Thème : probabilités Lois discrètes

Fiche 1

Probabilité- Révision sur les variables aléatoires de lois discrètes

Exercice 244. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$, $P(1,3<X<3,5)$.
3. Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.
4. On appelle Fonction de répartition de la variable X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
5. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 245. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
0.92	0.06	0.016	0.004

   Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.
3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 246. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité uniforme sur $\{1,2,3,4,5\}$.

1. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$, $P(1,3<X<3,5)$.
2. Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Fiche 2

Lois de probabilités discrètes- Loi Uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$

I. Introduction

La loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ est un exemple de loi de probabilité discrète, c'est à dire une loi de probabilité sur un ensemble fini ou infini "dénombrable" de nombres réels. On s'intéressera à d"autres lois de ce type dans ce chapitre. Pour chacune d'elles, on préciser :

— la loi de probabilité sur l'ensemble des valeurs

— la représentation graphique en bâtons

— La représentation de la fonction de répartition associée

— l'espérance, la variance et l'écart type

II. La loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$

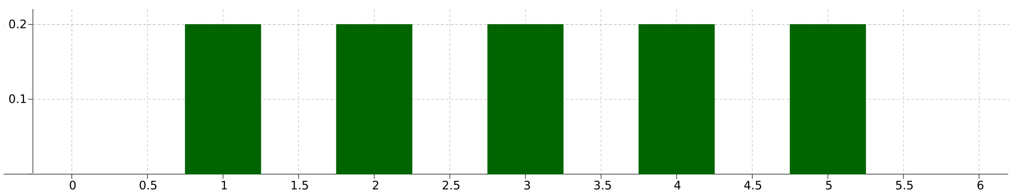
Définition 29
Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite suivre la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ si

— elle prend pour valeurs possibles les entiers de 1 à n

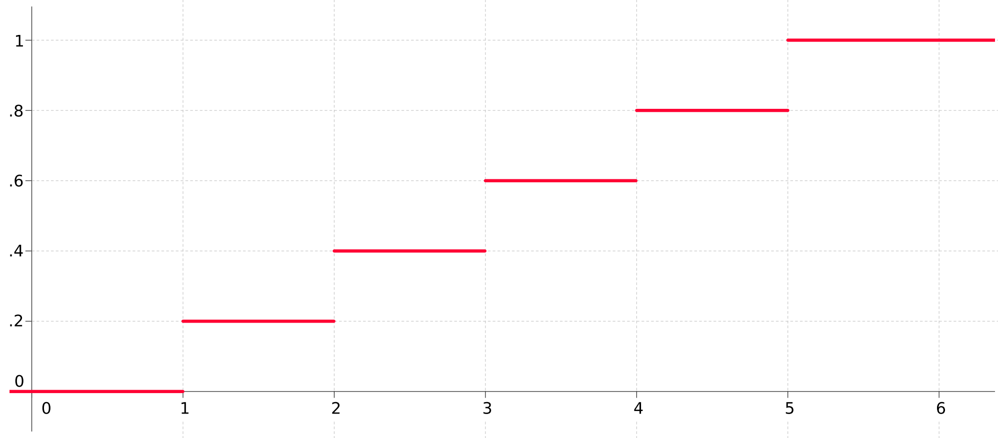
— la probabilité de prendre chacune de ces valeurs est la même :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Propriété 13
Le diagramme en barres de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ est donné par



Propriété 14
La fonction de répartition de la loi uniforme sur $\{1,2,3,...n\}$ est donné par



Propriété 15
Si X suivant la loi uniforme sur $\{1,2,3,...n\}$

$E(X)=\dfrac{n+1}{2}$	$V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$	$\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$

III. Exercices

Exercice 247. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D-E(D)|<\sigma(D))$.

Exercice 248. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X=3D+10$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X-E(X)|<\sigma(X))$.

Exercice 249. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X=D^2$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X-E(X)|<\sigma(X))$.

Exercice 250. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X=\mathrm{e}^D$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X-E(X)|<\sigma(X))$.

Exercice 251. Prouver la formule donnant l'espérance de X lorsque X suit la loi uniforme sur $\{1,2,...,n\}$.

Fiche 3

Lois de probabilités discrètes- Loi de Bernoulli de paramètre p

I. Épreuve de Bernoulli de paramètre

Définition 30
Une épreuve à deux issues l'une appelée **succès** de probabilité p et l'autre appelée **échec**, de probabilité $q = 1 - p$, est appelée épreuve de **Bernoulli**.

