

# Thème 4 Analyse- Compléments sur la Dérivation

## Fiche 1

# Analyse- Fonctions

## Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

### I. Généralités

#### Définition 12

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ , c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

ou encore

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas,  $\ell$  est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , et on note  $f'(a)$ .

#### Remarques

- Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$ , nous pouvons encore écrire :
  - (1)  $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$
  - (2)  $f(a + h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$
- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , il est clair d'après (1) que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Ainsi toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ . Toutefois la réciproque est fautive. Connaître les exemples classiques :
  - la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue et non dérivable en 0
  - la fonction  $x \mapsto |x|$  est continue et non dérivable en 0

### II. L'écriture différentielle

Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole  $\Delta$  ; ils notent  $\Delta x = x - a$  et  $\Delta y = f(x) - f(a)$ . Avec ces notations, l'égalité (1) s'écrit  $\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x\varepsilon(\Delta x)$  avec  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ . Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$dy = f'(a)dx \text{ ou } f'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$$

C'est ce que l'on nomme la notation différentielle.

### III. Interprétations

#### III.1. Interprétation graphique : tangente

Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  admet au point  $A(a, f(a))$  une tangente de coefficient directeur  $f'(a)$ . Cette tangente a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

#### III.2. Interprétation numérique : approximation affine

Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$ , la fonction  $f$  admet une bonne approximation affine au voisinage de  $a$  :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

#### III.3. Interprétation cinématique : vitesse

Si  $t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$  est la loi horaire du mouvement d'un point mobile dans un plan muni d'un référentiel  
alors  $\begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases}$  désignent les coordonnées du vecteur vitesse instantanée de  $M$  en  $t$ .

### IV. Dérivée seconde

**Définition 13**

Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et si sa dérivée première est elle-même dérivable en  $a$ , on dit que  $f$  est deux fois dérivable en  $a$  et la dérivée de sa dérivée en  $a$  est notée  $f''(a)$  c'est la dérivée seconde de  $f$  en  $a$ .

### V. Exercices

**Exercice 49.** A l'aide de la définition, étudier la dérivabilité au point  $a$  de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  en distinguant les cas :

- $a > 0$
- $a = 0$

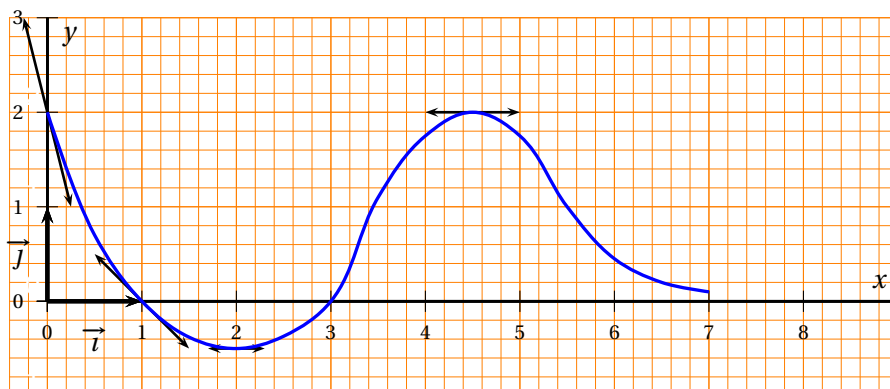
**Exercice 50.** Dans chaque cas déterminer tous les réels  $a$  tels que  $f'(a) = 1$ .

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$
2.  $f(x) = x^2$
3.  $f(x) = \sqrt{x}$
4.  $f(x) = \sin(x)$

**Exercice 51.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  :

1.  $f(x) = 1 - 3x + x^4$ ,  $a = 0$
2.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 4$
3.  $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ ,  $a = \pi$

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 1$



**Exercice 52.**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), on considère la courbe ci-dessus représentant une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0 ; 7]$ .

Toutes les réponses aux questions suivantes seront obtenues à partir du graphique.

1. Lire  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f'(1)$ ,  $f'\left(\frac{9}{2}\right)$ .
2. Déterminer le signe de la fonction  $f$  et celui de sa dérivée  $f'$ .
3. Indiquer à 0,1 près des valeurs approchées des solutions de l'équation  $f(x) = 1$ .

**Exercice 53.** 1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2 - 4x + 5$ .

2. En quels points de  $\mathcal{P}$  peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier un dessin.

**Exercice 54.** Justifier les approximations suivantes au voisinage de 0 :

1.  $(1+x)^3 \approx 1+3x$
2.  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$
3.  $\exp(x) \approx 1+x$
4.  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$
5.  $\sin x \approx x$
6.  $\tan x \approx x$

## Fiche 2

# Analyse- Fonctions

## Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

### I. variations d'une fonction et extremums

Lorsqu'une fonction est dérivable en tout point d'un intervalle  $I$ , nous pouvons définir la fonction dérivée  $f' : x \mapsto f'(x)$  sur  $I$ . Avec la notation différentielle,  $f'$  se note encore  $\frac{df}{dx}$ . Rappelons les résultats suivants, admis en classe de première.

**Théorème 10**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

- Si la fonction dérivée est nulle sur  $I$  alors  $f$  est constante sur  $I$
- Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

Ainsi l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée  $f'$  garde un signe constant.

**Exemple**

Etudier les variations de  $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ . Ainsi

- $f'$  est strictement positive sur  $] -\infty, 0]$  sauf en 0 où elle s'annule, donc  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, 0]$
- $f'$  est strictement négative sur  $[0, 4]$  sauf en 0 et en 4 où elle s'annule, donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 4]$
- $f'$  est strictement positive sur  $[4, +\infty[$  sauf en 4 où elle s'annule, donc  $f$  est strictement croissante sur  $[4, +\infty[$

Nous rappelons encore le résultat suivant précisant le lien entre dérivée et extrema locaux. le résultat essentiel découle du théorème précédent.

**Théorème 11**

Si  $f$  dérivable sur un intervalle **ouvert**  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

1. Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$
2. si en  $x_0$  la dérivée  $f'$  s'annule **en changeant de signe** alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

**Remarques**

1. Les abscisses des extrema d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée mais si  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0$  n'est pas forcément l'abscisse d'un extremum local, ( $f(x) = x^3$  et  $x = 0$ )
2. Pratiquement, les abscisses des extrema locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements d'orientation des flèches.

**II. Exercices****Opérations et dérivées**

**Exercice 55.** Déterminer pour chaque question le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1.  $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$
2.  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
3.  $f(x) = 3x^7$
4.  $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
5.  $f(x) = \frac{3}{x}$
6.  $f(x) = -\frac{5}{x^2}$
7.  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

8.  $f(x) = (2x - 1)x^2$
9.  $f(x) = 3x \sin x$
10.  $f(x) = x\sqrt{x}$
11.  $f(x) = \cos x \sin x$
12.  $f(x) = \cos^3(x)$
13.  $f(x) = (x + 4)^3$
14.  $f(x) = (x + \sin x)^2$
15.  $f(x) = (x^2 + x + 1)^4$
16.  $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4}$

17.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
18.  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 3}$
19.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
20.  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$
21.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$

**Exercice 56.** Soit  $n$  un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1. En utilisant une formule sommatoire, calculer de deux manières la dérivée de  $f : x \mapsto 1 + x + x + \dots + x^n$ , pour  $x \neq 1$ .
2. En déduire que pour  $x \neq 1$ , une formule sommatoire de  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ .
3. Applications :
  - (a) Calculer les sommes :
    - i.  $A = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 16 \times 2^{15}$
    - ii.  $B = 1 + 2\sqrt{3} + 3 \times 3 + \dots + 20 \times 3^9 \sqrt{3}$
  - (b) Etudier la limite de  $u_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}$ .

**Exercice 57.** On pose pour tout  $x \geq 0$  et  $n \geq 0$ ,  $f_n(x) = x^n \sqrt{x}$ . Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $f'_{n+1}(x)$  en fonction de  $f_n(x)$ .

**Variation et extrema**

**Exercice 58.** Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est dérivable et étudier les variations de  $f$ .

- |                             |                                     |                                              |
|-----------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$    | 6. $f(x) = x + \frac{16}{x}$        | 9. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0, \pi]$      |
| 2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$ |                                     | 10. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ |
| 3. $f(x) = x^2(x-1)^3$      | 7. $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$       | 11. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$                   |
| 4. $f(x) = x^4 - 4x$        | 8. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ | 12. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$                   |
| 5. $f(x) = x(1-x)$          |                                     |                                              |

**Exercice 59.** On pose, pour  $n \geq 2$ ,  $f(x) = x^n$ .

1. Résoudre l'équation  $f'(x) = 0$
2. Pour quelles valeurs de  $n$  la fonction  $f$  admet-elle un extremum local en 0.

**Exercice 60.** Peut-on trouver une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , non constante et admettant un extremum local pour toute valeur entière ?

## Fiche 3

# Analyse- Fonctions

## Dérivation - Dérivation d'une composée-tableaux récapitulatifs

Terracher- 2002

## I. Dérivation d'une composée

**Théorème 12**

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $x_0$ , et  $v$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  contenant  $y_0 = u(x_0)$ . Si  $u$  est dérivable en  $x_0$  et si  $v$  est dérivable en  $y_0$ , alors la fonction  $v \circ u$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = u'(x_0) \times v'(y_0)$ .

**Démonstration :** Soit  $x$  un réel de  $I$ , la dérivabilité de  $u$  en  $x_0$  entraîne  $u(x) - u(x_0) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))$  où  $z(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

De même, si  $s$  est un réel de  $J$ , la dérivabilité de  $v$  en  $y_0$  entraîne  $v(s) - v(y_0) = (s - y_0)(v'(y_0) + k(s))$  où  $k(s)$  tend vers 0 quand  $s$  tend vers  $y_0$ .

