Thème 3 Analyse-Équations différentielles

Fiche 1

Analyse- Équation différentielle L'équation différentielle $y' = ay + b$

I. Généralités

— Une fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout x de I

$$f'(x) = af(x) + b$$

Sans précision, on prendra $I = \mathbb{R}$. En dehors des notations fonctionnelles habituelles, on autorise l'écriture : « $y = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ », étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction.

— Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$, c'est trouver toutes les solutions.

— Un peu de vocabulaire :

  — L'équation $y' = ay + b$ est dite du premier ordre linéaire à coefficients constants

  — $y' = ay$ est l'équation sans second membre associée. La locution « sans second membre » se conçoit mieux si l'on écrit $y' - ay = b$, l'équation sans second membre associée est alors $y' - ay = 0$.

II. Résolution de l'équation $y' = ay$ (a réel).

L'équation $y' = ay$ est l'équation de référence dans ce chapitre. Nous en donnons ci-dessous les solutions.

Théorème 7
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante arbitraire.

Démonstration : — D'une part, il est évident que $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

— Réciproquement, si y est une solution de $y' = ay$, posons $z(x) = \mathrm{e}^{-ax}y(x)$, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$z'(x) = -a\mathrm{e}^{-ax}y(x) + \mathrm{e}^{-ax}y'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

Donc, pour tout x réel, $z'(x) = 0$. Ainsi, il existe une constante C telle que, pour tout x réel, $z(x) = C$. On en déduit que pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-ax}y(x) = C$, donc, pour tout x réel, $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Ce qui démontre le théorème annoncé. □

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ Ici $a = -\frac{3}{2}$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$.

III. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels)

Théorème 8
On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ (1) (a et b réels et a non nul), et on associe l'équation sans second membre associée $y' = ay$. Alors :

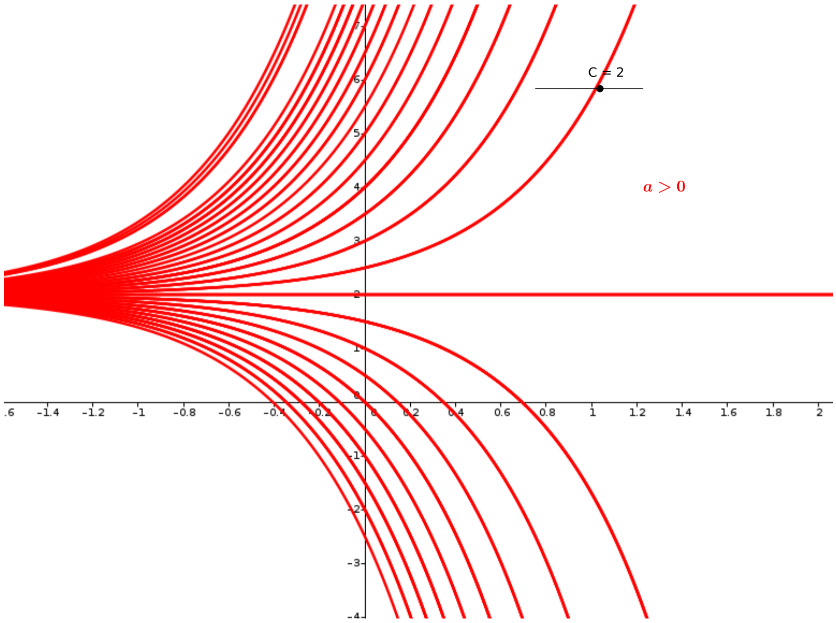
- il existe une fonction constante g, solution particulière de (1) : $g(x) = -\frac{b}{a}$
- l'ensemble des solutions de (1) s'obtient en ajoutant g à une solution quelconque de l'équation sans second membre.
  Ces solutions sont donc les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. ($C$ réel quelconque).