Exemples

— lors du lancer d'un dé équilibré, en notant succès "obtenir un 6" et échec " ne pas obtenir un 6", on définit ainsi une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

— lors du lancer d'un dé équilibré, en notant succès "ne pas obtenir un 6" et échec " obtenir un 6", on définit ainsi une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{5}{6}$.

— plus généralement si A désigne un évènement de probabilité p, en notant "succès" la réalisation de cet évènement et échec sa non réalisation, on définit une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

II. Loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 31
Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite suivre la loi de Bernoulli de paramètre p si

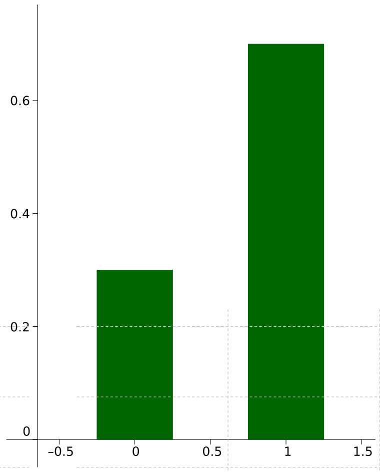
— elle prend pour valeurs possibles les entiers 0 et 1

— la probabilité de prendre chacune de ces valeurs est donnée par :

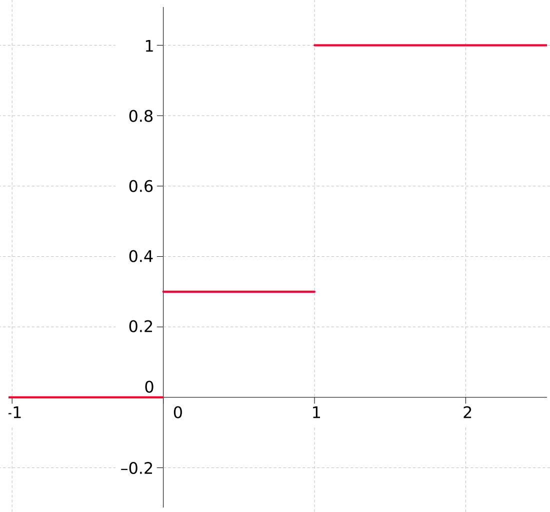
x	0	1
$P(X = x)$	q	p

où $q = 1 - p$

Propriété 16
Le diagramme en barres de la loi de Bernoulli de paramètre p est donné par



Propriété 17
La fonction de répartition de la loi de Bernoulli de paramètre p est représentée ci dessous pour $p = 0.7$



Propriété 18
de la loi de Bernoulli de paramètre p

$E(X) = p$	$V(X) = pq$	$\sigma(X) = \sqrt{pq}$

III. Exercices

Exercice 252. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D-E(D)|<\sigma(D))$.

Exercice 253. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 0 si 6 est sorti 1 sinon.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D-E(D)|<\sigma(D))$.

Exercice 254. On suppose que la variable X suit la loi de Bernoulli de variance $0,21$. On suppose que l'espérance de X est supérieure à $0,5$. Quelle est le paramètre de la loi de X ?

Exercice 255. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon. On note $X=D^2$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?

Exercice 256. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon. On note $X=\mathrm{e}^D$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?

Exercice 257. Existe-t-il une loi de Bernoulli de variance 0,26 ?

Fiche 4

Lois de probabilités discrètes- Schéma de Bernoulli- Coefficients binomiaux

I. Schéma de Bernoulli

On considère le cadre suivant : on répète n fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire.

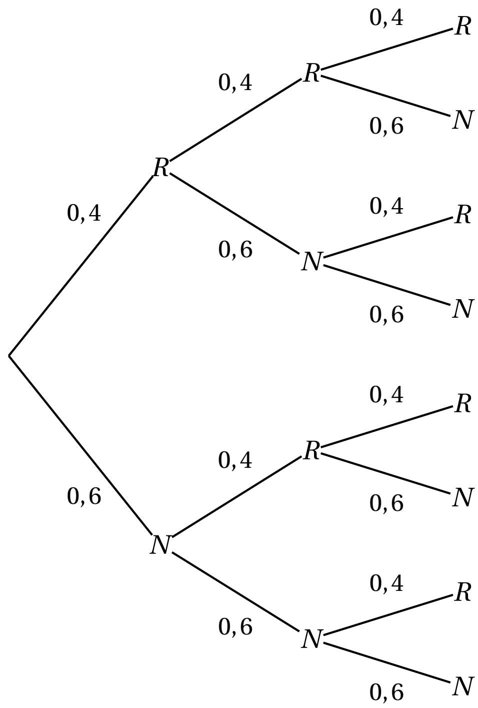
Exemple
On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges et 60 boules noires.