En posant  $s = u(x)$ , on obtient donc,

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (u(x) - u(x_0))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Donc

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Si  $x \neq x_0$ , en divisant par  $(x - x_0)$  on obtient

$$\frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = (u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$  et que  $\lim_{y \rightarrow y_0} k(y) = k(y_0)$  on peut conclure que  $\lim_{x \rightarrow x_0} k(u(x)) = 0$ , de plus  $\lim_{x \rightarrow x_0} z(x) = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = u'(x_0)v'(u(x_0))$$

**Exemple**

Montrer que  $f : x \mapsto \sin(x^2)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$ . Posons  $u(x) = x^2$  et  $v(y) = \sin(y)$ , ces deux fonctions étant dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,  $v \circ u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , or  $f = v \circ u$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$f'(x) = u'(x) \times v'(y) = 2x \cos(x^2)$$

## Exemples d'applications

**Théorème 13**

Soit  $u$  une fonction dérivable en  $x_0$ . Alors

- la fonction  $f : x \mapsto (u(x))^n$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ), est dérivable sur en  $x_0$  (sous la condition  $u(x_0) \neq 0$  pour  $n < 0$  et

$$f'(x_0) = nu'(x_0)(u(x_0))^{n-1}$$

- Si  $u(x_0) > 0$ , la fonction  $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est dérivable en  $x_0$  et

$$g'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$$

- la fonction  $h : x \mapsto \exp(u(x))$  est dérivable en  $x_0$  et

$$h'(x_0) = u'(x_0) \times \exp(u(x_0))$$

**II. Tableau récapitulatif****Dérivées des fonctions usuelles**

| fonction             | dérivée                         | commentaire        | ensemble de dérivabilité                                                    |
|----------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $x \mapsto k$        | $x \mapsto 0$                   | $k$ constante      | $\mathbb{R}$                                                                |
| $x \mapsto x^n$      | $x \mapsto nx^{n-1}$            | $n \in \mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$<br>$\mathbb{R}$ si $n < 0$                       |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |                    | sur $]0, +\infty[$                                                          |
| $x \mapsto \cos x$   | $x \mapsto -\sin x$             |                    | sur $\mathbb{R}$                                                            |
| $x \mapsto \sin x$   | $x \mapsto \cos x$              |                    | sur $\mathbb{R}$                                                            |
| $x \mapsto \tan x$   | $x \mapsto 1 + \tan^2 x$        |                    | sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ |
| $x \mapsto \exp(x)$  | $x \mapsto \exp(x)$             |                    | sur $\mathbb{R}$                                                            |

### Opérations et compositions

| fonction                 | dérivée                                | commentaire        | conditions                       |
|--------------------------|----------------------------------------|--------------------|----------------------------------|
| $u + v$                  | $u' + v'$                              |                    |                                  |
| $au$                     | $au'$                                  | $a$ constante      |                                  |
| $uv$                     | $u'v + uv'$                            |                    |                                  |
| $\frac{1}{v}$            | $-\frac{v'}{v^2}$                      |                    | si $v(x) \neq 0$                 |
| $\frac{u}{v}$            | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$                |                    | si $v(x) \neq 0$                 |
| $x \mapsto v \circ u(x)$ | $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$      |                    |                                  |
| $x \mapsto (u(x))^n$     | $x \mapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$         | $n \in \mathbb{Z}$ | si $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$ |
| $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  | $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |                    | si $u(x) > 0$                    |
| $x \mapsto \exp(u)$      | $x \mapsto u'(x) \exp(u(x))$           |                    |                                  |

## III. Exercices

### III.1. calcul de dérivées

**Exercice 61.** Dans chaque cas, montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée :

- |                                 |                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = \cos(x^2)$           | 6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$<br>7. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$<br>8. $f(x) = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$<br>9. $f(x) = x^2 \times \exp(-x^2)$ |
| 2. $f(x) = \cos(\cos x)$        |                                                                                                                                                                              |
| 3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ |                                                                                                                                                                              |
| 4. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$      |                                                                                                                                                                              |
| 5. $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$   |                                                                                                                                                                              |

**Exercice 62.** Dans chaque cas, montrer que  $f$  est dérivable sur une réunion d'intervalles et calculer sa dérivée :

- |                                 |                                                                                                   |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = \tan(2x)$            | 4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$<br>5. $f(x) = \sqrt{\cos x}$<br>6. $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$      |                                                                                                   |
| 3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ |                                                                                                   |

**Exercice 63.** Calculer la dérivée n-ième de  $x \mapsto \exp(5x)$

**Exercice 64.** Calculer la dérivée n-ième de  $x \mapsto x \exp(x)$

**Exercice 65** — maths expertes avec complexes Calculer la dérivée n-ième de  $x \mapsto x \cos x$

**Exercice 66** — approfondissements  $u$  et  $v$  désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$

Calculer la dérivée seconde de  $u \times v$ .

2. Calculer la dérivée troisième de  $u \times v$ .
3. Calculer la dérivée n-ième de  $u \times v$ .

## Optimisation

**Exercice 67.** Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans l'arche de parabole  $\mathcal{P}$ , d'équation  $y = 1 - x^2$  ( avec  $y \geq 0$  ), on inscrit un rectangle  $MNQP$  ayant pour axe  $(Oy)$  avec  $M$  et  $N$  sur  $(Ox)$  et  $P$  et  $Q$  sur  $(Oy)$ .

1. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?
2. Quel est le point de  $\mathcal{P}$  le plus près de l'origine ?
3. La tangente à  $\mathcal{P}$  en  $S(x, y)$  coupe  $(Ox)$  en  $A$  et  $(Oy)$  en  $B$  (  $x > 0$  et  $y > 0$  ). Déterminer  $S$  pour que l'aire du triangle soit minimale.

## Comparaison de fonctions

**Exercice 68.** Etudier la position relative de la courbe de la fonction  $\cos$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$

**Exercice 69.** Démontrer que, pour tout  $x$  positif ou nul, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

**Exercice 70.** Démontrer que, pour tout  $x$  positif ou nul, et inférieur à  $\frac{\pi}{2}$

$$\sin x \leq x$$

## Fiche 4

Analyse- Fonctions  
Convexité

Hachette MPSI - 2008

## I. Définition

**Définition 14**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  contenant au moins deux points. On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si

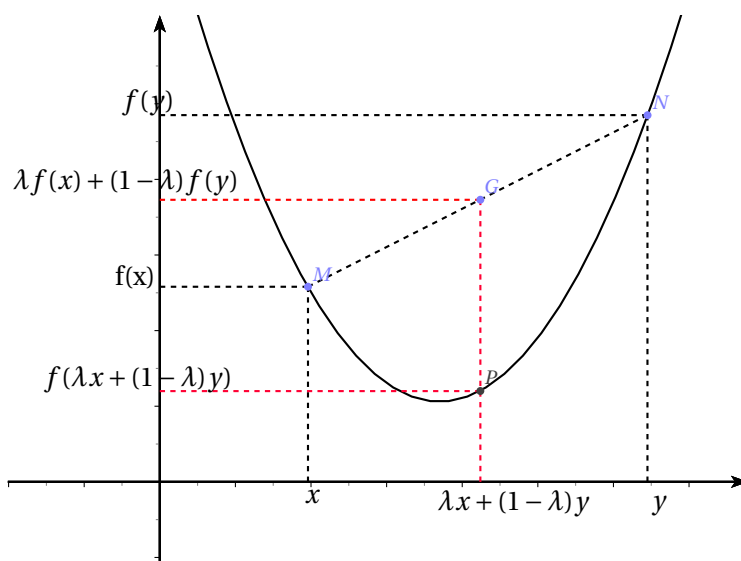
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

## Interprétation graphique

Soit  $M$  et  $N$  deux points de la courbe représentative de  $f$  d'abscisses respectives  $x$  et  $y$ .

Soit  $G$  le point de coordonnées  $(\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{MG}$  sont  $((1 - \lambda)(y - x); (1 - \lambda)(f(y) - f(x)))$ . Les coordonnées de  $\overrightarrow{MN}$  sont  $((y - x); (f(y) - f(x)))$ . On obtient ainsi l'égalité  $\overrightarrow{MG} = (1 - \lambda)\overrightarrow{MN}$  qui permet de conclure que le point  $G$  est un point du segment  $[MN]$ . En notant  $P$  le point de la courbe d'abscisse  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ . Les coordonnées de  $P$  sont  $(\lambda x + (1 - \lambda)y; f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$ . La définition de la convexité de  $f$  exprime donc que le point  $P$  est situé en dessous de  $G$ .



**Théorème 14**

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de sa courbe est situé en dessous de la corde correspondante.

**Exemples**

1. la fonction carrée est convexe sur  $\mathbb{R}$
2. la fonction valeur absolue est convexe sur  $\mathbb{R}$

**Définition 15**

Une fonction est dite concave sur  $I$  si son opposée est convexe sur  $I$ . Tout arc est situé au dessus de sa corde.

## II. Caractérisations des fonctions convexes dérivables

### Croissance de la fonction dérivée

**Théorème 15**

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable sur un intervalle  $I$  est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur  $I$

**Démonstration :** Admis



### Dérivée seconde positive sur $I$

**Théorème 16**

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur  $I$

**Démonstration :** Admis

**Définition 16**

Un point de la courbe en lequel la dérivée seconde **s'annule en changeant de signe** est appelé **point d'inflexion**. La courbe traverse sa tangente en ce point.

**Application**

- la fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$
- la fonction sin est concave sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$
- la fonction inverse est convexe sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$
- la fonction racine carrée est concave sur  $]0, +\infty[$
- la fonction tangente est convexe sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$

## Position par rapport à une tangente

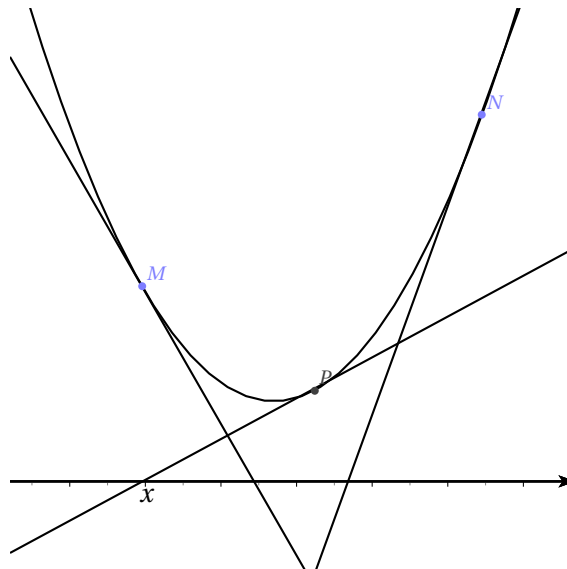
### Théorème 17

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable sur un intervalle  $I$  est convexe si et seulement si la courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

**Démonstration :** Preuve du programme sens : si  $f$  convexe alors la courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes. Si  $f$  est une fonction dérivable sur  $I$ , l'équation de la tangente à sa courbe en un point d'abscisse  $a$  est  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Notons  $d(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ . Cette fonction  $d$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est  $d'(x) = f'(x) - f'(a)$ . La croissance de la fonction  $f'$  implique que :

- si  $x \leq a$  alors  $f'(x) \leq f'(a)$  et donc  $d'(x) \leq 0$ .
- si  $x \geq a$  alors  $f'(x) \geq f'(a)$  et donc  $d'(x) \geq 0$ .