Démonstration :
La fonction g $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de (1), la vérification est aisée.
La condition « f est solution de (1) » est équivalente à ,pour tout x, $f'(x) - af(x) = b$, soit encore à $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$.
La dernière égalité s'écrit encore $(f - g)' = a(f - g)$. Ainsi, f est solution de (1) est équivalente, $f - g$ est solution de $y' = ay$. Cette dernière condition se traduit par, pour tout x réel, $f(x) - g(x) = Ce^{ax}$. En conclusion, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. □

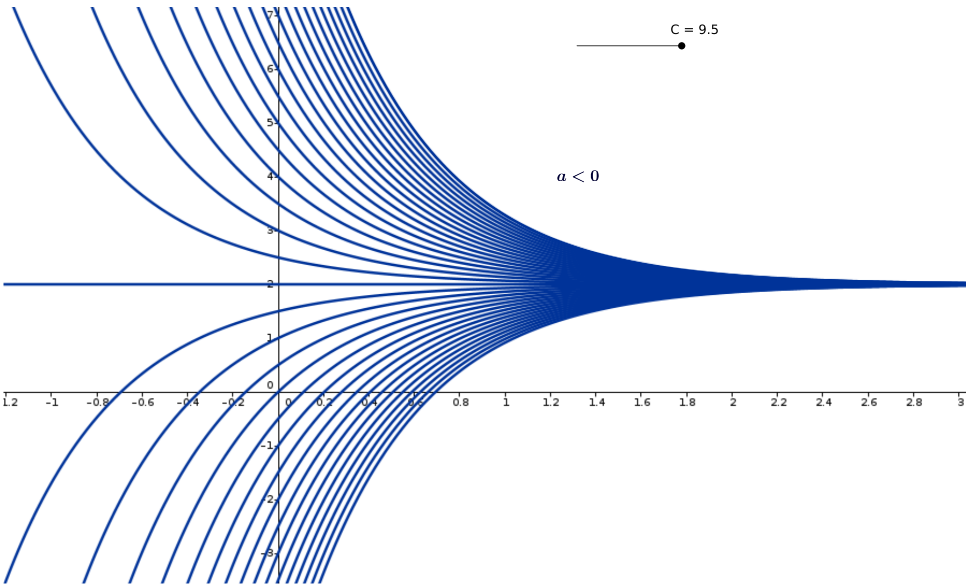
le point de vue graphique

Voici les courbes des solutions de solutions de l'équation $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = -4$

$\boldsymbol{a > 0}$



$\boldsymbol{a < 0}$



Remarque
Si $a = 0$, les solutions de (1) sont les fonctions affines $x \mapsto bx + k$.

Théorème 9
Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. (x_0 et y_0 réels donnés).

Exemple
Déterminer la fonction f, solution de $y' = -0,5y + 1$ telle que $f(0) = 4$.
La solution générale de l'équation est $x \mapsto Ce^{-0,5x} + 2$. La condition $f(0) = 4$ donne $C = 2$. Donc $f(x) = 2e^{-0,5x} + 2$.

IV. Exercices

Exercice 33. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \frac{3}{2}y$
2. $-y' + y = 0$
3. $7y' + 8y = 0$

Exercice 34. Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels), et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - 5 = y$
3. $3y' - 2y + 1 = 0$
4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$
5. $y' = 100(y - 3)$
6. $y' = 0,1(100 - y)$
7. $y' = 2002(8 - 5y)$

Exercice 35. Démontrer le théorème 3 du cours « Il existe un unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés) ».