On effectue trois tirages successifs avec remise dans cette urne en notant à chaque fois la couleur de la boule obtenue.
Comme ce sont des tirages avec remise :

— à chaque tirage, les conditions sont identiques (il y a 100 boules dans l'urne : 40 boules rouges et 60 boules noires) ;

— les tirages sont indépendants (le résultat d'un tirage n'influence pas le suivant).

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\dfrac{40}{100} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{60}{100} = 0,6$ donc on peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.



Propriété 19
Les règles d'utilisation principales des arbres pondérés sont :

— chaque chemin de l'arbre correspond à un résultat dont la probabilité est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent le chemin ;

— la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser l'événement.

Exemple
En utilisant l'arbre précédent, déterminer :

1. La probabilité d'obtenir trois boules rouges.
2. La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire.
3. La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire.

correction

1. La probabilité d'obtenir trois boules rouges est de $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$.
2. La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire, est de $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$.
3. La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire est $0,4 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$.

II. Coefficients binomiaux

Définition 32
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
L'entier $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant « k parmi n », désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Exemple
Dans l'exemple introductif, on a un schéma de Bernoulli avec $n = 3$: comme il y a 3 chemins qui mènent à 1 succès (c'est-à-dire « obtenir une boule rouge »), on a $\binom{3}{1} = 3$.

Remarque
Par convention, on pose $\binom{0}{0} = 1$.

Propriété 20
Soit n et k des entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

— $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

— $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration : — — Il n'y a qu'un chemin qui mène à 0 succès donc $\binom{n}{0} = 1$.

— Obtenir exactement un succès lors de n épreuves se fait avec un succès (lors de la première, la deuxième, ... ou de la n^{e}épreuve) et que des échecs lors des autres épreuves : on a donc $\binom{n}{1} = n$. □

— Par symétrie, il y a autant de chemins qui mènent à k succès que de chemins qui mènent à k échecs. Or, s'il y a k échecs, il y a $n-k$ succès. Il y a donc autant de chemins qui mènent à k succès que de chemins qui mènent à $n-k$ succès et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

— On peut obtenir $k+1$ succès au bout de $n+1$ épreuves de deux façons :

  — soit on a déjà obtenu $k+1$ succès au bout de n épreuves, et on obtient un échec lors de la dernière épreuve : cela fait en tout $\binom{n}{k+1}$ chemins ;

  — soit on a obtenu k succès au bout de n épréeuves, et on obtient un succès lors de la dernière épreuve : cela fait en tout $\binom{n}{k}$ chemins.

  En tout, on dénombre ainsi $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ chemins menant à $k+1$ succès après $n+1$ épreuves.

  On a donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Remarque
Le tableau suivant donnant tous les coefficients binomiaux est appelé « **Triangle de Pascal** ». Cette égalité se traduit par une triangle, dit de Pascal, qui permet de retrouver tous les coefficients binomiaux d'une ligne à l'autre.

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

— Comme $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$, il y a des 1 dans la première colonne et la diagonale.

— Comme $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, on peut remplir chaque ligne à partir de la précédente, par exemple, on a $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ d'où $6 + 4 = 10$.

— On observe sur ce triangle que $\binom{n}{1} = n$.

III. Exercices

Exercice 258. Chaque matin, Alain passe à la boulangerie.
Une fois sur cinq, il prend deux pains au chocolat et, le reste du temps, il en prend un seul.

1. On étudie le nombre de viennoiseries qu'Alain a pris ce matin. Expliquer pourquoi on est dans la situation d'une épreuve de Bernoulli.
2. Alain paie toujours avec une pièce de 2 euros.
   On note X la variable aléatoire donnant la somme d'argent qui lui est rendue ce matin.
   Quelle loi suit X sachant qu'un pain au chocolat coûte 1 euros ?

Exercice 259. Victor joue au jeu suivant : on tire une lettre au hasard dans le mot « Mathématiques ».

— Si la lettre obtenue est une voyelle, il gagne 9 euros.

— Sinon, il perd 8 euros.

Partie 1
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Victor après une partie.

1. Expliquer pourquoi X ne suit pas la loi de Bernoulli.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Faut-il conseiller à Victor de jouer à ce jeu ?

Partie 1
Victor décide de jouer quatre parties successives.