Ainsi  $d'$  est décroissante sur l'intervalle situé à gauche de  $a$  et croissante sur l'intervalle situé à droite de  $a$  et donc la fonction  $d$  admet un minimum sur  $I$  atteint lorsque  $x$  vaut  $a$ . Or  $d(a) = 0$  donc  $d$  est positive sur  $I$  donc  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$  et donc la courbe de  $f$  est au-dessus de sa tangente.  $\square$



### Application

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
- $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leq x$
- $\forall x \in ]-1, +\infty[, \frac{1}{x+1} \geq -x + 1$

## III. Exercices

### Exercices

**Exercice 71.** Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xe^{-x}$ .

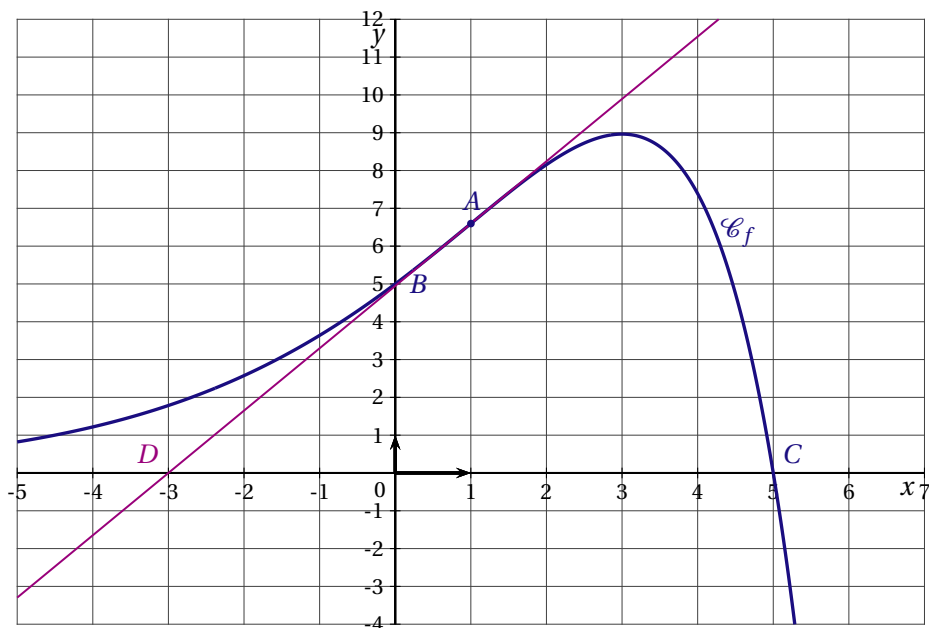
- L'image  $f(\ln 2)$  de  $\ln 2$  par  $f$  est égale à :
  - $\ln 2$
  - $-2\ln 2$
  - $2\ln 2$
  - $\frac{1}{2}\ln 2$
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel  $x$ , on a :
  - $f'(x) = e^{-x}$
  - $f'(x) = -e^{-x}$
  - $f'(x) = (1-x)e^{-x}$
  - $f'(x) = (1+x)e^{-x}$
- L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0 est :
  - $y = 2x$
  - $y = x - 1$
  - $y = x$
  - $y = 2x - 1$
- La fonction  $f$  est :
  - concave sur  $[0; 1]$
  - concave sur  $[0; +\infty[$
  - convexe sur  $[0; +\infty[$
  - convexe sur  $[0; 1]$

**Exercice 72.** La courbe  $\mathcal{C}_f$  ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

Elle passe par les points  $A(1; 4e^{0,5})$ ,  $B(0; 5)$  et  $C(5; 0)$ .

Le point  $D(-3; 0)$  appartient à la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point A.

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



### Partie A - Par lecture graphique

- Quel est le signe de  $f'(1)$ ? Justifier.
- Que semble représenter le point A pour la courbe  $\mathcal{C}_f$ ?

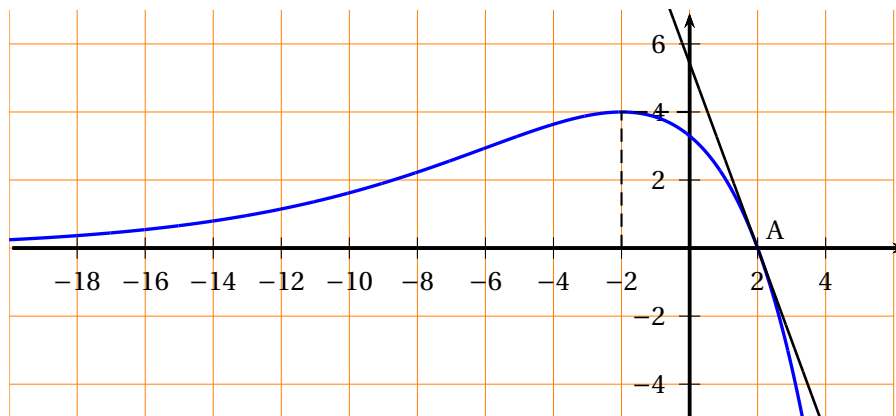
### Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (-x + 5)e^{0,5x}$  et  $f'(x) = (1,5 - 0,5x)e^{0,5x}$ .

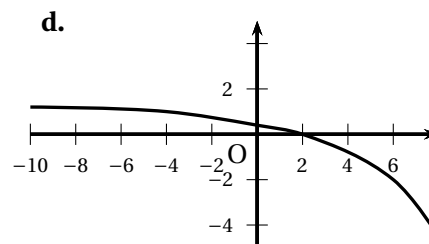
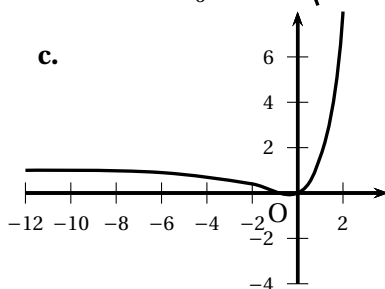
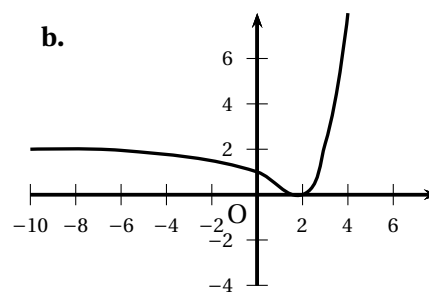
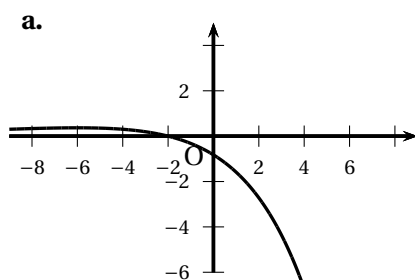
On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = 0,25(-x+1)e^{0,5x}$ .
  - Résoudre l'équation  $f''(x) = 0$ . Montrer que le point  $A$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
  - Sur quel intervalle la fonction  $f$  est-elle convexe? Justifier.
- Soit  $F$  la fonction définie, pour tout réel  $x$ , par  $F(x) = (-2x+14)e^{0,5x}$ . Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 73.** On a tracé ci-dessous la courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  ainsi que sa tangente au point  $A$  d'abscisse 2.



- Quelle est l'équation de la tangente à  $C_f$  en  $A$ ?
  - $y = -ex + 2e$
  - $y = 3x + 2e$
  - $y = ex + 3e$
  - $y = -5x + 4e$
- La fonction  $f$  est :
  - concave sur  $] -\infty ; 0]$
  - convexe sur  $] -\infty ; 0]$
  - concave sur  $[0 ; 2]$
  - convexe sur  $[0 ; 2]$
- Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction  $f$ ?



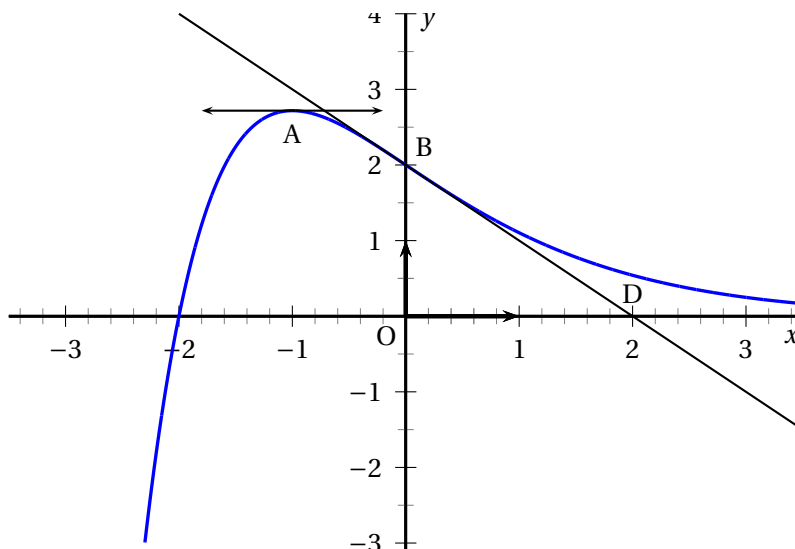
**Exercice 74.** Les parties  $A$  et  $B$  sont indépendantes.

**Partie A**

La courbe  $C$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  est donnée ci-dessous.

La courbe  $C$  passe par les points  $A(-1; e)$  et  $B(0; 2)$  où  $e = \exp(1)$ .

La tangente à la courbe  $C$  au point  $A$  est horizontale et la tangente à la courbe  $C$  au point  $B$  est la droite  $(BD)$ , où  $D$  a pour coordonnées  $(2; 0)$ .



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

*Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'équation  $f(x) = 1$  admet exactement trois solutions dans l'intervalle  $[-2; 3]$ .
2. La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[1; 3]$ .
3.  $f'(-1) = 0$ .
4.  $f'(0) = -1$ .
5.  $f'(x) \geq 0$  sur l'intervalle  $[1; 3]$ .
6. Une primitive  $F$  de la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1; 3]$ .

**Partie B**

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.

*Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation :  $0,2 \ln x - 1 \leq 0$  est l'intervalle  $[e; +\infty[$ .
2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 2 \ln x$ .  
La fonction  $g$  est convexe sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 75.** Etudier la convexité de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ . Préciser les points d'inflexions éventuels.

**Exercice 76.** Etudier la convexité de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)}$ . Préciser les points d'inflexions éventuels.

## Exercices approfondissements

**Exercice 77.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$

Démontrer que  $f$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x_0$  dans  $I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est croissante sur  $I - \{x_0\}$ .

**Exercice 78.** 1. Démontrer que si une fonction dérivable sur  $I$  est convexe alors sa dérivée est croissante sur  $I$ .

2. Démontrer que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et vérifie  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ . (Théorème de Rolle) On pourra utiliser le résultat de l'exercice 251.

3. Dédurre du théorème précédent que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . Égalité des accroissements finis.

4. Démontrer que si une fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est croissante alors  $f$  est convexe sur  $I$ .

**Exercice 79.** Inégalité de Jensen. Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ . Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \geq 2, \forall (x_i) \in I^n, \forall (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

**Exercice 80.** 1. Montrer que la fonction  $x \mapsto -\ln x$  est convexe.

2. En déduire :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

3. Démontrer que :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3, a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3, (a + b + c)^3 \geq 27abc$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

## Fiche 5

# Analyse- Fonctions

## Continuité d'une fonction

Warusfel-Vuibert- 2002

### I. Fonctions continues en un point

#### définition

**Définition 17**

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles et  $a$  un réel. On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $a$  appartient à l'ensemble de définition de  $f$  et si  $f(x)$  tend vers  $f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Définition 18**

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en  $a$  pour tout réel  $a$  appartenant à  $I$ .