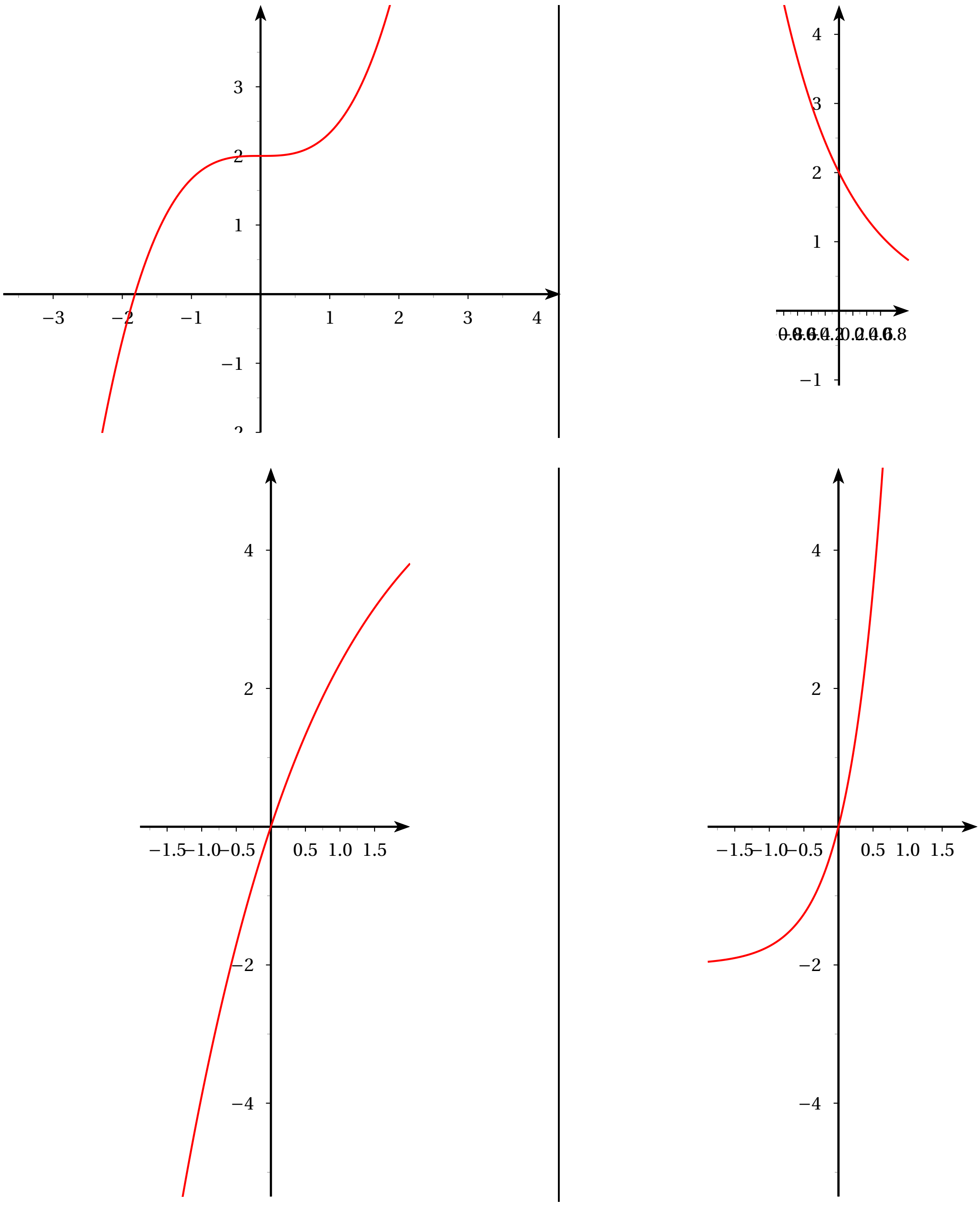
Exercice 36. Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée, et donner l'allure de sa représentation graphique.

1. $y' = 4y - 3$, $y(0) = -1$
2. $y' = -y + 1$, $y(2) = 6$
3. $y' + 0,03y = 5$, $y(0) = 200$
4. $y' = 500 - 0,1y$ $y(10) = 0$

Exercice 37. On considère les équations différentielles suivantes :

1. $y' = x^2$,
2. $y' = 3 - 0,5y$,
3. $y' + 0,03y = 5$
4. $y' - 2y = 4$
5. $y' = -y$

Les figures ci-après donnent sommairement l'allure des courbes représentatives d'une solution (1), (2), (3) et (4). Associer à chaque courbe son équation différentielle.



Exercice 38. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (5x+2)e^{3x}$$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = 3y + 5e^{3x}$$

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Fiche 2

Analyse- Équation différentielle Équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$

Il s'agit d'étudier certaines équations différentielles se ramenant à la forme $y' = ay + b$.