1. Expliquer pourquoi cette expérience est un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.
2. Faire un arbre représentant la situation.
3. Déterminer la probabilité que Victor gagne les quatre parties.
4. On note Y son gain algébrique après quatre parties.
   (a) Déterminer l'espérance de Y.
   (b) Victor a-t-il intérêt à multiplier le nombre de parties ?

Exercice 260. Un élève joue aux fléchettes sur une cible du foyer de son lycée et il ne rate sa cible qu'une fois sur 25.
On suppose que tous ses tirs sont indépendants les uns des autres.

1. Déterminer la probabilité qu'il rate la cible quatre fois de suite.
2. Déterminer au bout de combien de tirs la probabilité qu'il rate au moins une fois la cible sera supérieure à $0,5$.

Exercice 261. Répondre aux questions sans calculatrice.

1. Donner $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$.
2. On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{2} = 36$.
   Donner $\binom{9}{6}$ et $\binom{9}{7}$ puis déterminer $\binom{10}{7}$.

Exercice 262. Déterminer les coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{13}{0}$
2. $\binom{15}{6}$
3. $\binom{15}{9}$
4. $\binom{18}{1}$

Fiche 5

Lois de probabilités discrètes- Loi binomiale de paramètres n et p

Définition 33
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\ p)$.

Exemple
Dans l'exemple introductif de la **partie** , on note X le nombre de boules rouges obtenues après les trois tirages.
Comme on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$ (puisque « Rouge » correspond à un succès), X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.

.1. Loi de probabilité :

Propriété 21
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\ p)$. On a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration : Quand on considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on trouve sur chaque chemin qui correspond à k succès :

— la probabilité p sur k branches

— la probabilité $1-p$ sur $n-k$ branches

donc la probabilité correspondant à chacun de ces chemins est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
Comme il y $\binom{n}{k}$ chemins, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Exemple
Soit X suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\ 0{,}3)$.
On a $P(X = 3) = \binom{4}{3} 0{,}3^3 (1-0{,}3)^{4-3} = 4 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7 = 0,0756$.

Exercice 263 — Déterminer une probabilité $P(X = k)$ à l'aide de la calculatrice La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X = k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

énoncé :

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.

Déterminer $P(X = 1)$ à l'aide de la calculatrice.

correction :

Calculatrice TI

— On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var

— On choisit `0:binomFdp(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFdp(6,0.2,1
)
              .393216
```

Calculatrice Casio

— Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bpd**.

— On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalPD(1,6,0.2)
            0.393216
```

On trouve ainsi $P(X = 1) \approx 0,393$.

Exercice 264 — Déterminer une probabilité $P(X \leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Énoncé

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,6$.

Déterminer $P(X \leqslant 5)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

— On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var

— On choisit `A:binomFRép(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFRép(7,0.6,
5)
             .8413696
```

Calculatrice Casio

— Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bcd**.

— On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalCD(5,7,0.6)
           0.8413696
```

On trouve ainsi $P(X \leqslant 5) \approx 0,841$.

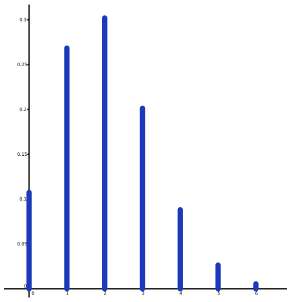
Remarque

La première propriété se « devine » de la façon suivante : pour une épreuve de Bernoulli, l'espérance d'un succès est p.

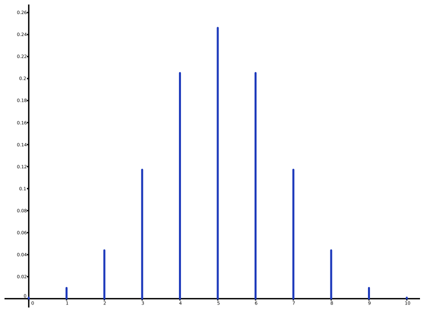
Pour une répétition de n épreuves de Bernoulli, l'espérance du nombre de succès est $n \times p$.