**Remarque**

La notion de continuité est assez intuitive. elle se traduit par le fait que l'on affirme pouvoir tracer la courbe de  $f$  sans lever le crayon. Nous verrons que les fonctions usuelles sont presque toutes continues. **Donnons cependant un exemple de fonctions non continue.**

**Exemple**

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fonction partie entière  $x \mapsto [x]$  n'a pas de limite en  $n$  donc elle n'est pas continue en  $n$ .

#### Composition de fonctions continues

**Théorème 18**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $D$  et continue en  $a$  et une fonction  $g$  définie sur un intervalle contenant  $f(D)$  et continue en  $f(a)$  alors la fonction  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Théorème 19**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $D$  et si  $g$  est une fonction continue sur un intervalle  $J$  contenant  $f(D)$  alors la fonction  $g \circ f$  est continue sur  $D$ .

## Continuité et opérations

**Théorème 20**

Soit  $(f, g)$  un couple de fonctions définies sur un même intervalle et continues en  $a$  alors

- $f + g$  est continue en  $a$
- $fg$  est continue en  $a$
- $\lambda f$  est continue en  $a$  où  $\lambda$  est un réel
- si  $g(a) \neq 0$  alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues en  $a$ .

## Continuité des fonctions usuelles

### Fonctions polynomiales

**Théorème 21**

- Toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}$
- Toute fonction quotient de deux fonctions polynomiales est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition

### Fonctions trigonométriques usuelles

**Théorème 22**

- la fonction  $\cos$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- la fonction  $\sin$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- la fonction  $\tan = \frac{\sin x}{\cos x}$  est continue sur tout intervalle de la forme  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Fonctions faisant intervenir des radicaux

**Théorème 23**

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$

**Théorème 24**

Pour toute fonction  $f$  continue et positive, la fonction  $\sqrt{f}$  est continue.

**Théorème 25**

Pour toute fonction  $f$  continue, la fonction  $|f|$  est continue.

## Approfondissement : image d'une suite convergente par une fonction continue

### Théorème 26

Soit  $f$  une fonction continue en  $a$  et une suite  $(u_n)$  convergeant vers  $a$  dont tous les termes appartiennent à l'ensemble de définition de  $f$ . Alors la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(a)$

### Conséquence pour l'étude des suites définies par récurrence :

### Théorème 27

Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et admettant pour limite un réel  $\ell$  en lequel  $f$  est continue. Alors  $f(\ell) = \ell$ .

En général,  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et la continuité de  $f$  en  $\ell$  résulte de l'appartenance de  $\ell$  à  $I$ . ce théorème montre que les valeurs possibles de la limite de  $(u_n)$  sont à chercher parmi les **points fixes** de  $f$ . Même si l'on dans un cas où un tel point fixe est unique, il ne permet pas d'affirmer que la suite converge effectivement vers ce point fixe. Mais si, par ailleurs, on sait que la suite est convergente, par exemple en utilisant le théorème de convergence monotone, il permet de déterminer la limite.

### Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ . Puisque  $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ , la suite est définie et à valeurs positives. Une récurrence immédiate montre de plus qu'elle est majorée par 2.

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(2 - u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

Puisque  $u_n \leq 2$ , on a  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  et la suite  $(u_n)$  est croissante. Majorée par 2, elle converge vers une limite  $\ell$  qui est positive et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , on a donc  $f(\ell) = \ell$ . Cette égalité équivaut à  $\ell \geq 0$  et  $\ell^2 = \ell + 2$ . Il n'y a qu'une seule valeur possible et la suite converge vers 2.

## II. Exercices

**Exercice 81.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = a(x+1)^2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ f(x) = a^2 e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 82.** Calculer les limites en  $n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$  de  $x \mapsto \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right|$ . Cette fonction est elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

## Fiche 6

# Analyse- Fonctions

## Continuité d'une fonction sur un intervalle

Warusfel-Vuibert- 2002

### I. Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 28**

Pour toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et pour tout  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

**Théorème 29**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Théorème 30**

Pour toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$  vérifiant  $f(a)f(b) \leq 0$ , il existe au moins un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

### II. Inversion d'une fonction continue strictement monotone

Si  $f$  est strictement monotone on peut préciser le théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 31**

Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un segment  $[a, b]$  et pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

Extensions au cas d'un intervalle quelconque

**Théorème 32**

- Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $]a, b]$  et pour tout réel  $k$  compris entre  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c \in ]a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .
- Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a, b[$  et pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ , il existe un unique réel  $c \in [a, b[$  tel que  $f(c) = k$ .

- Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $]a, b[$  et pour tout réel  $k$  compris entre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , il existe un unique réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = k$ .

**Définition 19**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $A$  à valeurs dans  $B$ , où  $A$  et  $B$  sont des ensembles quelconques.

On dit que  $f$  est une bijection de  $A$  sur  $B$  si, pour tout  $y \in B$ , il existe un élément unique  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ .

La fonction qui à  $y \in B$  associe son unique antécédente  $x \in A$  est une bijection de  $B$  sur  $A$  appelée la bijection réciproque de  $f$  et notée  $f^{-1}$ . On dit parfois fonction *inverse*.

**Exemples**

- La fonction  $\exp$  est continue et strictement monotone de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ . C'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, +\infty[$ , sa bijection réciproque est appelée fonction logarithme Népérien. Son étude sera faite en Terminale.
- La fonction  $\cos$  est continue et strictement monotone de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ . C'est une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ , sa bijection réciproque est appelée fonction Arcosinus. Son étude sera faite en L1.
- La fonction  $\sin$  est continue et strictement monotone de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[-1, 1]$ . C'est une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ , sa bijection réciproque est appelée fonction Arcsinus. Son étude sera faite en L1.
- La fonction  $\tan$  est continue et strictement monotone de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ . C'est une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ , sa bijection réciproque est appelée fonction Arctangente. Son étude sera faite en L1.
- si  $n$  est un entier naturel non nul, la fonction  $x \mapsto x^n$  est continue et strictement monotone de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$ . C'est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ , sa bijection réciproque est appelée fonction racine  $n$ -ième. Son étude sera faite en L1.

**III. Fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$** **Théorème 33**

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Remarque**

Ce théorème n'est pas explicitement au programme. Cependant sa démonstration sera proposée en approfondissement.

**IV. Recherche de la solution de  $f(x) = 0$  par dichotomie**

Une fois que l'on a prouvé que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution et une seule  $\alpha$  dans  $[a, b]$ , on peut rechercher des valeurs approchées de  $\alpha$  grâce à un algorithme dit de dichotomie.

Le principe est le suivant : on calcule l'image du centre  $c$  de l'intervalle  $[a, b]$  ( $c = \frac{a+b}{2}$ ) par la fonction  $f$ . Si  $f(c) \times f(a) > 0$  alors  $\alpha$  appartient à  $[c, b]$  sinon,  $\alpha$  appartient à  $[a, c]$ . Et on recommence le procédé jusqu'à obtenir la précision voulue.

## V. Exercice

**Exercice 83.** Écrire en langage Python une fonction qui prend en argument le nom de la fonction  $f$ , les bornes de l'intervalle  $a$  et  $b$  et la précision souhaitée  $P$ , qui renvoie l'intervalle contenant la solution de l'équation  $f(x) = 0$  contenue dans l'intervalle  $[a, b]$  obtenue par l'algorithme de dichotomie et tel que cet intervalle soit le premier intervalle de la série dont la longueur est inférieure à la précision demandée.

**Exercice 84.** Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution  $\alpha$  et la localiser entre deux entiers consécutifs. Appliquer en suite l'algorithme de dichotomie pour localiser avec une précision 0,01.

1.  $x^2 + 5x = 9$
2.  $x^3 + x^2 = 7$
3.  $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$
4.  $\cos x - x = 0$

**Exercice 85.** Déterminer le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  des équations suivantes. Donner pour chaque solution un encadrement d'amplitude 0,01.

1.  $5x^3 + 8x - 1 = 0$
2.  $x^3 - 5x = 1$
3.  $x^4 = 32x - 48$

**Exercice 86.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un unique  $\alpha_n > 0$  racine du polynôme  $X^n + X^{n-1} + \dots - 1$  ; montrer que  $(\alpha_n)$  est décroissante, convergente et trouver sa limite.

## Fiche 7

# Analyse- Fonctions

## Fonction exponentielle et fonction logarithme Néperien

Terracher- 2002

### I. La fonction exponentielle. Rappels de première

#### Généralités

**Théorème 34**

Il existe une unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ . On la nomme fonction exponentielle, elle est notée  $\exp$ .

**Théorème 35**

1.  $\exp(0) = 1$
2.  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\exp'(x) = \exp(x)$
3. signe : pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x) > 0$
4. sens de variation : la fonction  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
5. convexité : la fonction  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$
6. Inégalité de convexité fondamentale : pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) \geq x + 1$ .

#### Le nombre $e$

On pose  $\exp(1) = e$ . La calculatrice donne :

$$e \approx 2,718281828.$$

#### propriétés algébriques

**Théorème 36**

Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

**Théorème 37**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  et pour tout entier relatif  $n$

- $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$
- $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$
- $\exp\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)} \quad (n \geq 1).$

Application  $\exp(n) = e^n$

**La notation  $e^x$** 

Par convention, on prolonge à  $\mathbb{R}$  l'égalité précédente valable sur  $\mathbb{Z}$  pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) = e^x$ .

**Propriétés asymptotiques****Théorème 38**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

## II. La fonction logarithme Népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . Elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ . Sa fonction réciproque, définie sur  $]0, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est appelée logarithme Népérien, on note  $\ln(x)$  le logarithme Népérien du nombre  $x$ .

**Définition 20**

La fonction logarithme Népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est notée  $\ln$ .

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in ]0, +\infty[ \end{cases} \text{ est équivalent à } \begin{cases} x = e^y \\ y \text{ réel} \end{cases}$$

**Théorème 39**

- La fonction logarithme n'est définie que pour  $x > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$
- Pour tout réel strictement positif,  $e^{\ln(x)} = x$

### Propriétés asymptotiques

**Théorème 40**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

### Propriétés algébriques

**Théorème 41**

Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ ,

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

**Théorème 42**

Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ , et pour tout entier relatif  $n$

$$\star \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\star \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\star \ln a^n = n \ln a$$

$$\star \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

**Dérivation, Variations et signe****Théorème 43**

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et vérifie :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

**Théorème 44**

une limite à connaître

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

**Théorème 45**

inégalité de convexité fondamentale :

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,

$$\ln(x) \leq x - 1$$

**Théorème 46**

Dérivée d'une composée

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un ensemble  $E$  et à **valeurs strictement positives** alors la fonction  $\ln(u)$  est dérivable sur  $E$  et on dispose de l'égalité :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

**III. logarithme décimal****Définition**

On note  $\log$  la fonction définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

## Formules à connaître

$$\forall x > 0 \quad \log'(x) = \frac{1}{x \times \ln 10}$$

$$\forall a, b > 0 \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

## IV. Exercices

**Exercice 87.** Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de  $x$ , l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1.  $\ln x$
2.  $\ln(3 - x)$
3.  $\ln(x + 2)$
4.  $\frac{1}{\ln(x^2)}$

**Exercice 88.** Simplifier.

1.  $e^{\ln 3}$
2.  $e^{-\ln 5}$
3.  $e^{\ln(\frac{1}{3})}$
4.  $\ln(e^5)$
5.  $\ln 1 + \ln e$
6.  $\ln(e^{-2})$

**Exercice 89.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme  $\ln c$  où  $c$  est un réel strictement positif.