I. Exercice résolu

On considère les équations différentielles :

$$y' - 2y = 1 - 6x \tag{2.1}$$

$$y' = y(5 - y) \tag{2.2}$$

1. Montrer que (1) admet une solution affine et résoudre (1).
2. Déterminer les solutions strictement positives de (2) en posant $z = \dfrac{1}{y}$

II. Résolution de l'exercice

1. Posons $g(x) = ax + b$, g est solution de (1) si, pour tout x réel,

   $$a - 2(ax + b) = 1 - 6x.$$

   Cette égalité implique $a = 3$ et $b = 1$. On vérifie que la fonction $x \mapsto 3x + 1$ est solution de l'équation (1).
   On en déduit les équivalences suivantes : y est solution de (1) $\Leftrightarrow y' - 2y = 1 - 6x$
   $\Leftrightarrow y' - 2y = g' - 2g$
   $\Leftrightarrow (y - g)' - 2(y - g) = 0$
   Ainsi, pour tout x réel, $y(x) - g(x) = Ce^{2x}$ (C est réel)
   Les solutions de (1) sont les fonctions $x \mapsto 3x + 1 + Ce^{2x}$ (C est réel)

2. $z = \dfrac{1}{y}$, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $y > 0$ et
   $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{y(5-y)}{y^2} = -\dfrac{5}{y} + 1$ donc $z' = -5z + 1$. On en déduit facilement $z(x) = \dfrac{1}{5} + Ce^{-5x}$, puis $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$.
   Remarque : si $C < 0$, on peut avoir $z(x) \leqslant 0$ (donc $y(x) \leqslant 0$) pour certaines valeurs de x. La condition $y(x) > 0$ impose $C \geqslant 0$.

III. Exercices

Exercice 39. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = e^x$, en montrant d'abord qu'il existe une solution particulière de la forme $g : x \mapsto ae^x$.

Exercice 40. On considère l'équation différentielle $y' = -y^2$. En posant $z = \frac{1}{y}$, montrer que l'équation admet des solutions strictement positives sur $[0, +\infty[$.

Exercice 41. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x - 5$.

1. Montrer que (E) admet une fonction affine $g : ax + b$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 42. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$.

1. Montrer que (E) admet une fonction polynôme du second degré $g : ax^2 + bx + c$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 43. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : (ax + b)e^{-2x}$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 44. On considère l'équation différentielle $y' + y = \sin x$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : \lambda \sin x + \mu \cos x$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 45. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = xe^x \tag{2.3}$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)e^x$$

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1)
   (b) Montrer que v est solution de l'équation (2) si, et seulement si $u + v$ est solution (1)
   (c) En déduire l'ensemble (1)
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 46. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = e^{2x} \tag{2.4}$$

1. Démontrer que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$, est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E)
5. Déterminer la fonction solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 47. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive, vérifiant l'équation différentielle $y' = ky(A-y)$ où A et k sont des réels donnés ($k \neq 0$ et $A > 0$)

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle du type $z' = az + b$ (On exprimera a et b en fonction de k et de A).
2. En déduire qu'il existe une constante B telle que l'on ait, pour tout x réel
$$y(x) = \frac{A}{1 + B\mathrm{e}^{-kAx}}.$$
Préciser le signe B compte tenu de la condition $y(x) > 0$ pour tout x.
3. Donner l'allure de la courbe représentative d'une solution en distinguant les deux cas
   (a) $k > 0$
   (b) $k < 0$

Exercice 48. On considère les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde et vérifiant $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$ et, pour tout x $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$.

1. On pose, pour tout x réel, $z(x) = \mathrm{e}^x y(x)$.
   (a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.
   (b) Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que pour tout x réel, $z''(x) - 2z'(x)$.
   (c) En déduire que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z' = 4 - 2z$.
   (d) Exprimer alors $z(x)$ en fonction de x.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution fonction y vérifiant les hypothèses de départ, et exprimer $y(x)$ en fonction de x.

Fiche 3

Analyse- Équation différentielle Situations menant à une équation différentielle

I. Problème Sciences PO 2012

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie quelques-uns de ces modèles.

I.1. Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1. **Modèle discret**
   Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n de l'étude P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

   $$P_{n+1} - P_n = kP_n.$$

   (a) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.

   (b) Indiquer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.

   (c) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.

   (d) Interpréter les résultats des questions **b.** et **c.** en termes d'évolution de population.

2. **Modèle continu**
   On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle k telle que,pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.

   (a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $P(t)$ en fonction de t, k et P_0 la population à l'instant $t = 0$.

(b) Quel est le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction P ? On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de k.

(c) On se place maintenant dans le cas où $k > 0$. On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale.
Exprimer λ en fonction de k.
Si la population double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle ? Justifier.