I. Représentation graphique de la loi binomiale

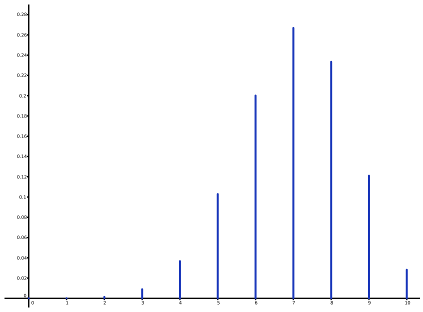
Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.2



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.5

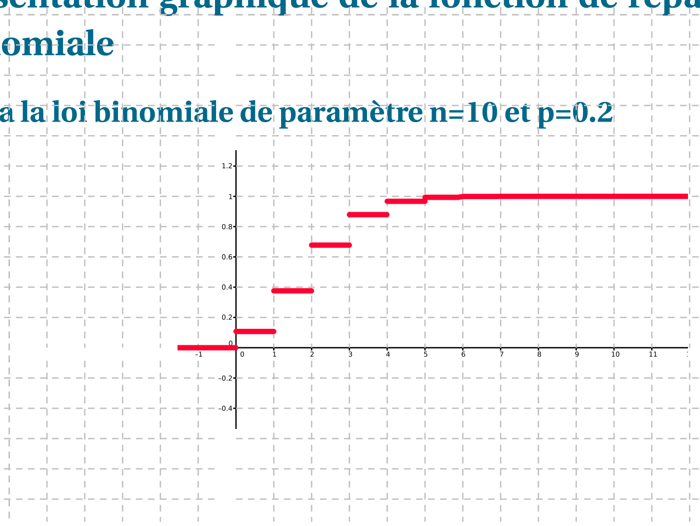


Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.7

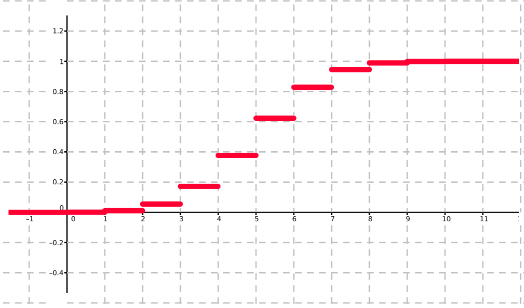


II. Représentation graphique de la fonction de répartition associée à un loi binomiale

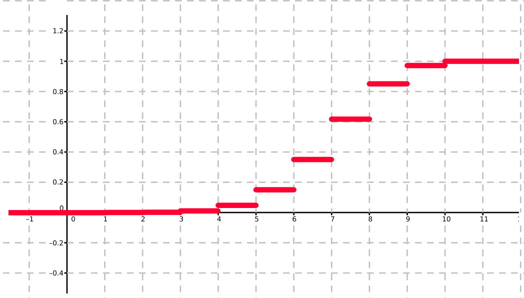
Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.2



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.5



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.7



III. Espérance, Variance et écart type

Propriété 22
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

— $E(X) = np$

— $V(X) = np(1-p)$

— $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

IV. Exercices

Exercice 265. X suit $\mathscr{B}(6\,;\,0{,}4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1. $P(X = 2)$
2. $P(X = 0)$
3. $P(X \leqslant 4)$
4. $P(X \leqslant 6)$
5. $P(X > 3)$
6. $P(X \geqslant 5)$

Exercice 266. Y suit une loi binomiale avec $P(Y \leqslant 15) = 0,65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0,875$. Déterminer :

1. $P(Y > 15)$
2. $P(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

Exercice 267. Z suit la loi $\mathscr{B}(150\,;\,0,35)$. Déterminer :

1. $P(X = 50)$
2. $P(30 \leqslant X \leqslant 50)$
3. $P(X > 40)$
4. $P(X \leqslant 50)$

Exercice 268 — Représentation graphique d'une loi binomiale
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0{,}3)$.

   (a) Tabuler $k \mapsto P(Z = k)$ sur la calculatrice.

   (b) Construire un diagramme en bâtons représentant la loi de probabilité de Z.

2. Représenter graphiquement la loi $\mathscr{B}(6\,;\,0{,}7)$.

Exercice 269. Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur. On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

   (b) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?

   (c) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?

2. Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient $0,05$.

   Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

Exercice 270. D'après des études statistiques, il naît plus de garçons que de filles en France.
Lors d'une naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de $0,51$.
Pour une famille de six enfants (on suppose qu'il n'y a pas de jumeaux), on note X la variable aléatoire donnant le nombre de filles.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la probabilité que cette famille n'ait que des garçons.
3. Déterminer la probabilité que cette famille ait autant de garçons que de filles.