1.  $A = \ln 7 + \ln 8$
2.  $B = \ln 20 - \ln 4$
3.  $C = -\ln 4 + \ln 28$
4.  $D = 3 \ln 2$
5.  $E = -2 \ln 4$

**Exercice 90.** Dans chacun des cas, comparer les réels  $A$  et  $B$ .

1.  $A = \ln 2 + \ln 5$  et  $B = \ln 9$
2.  $A = \ln 4$  et  $B = \ln 6 - \ln 2$
3.  $A = 3 \ln 2$  et  $B = 2 \ln 3$
4.  $A = \ln 25$  et  $B = 2 \ln 5$

**Exercice 91.** Résoudre les équations suivantes.

1.  $e^x = 2$
2.  $e^x = -5$
3.  $e^x = \frac{1}{4}$

**Exercice 92.** Résoudre les équations suivantes.

1.  $\ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
2.  $\ln x = \frac{\ln 5}{2}$
3.  $\ln x = -\ln 9$

**Exercice 93.** Résoudre les équations suivantes.

1.  $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$
2.  $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$
3.  $(\ln x)(6 - 3 \ln x) = 0$

**Exercice 94.** Résoudre les inéquations suivantes.

1.  $\ln(x) \geq 1$
2.  $\ln(x) > -2$
3.  $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$
4.  $\ln(x) < 3$

Fonction  $\ln$ 

**Exercice 95.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = \ln x$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1. 0 a un seul antécédent par  $f$ .
2. L'image de 1 par  $f$  est  $e$ .
3. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .
4. L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .
5. Il n'existe aucun réel  $x$  tel que  $\ln x > 100$ .

### Propriétés algébriques

**Exercice 96.** Calculer les nombres réels suivants.

1.  $\ln(0,5) + \ln 2$
2.  $3\ln 2 - \ln 4$
3.  $(\ln(e^3))^2$
4.  $e^{\ln 2 + \ln 3}$

**Exercice 97.** Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1.  $A = e^{2\ln 3}$
2.  $B = e^{4\ln 2}$
3.  $C = e^{-\ln 4}$
4.  $D = e^{-5\ln 2}$

**Exercice 98.** Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1.  $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$
2.  $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$
3.  $C = \frac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$
4.  $D = \frac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

**Exercice 99.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme  $\ln c$  où  $c$  est un réel strictement positif.

1.  $A = 2\ln 5 + \ln 3$
2.  $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$
3.  $C = -\ln 5 + 3\ln 2$
4.  $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

**Exercice 100.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln 2$ .

1.  $\ln 8$
2.  $\ln(\sqrt{2})$
3.  $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
4.  $3\ln 2 - \ln 16$

**Exercice 101.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln 3$ .

1.  $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$

2.  $\ln 24 - \ln 8$
3.  $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 4$
4.  $2\ln 3 - \ln 27$
5.  $\ln(9\sqrt{3})$

**Exercice 102.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln 2$  et  $\ln 5$ .

1.  $\ln 20$
2.  $\ln 100$
3.  $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$
4.  $\ln \sqrt{10}$

**Exercice 103.** Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln 3$  et  $\ln 7$ .

1.  $\ln\left(\frac{81}{7}\right)$
2.  $\ln 441$
3.  $\ln\left(\frac{49}{27}\right)$
4.  $\ln \sqrt{21}$

**Exercice 104.** On donne les encadrements suivants :

$$0,69 < \ln 2 < 0,70 \text{ et } 1,60 < \ln 5 < 1,61.$$

En déduire, sans calculatrice, les encadrements des nombres suivants.

1.  $\ln 4$
2.  $\ln(2^5)$
3.  $\ln \frac{5}{2}$
4.  $\ln \frac{16}{25}$

### Équations

**Exercice 105.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $\ln x = 2$  ;
2.  $\ln x = -1$  ;
3.  $3\ln x - 9 = 0$ .

**Exercice 106.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $\ln(x+5) = \ln 3$  ;
2.  $\ln(x^2) = \ln 9$  ;
3.  $\ln(x^2 + x) = \ln 6$ .

**Exercice 107.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $2 + 3 \ln x = 14$ ;

2.  $\ln(x^2) = \ln 9$ ;

3.  $e^{2-3x} = 5$ ;

4.  $2e^{2x} - 10 = 0$ .

**Exercice 108.** Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1 | resoudre (ln (x+3)=2)           |
|   | exp(2)-3                        |
| 2 | resoudre (ln (6-x)=ln (x-2) )   |
|   | 4                               |
| 3 | resoudre (ln (x-2) +ln (x-2)=0) |
|   | 3                               |

**Exercice 109.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $\ln(2-x) + 1 = 0$ ;

2.  $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$ ;

3.  $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$ .

**Exercice 110.** 1. Résoudre l'équation  $X^2 - 2X - 15 = 0$ .

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

(a)  $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$ ;

(b)  $(\ln x)^2 - 2 \ln x - 15 = 0$ .

**Exercice 111.** Résoudre les équations suivantes :

1.  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$  (on pourra poser  $X = e^x$ ).

2.  $2(\ln x)^2 + 5 \ln x - 3 = 0$  (on pourra poser  $X = \ln x$ ).

## Inéquations

**Exercice 112.** Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $\ln(2-3x) \geq 0$ ;

2.  $\ln(1-x) < 1$ ;

3.  $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$ .

**Exercice 113.** Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $2 \ln(x) \geq \ln(2-x)$ ;

2.  $\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln 3$ ;

3.  $\ln(4x) - \ln 2 < 2 \ln 4$ .

**Exercice 114.** Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

|   |                                          |
|---|------------------------------------------|
| 1 | resoudre (ln (3x) -2ln (x) >=0)          |
|   | (x>0)and (x<=3)                          |
| 2 | resoudre (ln (x* (x+1) ) <ln (6) )       |
|   | ( (x>(-3))and (x<(-1)), (x>0)and (x<2) ) |

**Exercice 115.** Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $e^x > 3$

2.  $e^x \leq \frac{1}{2}$

3.  $e^x < -e$

**Exercice 116.** Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $2e^x - 3 > 9$

2.  $4e^x - 1 \geq e^x + 5$

3.  $e^{2x} - 5e^x < 0$

**Exercice 117.** Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $\ln(-2x+1) \leq 0$

2.  $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$

3.  $\ln(2x-1) + 1 > 0$

**Exercice 118.** Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction  $\ln$ , déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que :

1.  $(0,7)^n \leq 10^{-2}$ ;

2.  $(1,05)^n > 10$ ;

3.  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7}$ ;

4.  $(0,98)^{n-1} < 0,6$ .

**Exercice 119.** Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de  $\frac{1}{5}$ .

Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

## Limites

**Exercice 120.** Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$

**Exercice 121.** Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} ((\ln x)^2 - 3 \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (-(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3)$

## Étude de fonction

**Exercice 122.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x$ .

- Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ , calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f$ .
- En déduire que  $f$  admet un minimum sur  $]0; +\infty[$  que l'on précisera.

**Exercice 123.** Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- $f(x) = 3x + 5 - \ln x$
- $f(x) = \ln x + x^4$
- $f(x) = \frac{1}{x} + 4 \ln x$
- $f(x) = (\ln x)(x + 1)$

**Exercice 124.** Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle  $I$  indiqué.

- $f(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x - 1}$  sur  $I = ]1; +\infty[$ .
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .
- $f(x) = (\ln x)^3$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .
- $f(x) = \sqrt{\ln x}$  sur  $I = ]1; +\infty[$ .

**Exercice 125.** Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle  $I$  indiqué.

- $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  sur  $I = ]0; 1[$

- $f(x) = (\ln x)^2 (3 - \ln x)$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- $f(x) = (2 - \ln x)(1 - \ln x)$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- $f(x) = e^{5 \ln x + 2}$  sur  $I = ]0; +\infty[$

**Exercice 126.** Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

- $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$
- $f(x) = 5x - x \ln x$
- $f(x) = \frac{3 - \ln x}{x}$

**Exercice 127.** Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I$ .

- $f(x) = 2 - 5(\ln x)^2$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- $f(x) = \frac{4}{\ln x}$  sur  $I = ]0; 1[$
- $f(x) = e^{2 \ln x - x}$  sur  $I = ]0; +\infty[$

**Exercice 128.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln x + x^2.$$

- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .
- À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$ .

**Exercice 129.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

- Montrer que  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes.
- (a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ .  
(b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  au point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
5. Construire  $\mathcal{C}$  et  $T$ .

**Exercice 130.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
(b) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale.
2. Montrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$

3. Dresser le tableau des variations de  $f$ .
4. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
5. Construire  $\mathcal{C}$  et son asymptote.

## Fonction $\ln(u)$

**Exercice 131.** Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1.  $f: x \mapsto \ln(5x-3)$
2.  $g: x \mapsto \ln(-8x+4)$
3.  $h: x \mapsto \ln(-7x)$
4.  $k: x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

**Exercice 132.** Dans chaque cas, calculer  $f'(x)$  sur l'intervalle  $I$ .

1.  $f(x) = \ln(5x-1)$ ,  $I = \left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$
2.  $f(x) = \ln(9-x^2)$ ,  $I = ]-3; 3[$
3.  $f(x) = \ln(1+e^x)$ ,  $I = \mathbb{R}$

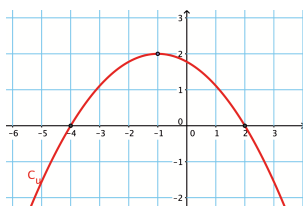
**Exercice 133.** Dans chaque cas, calculer  $f'(x)$  sur l'intervalle  $I$ .

1.  $f(x) = \ln(3x^2-5x+7)$ ,  $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \ln(9-3x)$ ,  $I = ]-\infty; 3[$
3.  $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$ ,  $I = ]-1; 5[$

**Exercice 134.** Dans chaque cas, étudier les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle  $I$ .

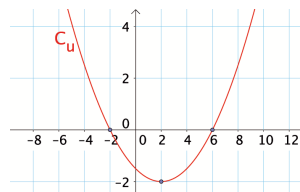
1.  $f(x) = \ln(6-2x)$ ,  $I = ]-\infty; 3[$
2.  $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$ ,  $I = \mathbb{R}$
3.  $f(x) = \ln(e^x-1)$ ,  $I = ]0; +\infty[$

**Exercice 135.** On donne ci-dessous la courbe représentative  $C_u$  d'une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $\ln(u)$ .
2. Étudier les limites de la fonction  $\ln(u)$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier le sens de variation de la fonction  $\ln(u)$ .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $\ln(u)$ .