(d) On suppose toujours que $k > 0$. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;\,T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
En déduire la population moyenne sur l'intervalle $[0\,;\,\lambda]$ en fonction de P_0.

3. **Comparaison des deux modèles**
On suppose que la population initiale est de 1 000 individus et que $k = 0,1$.
Comparer les résultats obtenus après 10 ans puis après 100 ans pour chacun des deux modèles.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas très réaliste. Le taux d'accroissement de la population va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources. Il faut donc introduire un facteur d'autorégulation M tenant compte de la capacité d'accueil du milieu.
Dans ce qui suit, on étudie donc les modèles de Verhulst et de Gompertz qui permettent de décrire l'accroissement de la population comme « proportionnel » à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.

I.2. Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telle que, pour tout entier naturel n,

$$P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$$

1. Si la suite (P_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?
2. On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{k}{rM}P_n$. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = r\,u_n(1-u_n).$$

3. Dans cette question 3., on suppose que $r = 1,8$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ et croissante.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

   (c) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population P_n ? Justifier.

4. Dans cette question 4., on suppose que $r = 3,2$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Sur le graphique fourni en annexe on a représenté, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3,2x(1-x)$ et la droite d'équation $y = x$.
   Sur ce graphique, construire, sur l'axe des abscisses, les 4 premiers termes de la suite (u_n). On laissera les traits de construction apparents.
   (b) Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la suite (u_n) ?
   (c) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs arrondies à 10^{-5} près des 6 premiers termes de la suite. Ces résultats confirment-ils la conjecture émise précédemment ?

5. Dans cette question 5., on suppose que $r = 5$ et u_0 est un réel strictement positif. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > 1$.
   (a) Démontrer que $u_{p+1} < 0$ puis que, pour tout $n \geqslant p+1$, $u_n < 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. On pourra, pour cela, étudier le signe de la fonction $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$. En déduire que, s'il existe, l'entier p est unique.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (e) Si $U_0 = 0,8$, que peut -on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$? Justifier.
   (f) Démontrer que si $u_0 = 0,5$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Même question avec $u_0 = 0,1$.
   En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799\,999$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Que peut-on dire de la validité du modèle dans ces différents cas ?

I.3. Modèle de Verhulst continu

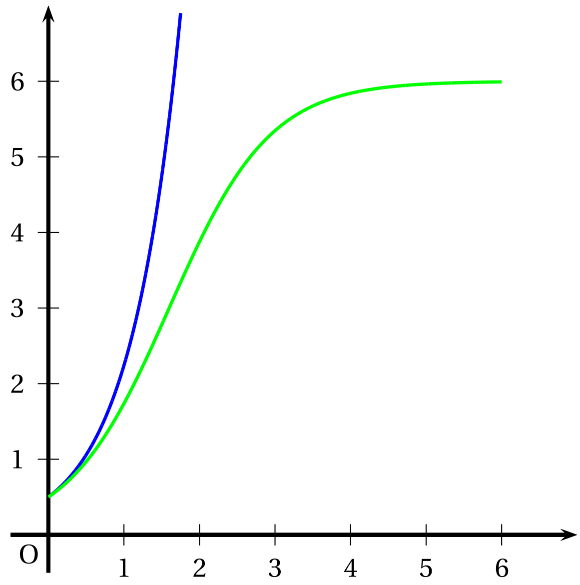
On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$P'(t) = kP\left(1 - \frac{P(t)}{P\ M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky(1-y)$.