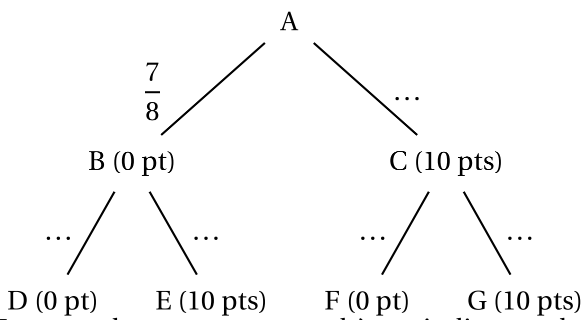
Exercice 271. Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$.
On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.
On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.
Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?
4. (a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

   (b) Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

Exercice 272 — D'après BAC Un joueur dispose d'une table inclinée où une bille, lancée d'un point A, peut suivre différents chemins. Elle rencontre plusieurs nœuds sur son chemin. À chaque fois, la probabilité qu'elle prenne le chemin de gauche est de $\frac{7}{8}$.
Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme de fraction.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. Arrondir au millième.
   (b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. Arrondir au millième.

Exercice 273. Une tombola est organisée dans une école.
La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1. Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.
   On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.
   (a) Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.
   (b) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.
2. Combien de parties peut-il espérer gagner ?

Exercice 274. Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de $0,015$ chaque jour et une réparation coûte 500 euros.
On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1. Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?
2. En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

Exercice 275. Chaque semaine, Fabienne boit un certain nombre de cafés selon ses envies.
Elle a remarqué que le nombre hebdomadaire X de cafés pris au distributeur de sa gare RER suivait une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,2$.

1. Chaque café coûte 35 centimes.
   Combien doit-elle prévoir de dépenser en moyenne chaque semaine ?
2. Cette semaine, elle décide de ne pas dépenser plus de 5 euros.
   Quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas boire autant de cafés qu'elle le souhaite ?
3. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer quel montant d'argent elle doit au minimum prévoir pour être certaine, dans 90% des cas, de pouvoir se payer tous ses cafés.

Fiche 6

Lois de probabilités discrètes-Intervalles de fluctuation d'une loi binomiale de paramètres n et p

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et a et b deux réels.

Définition 34
On dit que $[a\,;\,b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) du nombre de succès si $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 1-\alpha$.

Remarques

— Cela veut dire que si l'on réalise l'expérience, il y a une probabilité supérieure à $1-\alpha$ que le nombre de succès soit dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

— en pratique on utilisera le plus souvent les seuils 95 % et 99 %.

— Pour un seuil donné, il existe plusieurs et même une infinité d'intervalles de fluctuation.

Propriété 23
L'intervalle $[a\,;\,b]$ où :

— a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$

— b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 1-\dfrac{\alpha}{2}$

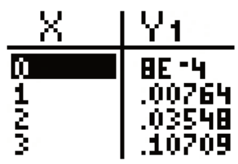
est un intervalle de fluctuation dit « centré » au seuil $1-\alpha$.

Exercice 276 — Déterminer un intervalle de fluctuation Tabuler la loi binomiale avec la calculatrice permet de déterminer a et b.
énoncé
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}3)$.
Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
correction

Calculatrice TI

— Appuyer sur f(x) puis sur 2nde et stats pour accéder au menu **distrib** et saisir `Y1=binomFRép(20,0.3,X)`.

— Tabuler la fonction :



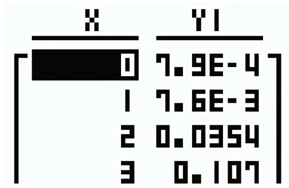
— Déterminer les valeurs de X pour lesquelles

`Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

Calculatrice CASIO

— Dans le menu **TABLE**, appuyer sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** et saisir `Y1=BinomialCD(X,20,0.3)`.

— Tabuler la fonction :



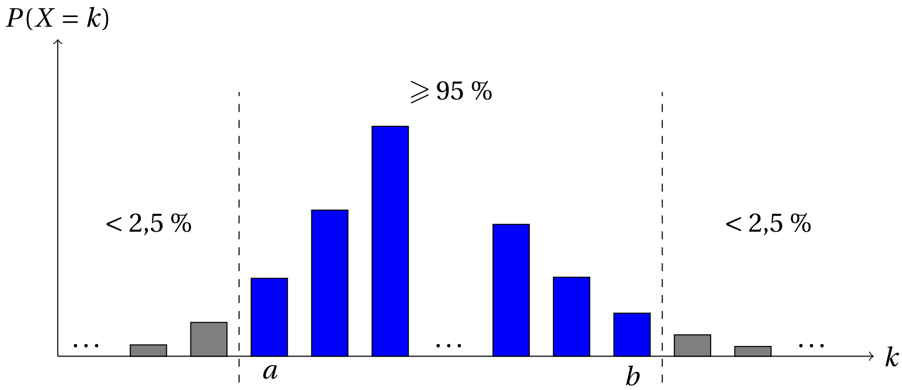
— Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

L'intervalle $[2\ ;\ 10]$ est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.