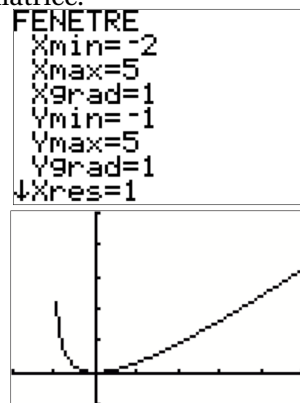
**Exercice 136.** Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la courbe suivante.



**Exercice 137.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

On a représenté ci-dessous la fonction  $f$  à l'aide d'une calculatrice.

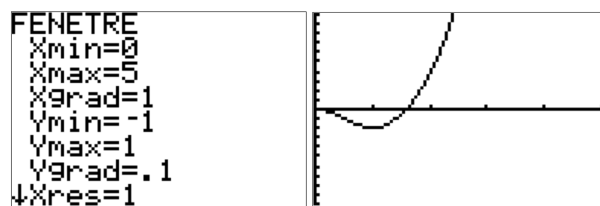


1. Conjecturer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. (a) Étudier la limite de  $f$  en  $-1$ . En donner une conséquence graphique.  
(b) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  
$$f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
  
(c) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .
4. Démontrer la conjecture établie au 1).

**Exercice 138.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2+1).$$

La courbe de  $f$  a été tracée à l'aide d'une calculatrice.



1. Conjecturer :

- (a) le sens de variation de  $f$  ;
- (b) le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. Pour tout réel  $x \in [0; 5]$ , calculer  $f'(x)$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - (a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions sur  $[0; 5]$ .
  - (b) Donner un encadrement de la solution non entière  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - (c) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

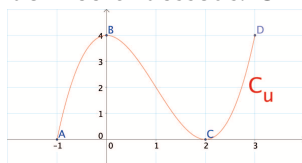
**Exercice 139.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -4 ; 4[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right).$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel  $x \in ] -4 ; 4[$ , comparer  $f(-x)$  et  $f(x)$ . En déduire que  $\mathcal{C}$  possède un élément de symétrie.
2. Étude de  $f$  sur  $[0 ; 4[$ .
  - (a) Déterminer la limite de  $f$  en 4. En donner une conséquence graphique
  - (b) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0 ; 4[$ .
  - (c) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0 ; 4[$ .
  - (d) Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 0.
  - (e) Calculer l'abscisse du point A de  $\mathcal{C}$  d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à  $10^{-2}$  près.
3. Tracer précisément la courbe  $\mathcal{C}$  en utilisant les résultats obtenus précédemment.

**Exercice 140.** Soit  $u$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[-1; 3]$  dont la représentation graphique  $\mathcal{C}_u$  est donnée ci-dessous. On note  $f$  la



fonction  $\ln(u)$ .

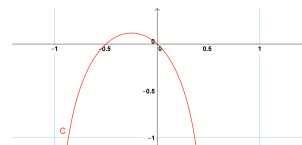
1. Justifier que  $f$  est définie sur  $] -1; 2[$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .

3. Étudier les limites de  $f$  en  $-1$  et en 2.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
5. Discuter selon les valeurs du réel  $k$ , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$ .

**Exercice 141.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; \frac{1}{2}[$  par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1).$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.



1. Résoudre l'inéquation  $f(x) > 0$ .  
Vérifier graphiquement le résultat.
2. (a) La courbe  $\mathcal{C}$  semble-t-elle admettre une tangente horizontale? Si oui, en quel point?  
(b) Démontrer cette conjecture.

## Logarithmes et suites

**Exercice 142.** En 2015, la population d'une ville compte 250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2%. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants?

**Exercice 143.** Placement Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3%. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé?

**Exercice 144.** Absorption d'un médicament Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h.

Combien de temps faut-il attendre pour que 99% du médicament ait disparu de l'organisme?

**Exercice 145.** Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que :

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9.$$

## Exercice 146. Comportement d'une suite Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \ln x.$$

1. Étudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
3. En déduire que, pour tout  $x > 1$ ,  $f(x) > 1$ .

## Étude d'une suite récurrente

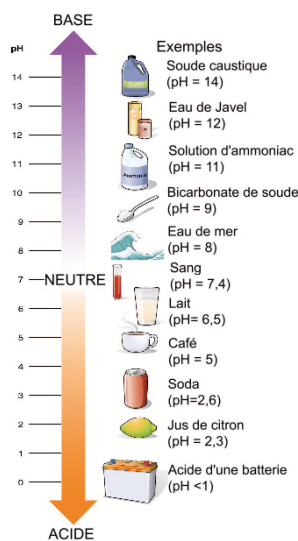
Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 1$ .
2. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et calculer sa limite.

## Logarithme décimal

**Exercice 147.** Résoudre les équations suivantes dans  $]0; +\infty[$ .

1.  $\log(x) = 1$
2.  $\log(x) = -3$
3.  $\log(x) = 5$
4.  $\log(x) = 0$



**Exercice 148.**

Le pH d'une solution en fonction de la concentration des ions oxonium est donné par la formule :  $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$  où  $[H_3O^+]$  est exprimée en moles par litres.

1. Calculer le pH d'une eau savonneuse dont la concentration en ions  $[H_3O^+]$  est de  $5 \times 10^{-10}$ .  
Cette solution est-elle acide ou basique?
2. Calculer la concentration en ions  $[H_3O^+]$  des solutions suivantes :  
(a) eau pure de pH 7;  
(b) soda de pH 2,6;  
(c) eau de mer de pH 8.
3. Comment varie la concentration en ions  $[H_3O^+]$  quand le pH augmente?

**Exercice 149.** Le niveau d'intensité sonore  $L$  (en décibels) d'un son est donnée par la formule :

$L = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$  où  $I$  est l'intensité du son (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $I_0$  le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). On prendra  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

1. Compléter le tableau suivant :

| $L$ (en dB) | $I$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) | Exemple              |
|-------------|------------------------------------------|----------------------|
| 140         |                                          | Avion au décollage   |
|             | 1                                        | Discothèque          |
| 100         |                                          | Marteau piqueur      |
|             | $10^{-4}$                                | Restaurant scolaire  |
| 60          |                                          | Salle de classe      |
|             | $10^{-5}$                                | Conversation normale |
| 20          |                                          | Vent léger           |

2. Lorsque l'intensité  $I$  double, de combien de décibels augmente  $L$  ?
3. Lorsque  $L$  augmente de 20 dB, par combien est multiplié  $I$  ?

**Histoire :** Le bel (B) et le décibel (dB) sont des unités acoustiques nommées ainsi en l'honneur du scientifique Alexander Graham Bell. Il est principalement connu pour l'invention du téléphone en 1876.

## Problèmes

**Exercice 150.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 1)$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des abscisses en deux points  $A$  et  $B$  dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer des équations des tangentes à  $\mathcal{C}$  respectivement aux points  $A$  et  $B$ .

**Exercice 151 — Carbone 14** À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années. Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique. L'âge de l'objet  $A(x)$  en années est modélisé par  $A(x) = -k \ln x$  où  $k$  est une constante et  $x$  est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.

1. La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5 730 ans. En déduire la valeur de  $k$  (arrondir à l'unité).
2. Dans la suite, on prendra  $A(x) = -8267 \ln x$ .
  - (a) Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?

Le pied de pélican (*Aporrhais pespelecani*)

(b) Quelle est la proportion en carbone 14, de la momie de Xin Zhui âgée de 2170 ans ?

Exercice 152 — Bactéries Le nombre de bactéries présentes dans une culture après  $t$  jours est donné par :

$N(t) = ae^{bt}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles.



1. Calculer  $a$  et  $b$  sachant qu'initialement, il y a 10 000 bactéries et qu'au bout de deux jours, il y a 50 000 bactéries.
2. Quel sera le nombre de bactéries au bout de 6 jours ? (arrondir à l'unité)
3. Au bout de combien de jours, la culture dépassera-t-elle 400 000 bactéries ?

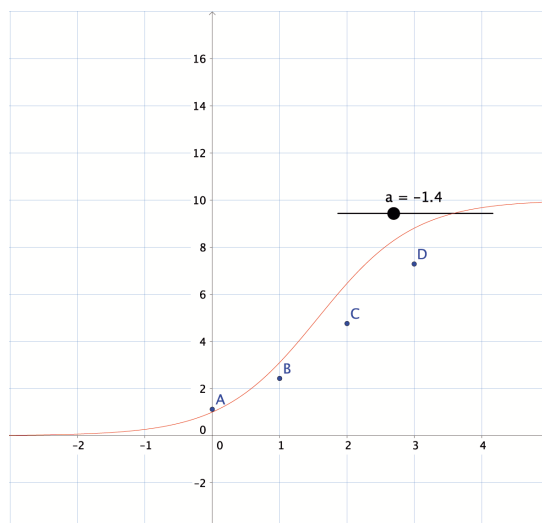
Exercice 153 — Modélisation Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants équipés d'une tablette dans un pays de 60 millions d'habitants.

| Année                  | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|------------------------|------|------|------|------|
| Effectif (en millions) | 1,12 | 2,43 | 4,76 | 7,29 |

On souhaite modéliser par une fonction cette situation.  $x$  désigne le temps, en années, écoulé depuis 2012.

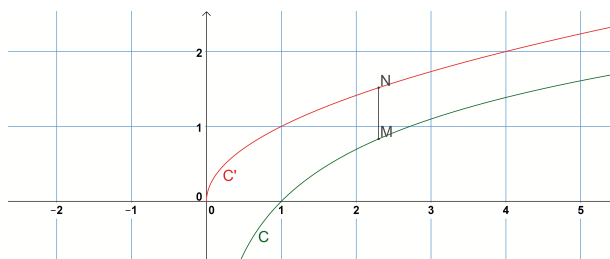
On donne  $f(x) = \frac{10}{9e^{ax} + 1}$  où  $a$  est un réel.  $f(x)$  désigne le nombre d'habitants équipés, en millions.

1. (a) À l'aide d'un logiciel, placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  issus des données statistiques. Créer un curseur  $a$  variant entre  $-5$  et  $5$  avec un incrément de  $0,1$ . Représenter la fonction  $f$ .



- (b) Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$ ,  $f$  semble-t-elle donner une modélisation satisfaisante de la situation ?
2. Dans la suite, on prend  $a = -1,08$ .
- (a) Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq 9$ . Interpréter ce résultat.
- (b) Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter ce résultat.

**Exercice 154** — Limite d'une distance Dans un repère orthogonal, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $\ln$  et la courbe  $\mathcal{C}'$  représentative de la fonction racine carrée. Soit  $x$  un réel strictement positif. On note respectivement  $M$  et  $N$  les points de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  d'abscisses  $x$ .