1. On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $Q = \dfrac{1}{P}$.
   (a) Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $\quad y' = -ky + \dfrac{k}{M}$.
   (b) Résoudre (E'). Justifier que les fonctions obtenues sont strictement positives quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t) = \dfrac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ où C est une constante réelle.
   (a) Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ selon le signe de C.
   (c) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
   (d) Décrire l'évolution de cette population. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.
3. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\ ;\ T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\ ;\ T]$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est donnée par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0\ ;\ T]$.
   (b) Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.
4. On se place dans un repère (O, I, J). Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ un point où la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la courbe C J .
   (a) Démontrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.
   (b) Calculer la dérivée seconde P'' de la fonction P. Montrer que l'équation $P''(t) = 0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C > 0$. Démontrer que $t_0 = \dfrac{\ln(C)}{k}$.
   (c) Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\,(t_0\ ;\ P\,(t_0))$ appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{M}{2}$.
   (d) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P, au point A_0. On note g la fonction affine correspondante.
   (e) Étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0. On pourra, pour cela, étudier les variations puis le signe de la fonction φ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(t) = P(t) - g(t)$.
   En déduire que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.
5. Dans cette question, on prend $P_0 = 0{,}5$, $k = 1{,}5$ et $M = 6$. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions $t \mapsto 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}5t}$ et $t \mapsto \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1{,}5t}}$ définies sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) On considère la fonction d définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $d(t) = 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}5t} - \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1{,}5t}}$.
   Résoudre l'inéquation $d(t) < 0{,}1$.
   Que peut-on dire de ces deux courbes au voisinage de l'origine O ?
   (b) À l'aide du graphique ci-dessous, décrire, dans le cas du modèle de Verhulst continu, l'évolution de la population quand son effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M.



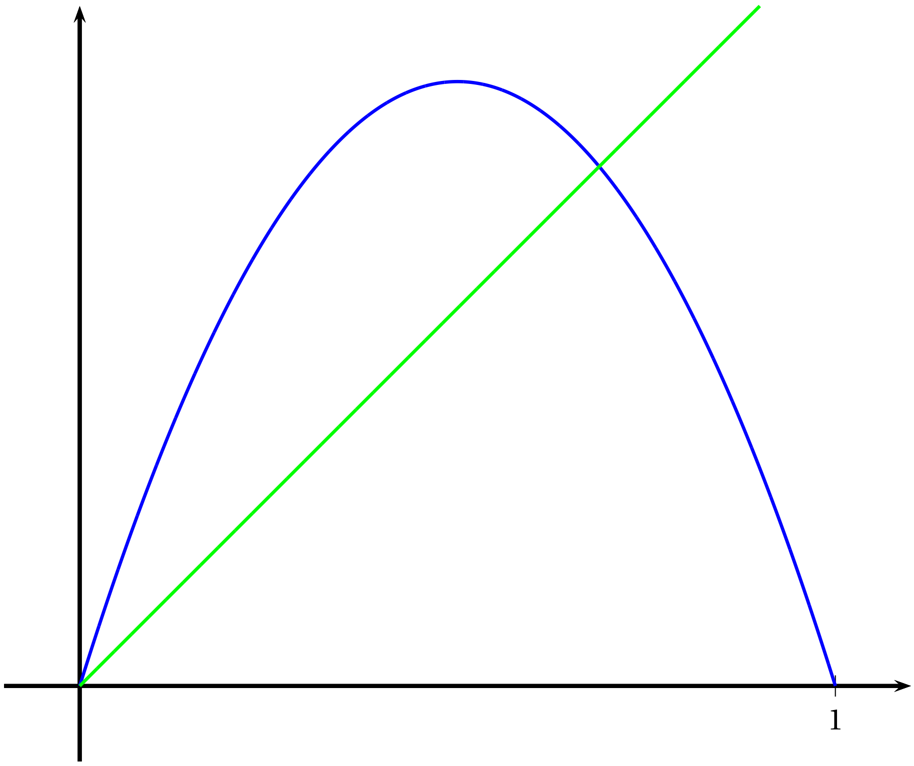
I.4. Modèle de Gompertz

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes k et M avec M strictement positive telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on ait :

$$P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1. On considère la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $Q = ln(P)$.
   (a) Démontrer qu'une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = kyln[\,]$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + kln(M)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
   (c) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $P(t) = M\mathrm{e}^{-kt}$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.
3. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1 000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers d'individus, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 20$.
   (a) Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression « population en voie d'extinction ».
   (b) Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

Annexe



II. Problème posé au bac

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue

période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\text{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. (a) Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E}'\text{)} \qquad y' + ay = \frac{a}{\text{M}}.$$

   (b) Résoudre (E′).

   (c) Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\dfrac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\text{M}}{1 + C\text{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

   (b) Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\text{M}}{2}$.

   (c) Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\text{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
   Exprimer t_0 en fonction de a et C.

   (d) Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que $g(0) = \text{N}_0$ et que $\text{M} = 100\ \text{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II