Remarques

Dans la propriété précédente :

— on peut représenter la situation par le graphique suivant où le diagramme en bâtons représente la loi binomiale :



— c'est cet intervalle que l'on donnera généralement quand on demandera de déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, même s'il en existe d'autres.

Dans la suite, l'intervalle $[a\ ;\ b]$ désigne l'intervalle de la propriété précédente.

Propriété 24
On considère la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{n}$ donnant la fréquence de succès.
L'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence.

Démonstration : On a $\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n} \Leftrightarrow a \leqslant X \leqslant b$ donc $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n}\right) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.
Comme $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$, on en déduit que $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0{,}95$.

Propriété 25
On considère une population dans laquelle la proportion d'un certain caractère est p.
Si la population est suffisamment grande, quand on prélève un échantillon de n individus, on peut considérer que le nombre d'individus ayant le caractère suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

— du nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon est $[a\ ;\ b]$;
— de la fréquence du caractère dans l'échantillon est $\left[\dfrac{a}{n}\ ;\ \dfrac{b}{n}\right]$.

Remarques

— Le fait que la population soit suffisamment grande permet d'assimiler le prélèvement d'un échantillon de taille à n à des tirages avec remise donc indépendants.

— Si, après prélèvement de l'échantillon, on observe que la fréquence est bien dans l'intervalle de fluctuation, on dit que cet échantillon est représentatif de la population, sinon, on dit qu'il ne l'est pas, au seuil de 95 %.

Exemple
Dans la population française, il y a 24,4 % de « moins de 20 ans » (source : *ined*).

1. On prélève au hasard un échantillon de 250 personnes dans la population française.
   Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des « moins de 20 ans » dans cet échantillon.
2. Dans un village de 250 habitants, la proportion de « moins de 20 ans » est 28,5 %.
   Ce village est-il représentatif de la population française sur ce critère ?

Correction

1. Comme la population française est suffisamment grande pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise, le nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $\dfrac{24,4}{100} = 0{,}244$ d'après la propriété précédente.
   — En tabulant cette loi avec la calculatrice, on obtient qu'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est $[48\ ;\ 75]$.
   — Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est donc $\left[\dfrac{48}{250}\ ;\ \dfrac{75}{250}\right]$ soit $[0{,}192\ ;\ 0{,}3]$.
2. Comme $\dfrac{28{,}5}{100} = 0{,}285 \in [0{,}192\ ;\ 0{,}3]$, ce village est représentatif de la population française.

Remarque
Si l'on avait utilisé la formule de l'intervalle de fluctuation vue en seconde, on aurait obtenu
$\left[0{,}0244 - \dfrac{1}{\sqrt{250}}\ ;\ 0{,}0244 + \dfrac{1}{\sqrt{250}}\right]$ soit approximativement $[0{,}18\ ;\ 0{,}31]$.
Ce résultat est proche de $[0{,}192\ ;\ 0{,}3]$ obtenu avec la loi binomiale : ce sera toujours le cas dans les conditions d'application de cette formule ($0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ et $n \geqslant 25$).

Exercice 277 — Rejeter ou non une hypothèse Dans une population, on peut faire l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est p puis, à l'aide d'un intervalle de fluctuation et de l'effectif ou de la fréquence dans un échantillon prélevé, choisir de rejeter ou non cette hypothèse.
énonce :
Un candidat à l'élection présidentielle affirme que 54 % de la population lui est favorable.
Lors d'un sondage réalisé sur 1 000 personnes, 523 personnes se sont déclarées favorables à ce candidat.
Peut-on rejeter ou non la proportion de 54 % donnée par le candidat, au seuil de 95 % ?
correction :

— Sous l'hypothèse que la proportion de personnes favorables au candidat est bien de 54 %, en tabulant la loi $\mathscr{B}(1000\ ;\ 0{,}54)$ avec la calculatrice, on obtient que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % dans un échantillon de taille 1000 est $[509\ ;\ 571]$.

— Le nombre de personnes favorables dans l'échantillon est 523 qui appartient bien à $[509\ ;\ 571]$ donc, au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion est de 54 %.

Remarques

— Par abus de langage, on dit parfois que l'on « accepte l'hypothèse » plutôt que l'on « ne rejette pas l'hypothèse ».