1. Construire cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Quelle semble être la limite de la distance  $MN$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ?
3. (a) Pour tout réel  $x > 0$ , montrer que :

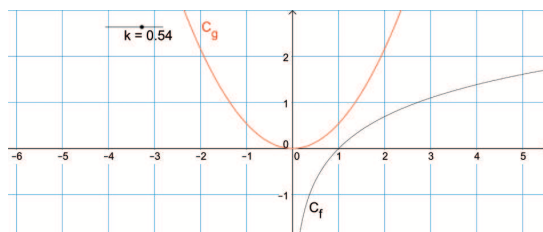
$$\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x} \left( 1 - 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right).$$

- (b) Démontrer la conjecture établie au 2.

**Exercice 155** — Nombre de solutions d'une équation Soit  $k$  un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation  $(E)$  :

$$\ln x = kx^2 \text{ avec } x > 0.$$

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur  $k$  variant de  $-2$  à  $2$  avec un incrément de  $0,01$ . Représenter les fonctions  $\ln$  et  $x \mapsto kx^2$ .



- (b) On suppose  $k > 0$ . Trouver à l'aide du logiciel, une valeur approchée de  $k$  pour laquelle l'équation (E) semble admettre une unique solution.
- (c) Conjecturer, suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de l'équation (E).
2. On suppose  $k < 0$ . Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

*D'après épreuve pratique 2007*

## Fiche 8

# Analyse- Fonctions

## Limites d'une fonction

### I. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Nous considérons des fonctions définies sur un intervalle de la forme  $[M, +\infty[$ , et nous adoptons une définition analogue à celle énoncée pour les suites.

**Définition 21**

- Soit  $\ell$  un réel, nous disons que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- Soit  $\ell$  un réel, nous disons que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est négatif et  $|x|$  est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est négatif et  $|x|$  est assez grand. Nous noterons

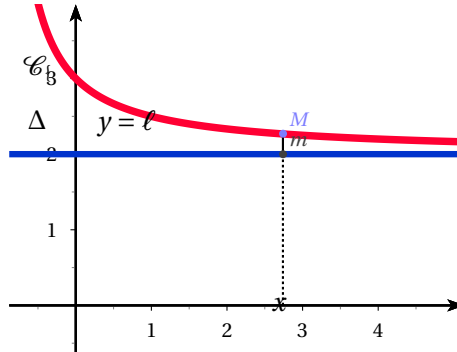
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  si tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est négatif et  $|x|$  est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

### Interprétation graphique : asymptote horizontale

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ) la distance  $Mm$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (ou vers  $-\infty$ ). On dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est une asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  (ou en  $-\infty$ ).



### limites en $+\infty$ des fonctions usuelles

Le théorème ci-dessous nous livre les limites en  $+\infty$  pour un grand nombre de fonctions usuelles.

#### Théorème 47

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :

$$x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*),$$

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}, x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto \frac{1}{x^2}, x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*),$$

**Démonstration :** Admis. □

#### Remarque

Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en  $+\infty$ . C'est le cas de la fonction sin par exemple. Résultat admis.

## II. Limite en un réel $a$

On considère une fonction définie sur un intervalle contenant  $a$  ou sur un intervalle de borne  $a$  du type  $] \dots, a[$  ou  $] a, \dots[$ .

#### Définition 22

— Soit  $\ell$  un réel, nous disons que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

— Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

### Limite à gauche et à droite en un réel $a$

#### Définition 23

- Soit  $\ell$  un réel, nous disons que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche, si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant inférieur à  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche, si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant inférieur à  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche si tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant inférieur. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- Soit  $\ell$  un réel, nous disons que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite, si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant supérieur à  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite, si tout intervalle du type  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant supérieur à  $a$ . Nous noterons

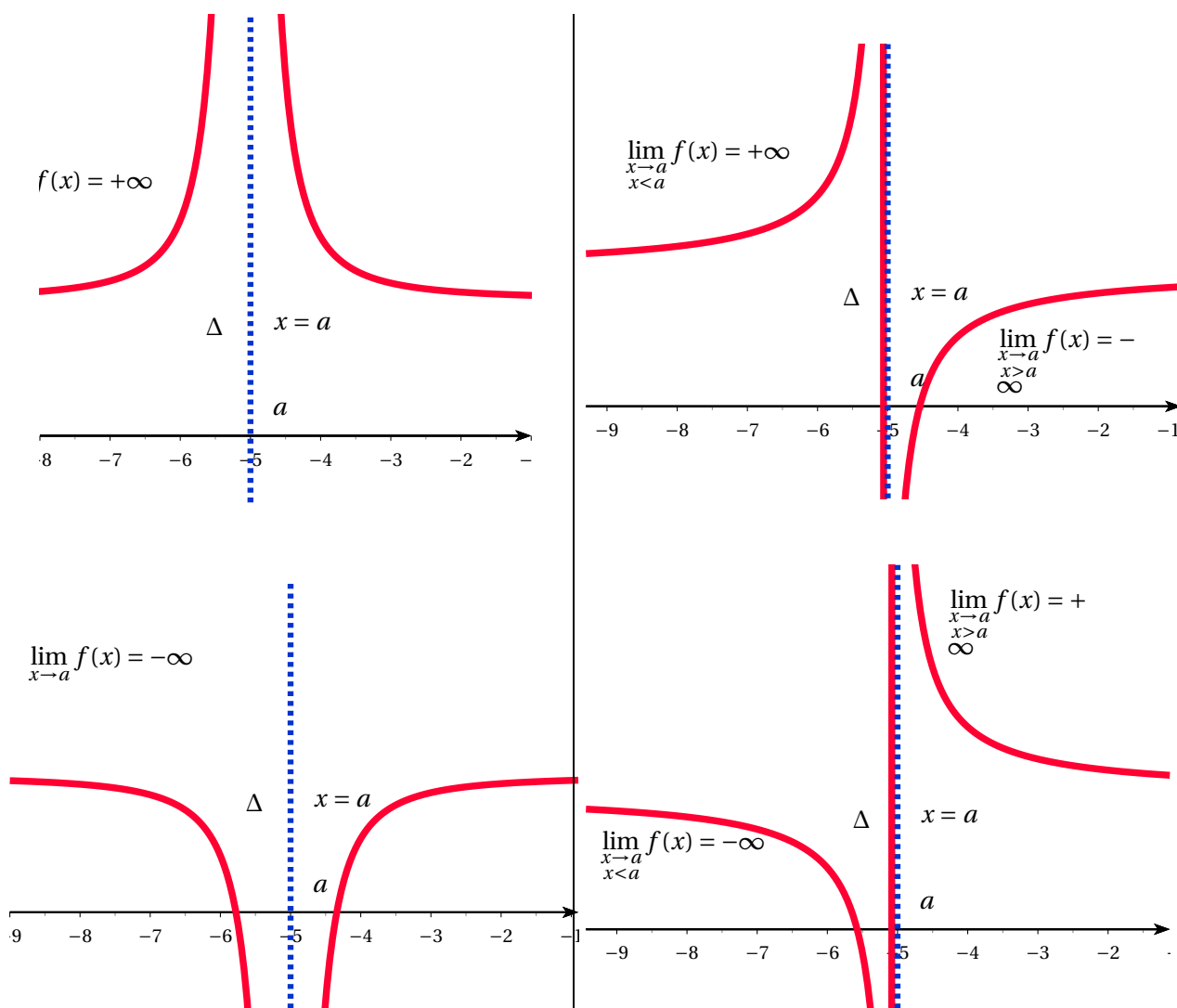
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

- Nous disons que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite si tout intervalle du type  $] -\infty, A]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  est assez voisin de  $a$  en étant supérieur à  $a$ . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

### Asymptote parallèle à $(Oy)$

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $-\infty$ , on dit que la droite d'équation  $x = a$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$ . Cette définition se généralise aux limites à gauche et limites à droites.



### Limites des fonctions usuelles en $a$

#### Théorème 48

##### — Fonction usuelle définie en $a$

Lorsque la fonction  $f$  est une fonction polynôme ou l'une des fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \cos x$ ,  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto e^x$ , ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions :

**si  $f$  est définie en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$**

##### — Fonction non définie en $a$

##### — exemples fondamentaux :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

— Si pour tout  $x \neq a$ ,  $f(x) = g(x)$  et si  $g$  est une fonction usuelle définie en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$

— On rappelle que dire que  $f$  est dérivable en  $a$  signifie que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Application :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Exemple : limite de  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}$  en 3. Soit  $x$  un nombre différent de 3,  $x^2 + 7x - 30 = (x - 3)(x + 10)$  donc  $f(x)$  se simplifie en  $f(x) = x + 10$ . Nommons  $g$  la fonction  $x \mapsto x + 10$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = g(3) = 13$ .

### III. Opérations sur les limites

Dans chaque cas, il s'agit de limites au même « point  $a$  »,  $a$  réel ou  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$  :

#### III.1. Limite d'une somme

##### Théorème 49

les fonctions  $f$  et  $g$  ayant une limite (finie ou infinie) en  $a$ , la fonction  $f + g$  admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de  $f(x) + g(x)$ .)

| $\lim f \backslash \lim g$ | $\ell'$   | $+\infty$ | $-\infty$ |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\ell$                     | $a + b$   | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$                  | $+\infty$ | $+\infty$ | ?         |
| $-\infty$                  | $-\infty$ | ?         | $-\infty$ |

#### III.2. Limite d'un produit

**Théorème 50**

les fonctions  $f$  et  $g$  ayant une limite (finie ou infinie) en  $a$ , la fonction  $f \times g$  admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de  $f(x) \times g(x)$ .)

| $\lim f \backslash \lim g$ | $\ell' = 0$ | $\ell' \neq 0$      | $+\infty$   | $-\infty$   |
|----------------------------|-------------|---------------------|-------------|-------------|
| $\ell = 0$                 | 0           | 0                   | ?           | ?           |
| $\ell \neq 0$              | 0           | $\ell \times \ell'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$                  | ?           | $\pm\infty$         | $+\infty$   | $-\infty$   |
| $-\infty$                  | ?           | $\pm\infty$         | $-\infty$   | $+\infty$   |

### III.3. Limite d'un quotient

**Théorème 51**

les fonctions  $f$  et  $g$  ayant une limite (finie ou infinie) en  $a$ , la fonction  $\frac{f}{g}$  admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .)

| $\lim f \backslash \lim g$ | 0 | $\ell' \neq 0$       | $+\infty$ | $-\infty$ |
|----------------------------|---|----------------------|-----------|-----------|
| 0                          | ? | 0                    | 0         | 0         |
| $\ell \neq 0$              | ? | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0         | 0         |
| $+\infty$                  | ? | $\pm\infty$          | ?         | ?         |
| $-\infty$                  | ? | $\pm\infty$          | ?         | ?         |

Remarque si  $\ell' = 0$  on peut conclure lorsque  $g$  garde un signe constant au voisinage de  $a$ . Si besoin, on peut séparer en une étude à gauche et droite de  $a$  lorsque cela a un sens.

