- SUITES DE RÉELS Comportement asymptotique

I. Suites convergentes

Définition 9
Soit (u_n) une suite numérique et a un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- Lorsque (u_n) admet pour limite a, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
- Lorsqu'une suite admet une limite finie a, on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, elle est divergente.
- Si une suite est convergente, sa limite est unique. Preuve en exercice.

I.1. Suites de référence

Propriété 2
Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$...admettent pour limite 0

II. Suites ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 10
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 11
On dit que (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

II.1. Suites de référence

Propriété 3
Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2...admettent pour limite $+\infty$

II.2. Suites divergentes

Elles sont de deux types, une suite divergente peut être :

— soit avoir une limite infinie

— soit de ne pas avoir de limite comme $(-1)^n$ (cf exercice)

III. Exercices

Exercice 16. Unicité de la limite.

1. On suppose qu'une suite (u_n) admet deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, on a donc $\alpha > 0$. Montrer que la définition de la limite appliquée à deux intervalles bien choisis conduit à une contradiction.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17. En utilisant les définitions du cours montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ ne peut avoir de limite.

Exercice 18. Démontrer que si une suite (u_n) est convergente alors elle est bornée.

Fiche 4

Analyse- SUITES DE RÉELS
Opérations sur les limites

I. La somme

Théorème 2
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite de la somme $(u_n + v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
a est$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	x
a est$-\infty$	$-\infty$	x	$-\infty$

II. Le produit

Théorème 3
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $(u_n \times v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	ab	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$
a est$+\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
a est$-\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

III. Le quotient

Théorème 4
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel $(b \neq 0)$	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$\frac{a}{b}$	0	0
a est$+\infty$	$\pm\infty$	x	x
a est$-\infty$	$\pm\infty$	x	x

IV. Exemples

Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2. $v_n = n(3 - n)$

3. $\boldsymbol{w_n = \dfrac{1}{n^2-5}}$

La suite (u_n) :

On a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ car ce sont des suites de référence, donc, en utilisant le théorème sur la limite d'une somme, $\lim u_n = +\infty$.

La suite (v_n) :

On a $\lim(-n) = -\infty$ donc $\lim(3-n) = -\infty$ (limite d'une somme). Comme $v_n = n(3-n)$, le résultat sur le produit fournit $\lim v_n = -\infty$.

La suite (w_n) :

Il est clair que $\lim(n^2-5) = +\infty$, le résultat sur le quotient fournit alors $\lim w_n = 0$.

V. Formes indéterminées

Les théorèmes précédents ne disent rien :

— sur la somme lorsque $a = +\infty$ et $b = -\infty$

— sur le produit lorsque $a = \pm\infty$ et $b = 0$

— sur le quotient lorsque $b = 0$ ou lorsque a et b sont infinis tous les deux.

Ces situations dont certaines sont appelées formes indéterminées seront étudiées en exercice.

VI. Exercices

Opérations algébriques

Exercice 19. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide des théorèmes concernant les opérations sur les limites,

1. $u_n = 3n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = 1 - n^5$
3. $u_n = (1-3n)(n^2+n-2)$

Formes indéterminées

Exercice 20. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = 3n^2 - n + 5$. Mettre en facteur n^2.
2. $u_n = 8n - n^3$. Mettre en facteur n^3.

Exercice 21. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \dfrac{3n^2-n}{1-n^2}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
3. $u_n = \dfrac{(n+3)(-2n+1)}{3n+5}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Exercice 22. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \sqrt{n} - n$. Mettre en facteur le terme dominant.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{2n+1}$. Mettre en facteur le terme dominant.

Exercice 23. Déterminer la limite de (u_n) avec $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Fiche 5

Analyse- SUITES DE RÉELS THÉORÈMES DE COMPARAISON

I. Théorèmes des comparaison

Théorème 5
On résume les théorèmes dans le tableau ci-dessous :

— les quatre premiers déterminent le comportement à l'infini d'une suite (x_n) par comparaison à d'autres suites (u_n), (v_n) dont le comportement est connu.

— le dernier résultat autorise le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse 1 : une inégalité à partir d'un certain rang	Hypothèse 2 : Comportement à l'infini	Conclusion
$u_n \leqslant x_n$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim x_n = +\infty$
$x_n \leqslant u_n$	$\lim u_n = -\infty$	$\lim x_n = -\infty$
$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers le même nombre ℓ	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$\lvert x_n - \ell \rvert \leqslant u_n$	$\lim u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$x_n \leqslant y_n$	$\lim x_n = \ell$ $\lim y_n = \ell'$	$\ell \leqslant \ell'$

II. Comportement asymptotique de q^n (q réel)

Théorème 6

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante et a pour limite 1.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant 1$ alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Ce résultat sera démontré en exercice. Il permet le cas échéant, de déterminer la limite d'une suite géométrique, ou de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple
Etudier la limite de la suite (S_n) : $S_n = 1 + x + \ldots + x^n$ avec $-1 < x < 1$. Utilisons la formule sommatoire

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

III. Exercices

III.1. Théorème de comparaison

Exercice 24. Énoncer et démontrer le théorème de la première ligne du tableau.

Exercice 25. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \cos(n) - n$
2. $u_n = 2n + (-1)^n$

Exercice 26. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{n}$

III.2. Suites géométriques

Exercice 27.

1. Démontrer , pour tout $n \geqslant 0$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \text{ Inégalité de Bernoulli}$$

2. En déduire que, si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

3. A l'aide des théorèmes de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Exercice 28. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 1,01^n$
2. $u_n = 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Exercice 29. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
2. $u_n = 1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{6}{5}\right)^n$
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = 0,8 + 0,8^2 + \ldots + 0,8^n$
5. $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{7}\right)^{2n}$

Exercice 30. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 3,77..7$ (n chiffres 7)
2. $u_n = 0,6767..67$ (n séquences 67)
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
5. $u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

Fiche 6

Analyse- SUITES DE RÉELS
Exercices supplémentaires

I. Majorants, minorants et variations

Exercice 31. Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3 + 5n$
2. $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$
4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$
5. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$
6. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$
7. $u_n = n + (-1)^n$

Exercice 32.
1. Montrer que la suite de terme général :
   (a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;
   (b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant ;
   (c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) ;
   (d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;
   (e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$;
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.