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow 3} 1 - x = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^3 = 0$  et le nombre  $(x - 3)^2$  est positif au voisinage de 3, donc

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{(x - 3)^2} = -\infty$$

## IV. Exercices

**Exercice 156.** Démontrer les résultats énoncés dans le théorème donnant les limites des fonctions usuelles en  $+\infty$ .

**Exercice 157.** Est-il vrai qu'il existe  $A$  strictement positif tel que pour tout  $x$  supérieur à  $A$ ,  $-1 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$  ?

**Exercice 158.** Est-il vrai qu'il existe  $r$  strictement positif tel que pour tout  $x$  strictement positif et strictement inférieur à  $r$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}} > 100$  ?

**Exercice 159.** Est-il vrai qu'il existe  $r$  strictement positif tel que pour tout  $x$  strictement inférieur à  $r$ ,  $\frac{1}{x} > 100$  ?

**Exercice 160.** Déterminer la limite éventuelle de  $f(x)$  au point  $a$  après avoir éventuellement simplifié :

1.  $f(x) = \frac{3x^2 - 8x^3}{x^2}$  avec  $a = 0$

2.  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}$  avec  $a = -2$

3.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$  avec  $a = 0$

4.  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$  avec  $a = 3$

**Exercice 161.** Déterminer la limite éventuelle de  $f(x)$  en  $+\infty$  à l'aide des opérations sur les limites :

1.  $f(x) = 3x^3 + \sqrt{x}$

2.  $f(x) = -x - \sqrt{x}$

3.  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

4.  $f(x) = -x(x + 1)$

5.  $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x}$

6.  $f(x) = -5x\sqrt{x}$

7.  $f(x) = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$

8.  $f(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)$

9.  $f(x) = 3x^2 - x + 1$

10.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}$

**Exercice 162.** « Tout polynôme a la même limite en  $+\infty$  que son terme de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

**Exercice 163.** « Toute fraction rationnelle a la même limite en  $+\infty$  que le quotient simplifié des termes de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

## Fiche 9

# Analyse- Fonctions

## Limites d'une fonction- Théorèmes de comparaison

### I. Théorèmes de comparaisons

Les résultats ci-dessous permettent dans certains cas, de déterminer la limite lorsque  $x$  tend vers  $a$  ( $a$  fini ou infini) d'une fonction  $f$ , par comparaison à d'autres fonctions  $u, v...$  dont le comportement est connu.

#### Théorème 52

- **Théorème des « gendarmes »** : Si, pour tout  $x$  « assez voisin de  $a$  », on a l'encadrement  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ , et si  $u$  et  $v$  ont la même limite  $\ell$  en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .
- **Cas d'une limite infinie** : si pour tout  $x$  « assez voisin de  $a$  »,  $f(x) \geq u(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- **Cas d'une limite infinie** : si pour tout  $x$  « assez voisin de  $a$  »,  $f(x) \leq u(x)$ , et si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

### II. Application à connaître absolument

On démontre grâce à ce théorème le résultat suivant :

**Theorem 1.** — *Inégalité* : pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) \geq x + 1$

- *Limite de la fonction exponentielle en  $+\infty$*  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

- *Croissances comparées* :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

- *Encore plus fort* : Pour tout  $n$  entier naturel,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

**Démonstration :** — Obtention de l'inégalité : Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = \exp(x) - (x + 1)$ . Cette fonction est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée première est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi'(x) = \exp(x) - 1$  et sa dérivée seconde est  $\varphi''(x) = \exp(x)$ . Ainsi, la fonction  $\varphi''$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ . On peut donc conclure que  $\varphi'$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Or  $\varphi'(0) = 0$ , donc  $\varphi'$  est négative sur  $] -\infty, 0]$  et positive sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $\varphi$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et décroissante sur  $] -\infty, 0]$ . Le minimum de la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  est donc atteint lorsque  $x = 0$ . Or la valeur de  $\varphi$  en 0 est 0. Ainsi, pour tout  $x$  réel,  $\varphi(x) \geq 0$ . Ce qui se traduit encore par, pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) \geq x + 1$ .

— Détermination de la limite de  $\exp$  en  $+\infty$ . On vient de démontrer que, pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) \geq x + 1$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ . En utilisant, le théorème de comparaison précédent, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .

— Détermination de la limite de  $\frac{\exp(x)}{x}$  en  $+\infty$ . On sait que, pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) \geq x + 1$ . Or, pour tout  $x$  réel,  $x + 1 > x$ . Donc, pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) > x$ . En particulier, pour tout  $x$  réel strictement positif,  $\exp(x) > x$ . Soit  $x$  un réel positif, en remplaçant  $x$  par  $\frac{x}{2}$  dans l'inégalité précédente, on obtient,  $\exp\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x}{2}$ . Appliquons la fonction carrée aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient,  $\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$ . Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,  $\exp(x) > \frac{x^2}{4}$ . Divisons enfin par  $x$  qui est strictement positif,  $\frac{\exp(x)}{x} > \frac{x}{4}$ . Il ne reste plus qu'à observer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$  pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$ . Fin.

— Reprenons chaque point précédent en adaptant : soit  $x$  un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul, en remplaçant  $x$  par  $\frac{x}{n+1}$  dans l'inégalité  $\exp(x) > x$ , on obtient,  $\exp\left(\frac{x}{n+1}\right) > \frac{x}{n+1}$ . Appliquons la fonction puissance  $n+1$  aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient,  $\left(\exp\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ . Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,  $\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ . Divisons enfin par  $x^n$  qui est strictement positif,  $\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$ . Il ne reste plus qu'à observer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$  pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ . Fin.  $\square$

### III. Exercices

**Exercice 164.** Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto \cos x - 3x$

**Exercice 165.** Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

**Exercice 166.** Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto x - [x]$  où  $[x]$  est la partie entière de  $x$  c'est à dire l'unique entier  $p$  vérifiant  $p \leq x < p + 1$ .

**Exercice 167.** Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto \frac{5[x]}{x}$  où  $[x]$  est la partie entière de  $x$  c'est à dire l'unique entier  $p$  vérifiant  $p \leq x < p + 1$ .

**Exercice 168.** Représenter la fonction  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  sur l'écran de votre calculatrice. Montrer cette fonction admet une limite en 0.

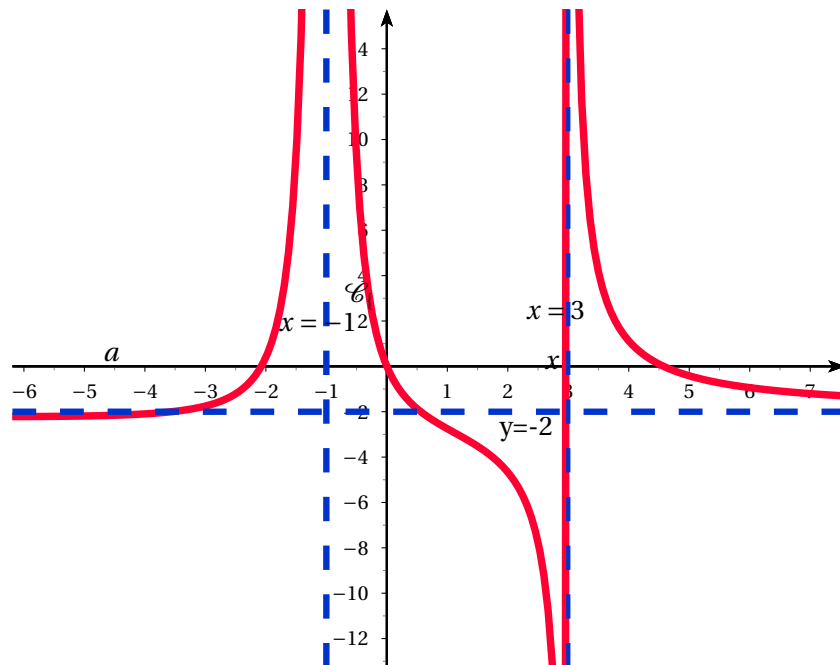
### III.1. avec l'exponentielle

**Exercice 169.** Déterminer la limite en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto e^{-x} + e^x$
2.  $g : x \mapsto \frac{3}{6 + 2e^{-x}}$
3.  $h : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
4.  $k : x \mapsto e^x - x$

### III.2. Asymptotes

**Exercice 170.** La courbe  $\mathcal{C}_f$  est la courbe représentative d'une fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ . Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition.



**Exercice 171.** Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{3}{x-2}$  | 3. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ |
| 2. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ |                              |

### III.3. Asymptote oblique

On dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ . De même, On dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ .

**Exercice 172.** Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique et étudier sa position relative par rapport à cette asymptote.

1.  $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x}$
2.  $f(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 - x$
3.  $f(x) = 3x - 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$
4.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}x - x^{-n} \ (n \geq 1)$
5.  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x}$

6.  $f(x) = \frac{8x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$
7.  $f(x) = \frac{3x^2}{2 - x}$
8.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
9.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

## Fiche 10

# Analyse- Fonctions

## Limites d'une fonction- Limite d'une fonction composée

**Théorème 53**

$a, b$  et  $\ell$  sont chacun des réels ou l'un des symboles  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,  
 si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$

**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^2 + 1} = 2 \text{ et } \lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{y} = \sqrt{2} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

**.1. Application importante : limite en  $-\infty$  de l'exponentielle****Théorème 54**

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$  où  $n \geq 1$

**Exercice 173.** Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  en  $+\infty$

2.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$  en  $+\infty$

3.  $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  en 0

4.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$  en 0

5.  $f(x) = \frac{\exp(x^2)}{x^6}$  en  $+\infty$

6.  $f(x) = \exp(-x^2)x^{100}$  en  $+\infty$

7.  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  en 0

**.2. limites en vrac**

**Exercice 174.** Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

$$1. f(x) = \frac{-8x^2 + 1}{5x^2 + x + 1} \text{ en } +\infty$$

$$2. f(x) = \frac{x(5-2x)}{x^2 + 1} \text{ en } +\infty$$

$$3. f(x) = \frac{x^n}{2x^2 + 1} \text{ en } -\infty. \text{ discuter selon les valeurs de } n$$

$$4. f(x) = x\sqrt{x} - 5x^2 \text{ en } +\infty$$

$$5. f(x) = \frac{1-3x}{x-\sqrt{x}} \text{ en } +\infty$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \text{ en } 9$$

$$7. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \text{ en } 0$$

$$8. f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} \text{ en } 2$$

$$9. f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2} \text{ en } 0$$

$$10. f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x \text{ en } +\infty$$

$$11. f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x \text{ en } -\infty$$

$$12. f(x) = x - \sqrt{x^2+1} \text{ en } +\infty$$

$$13. f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \text{ en } -\infty$$