— Plutôt que dire que l'on rejette ou non une hypothèse « au seuil de 95 % », on peut aussi dire qu'on la rejette ou non « au risque d'erreur de 5 % ».

I. Exercices

Exercice 278. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,4)$.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
2. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de succès.

Exercice 279. Même exercice avec Y suivant la loi $\mathscr{B}(11\ ;\ 0,65)$.

Exercice 280. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(5\,000\ ;\ 0{,}8)$.

1. On cherche à déterminer l'intervalle $[a\ ;\ b]$ où :
   — a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$;
   — b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
   (a) Sur la calculatrice, tabuler $k \longmapsto P(X \leqslant k)$ avec un pas de 1 000.
   (b) En déduire un encadrement de a d'amplitude 1 000.
   (c) Faire de même pour b.
   (d) Affiner ces encadrements et en déduire a et b.
   (e) En déduire l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 95 %.
2. Déterminer de même l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 99 %.

Exercice 281. Même exercice que le précédent avec Y suivant le loi $\mathscr{B}(12\,487\ ;\ 0{,}71)$.

Exercice 282. 70 % des Français portent des lunettes (source : *ifop*).

1. (a) On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de porteurs de lunettes dans un échantillon de 200 Français pris au hasard.
   Quelle loi suit X ? Justifier.
   (b) En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de porteurs de lunettes dans cet échantillon puis de la fréquence correspondante.
   (c) Déterminer l'intervalle de fluctuation de cette fréquence vu en seconde et le comparer avec le précédent.
2. On se place dans une rue piétonne dans laquelle, sur 200 passants, 146 portent des lunettes.
   Cette rue est-elle représentative de la population sur ce critère ?

Exercice 283. En 2012, 43 % des Français n'ont lu aucun livre.

1. En utilisant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des personnes n'ayant pas lu de livre en 2012, dans un échantillon de taille 853.
2. Dans un lycée de 853 élèves, 23 élèves ont déclaré ne pas avoir lu de livre en 2012.
   Ce lycée est-il représentatif de la population ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 284. Dans une promotion de 123 étudiants en mathématiques, 7 ont déclaré ne pas pratiquer d'activité sportive régulière.
Cette promotion est-elle représentative de la population globale des étudiants dans laquelle 22 % des individus ont une activité sportive régulière ?

Exercice 285. Au poker Texas Hold'em, au début de chaque main, chaque joueur reçoit deux cartes.
La probabilité d'obtenir une « paire servie », c'est-à-dire deux as, deux rois, deux dames, etc., est de 5,88 %.
Lors d'une partie, Bertrand, qui a joué 120 mains et a obtenu 4 paires servies, se plaint d'avoir été particulièrement malchanceux.
Que peut-on en penser ?

Exercice 286. Dans la population brésilienne, la proportion de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux est d'environ 1 %.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux, au Brésil, dans un échantillon de taille 6 170 (arrondir les bornes à 10^{-4} près).
2. Une étude portant sur la ville de Cândido Godói entre 1959 et 2008 montre que, sur 6 170 grossesses, 92 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
   La ville de Cândido Godói est-elle représentative de la population brésilienne sur ce critère ?
3. Dans cette même étude, on observe que dans le quartier de Linha Natal, sur 333 grossesses, 5 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
   Ce quartier est-il représentatif de la ville sur ce critère ? Pour répondre, on admettra que le nombre de grossesses à Cândido Godói entre 1959 et 2008 est suffisamment grand pour assimiler ces 333 grossesses à des tirages identiques avec remise.

Exercice 287. Sur un flacon de shampooing, on peut lire : « 97 % de taux de satisfaction ».

1. Sous cette hypothèse, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des clients satisfaits dans un échantillon de 200 clients.
2. Un supermarché mène une étude sur 200 clients et obtient 190 clients satisfaits par le shampooing.
   (a) Quel est la fréquence des clients satisfaits dans cet échantillon ?
   (b) Doit-on rejeter ou non l'affirmation du fabricant de shampooing au seuil de 95 % ?

Exercice 288. Un habitant du sud de la France affirme que dans sa ville, il y a du soleil « 90 % du temps ».

1. On considère le tableau ci-contre où X suit la loi $\mathscr{B}(365\ ;\ 0{,}9)$.
   En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jours de soleil dans cette ville, sous l'hypothèse qu'il y ait du soleil 90 % du temps.
2. L'année dernière, il y a eu du soleil 325 jours.
   Doit-on rejeter ou non l'affirmation de cet habitant au seuil de 95 % ?

k	$P(X \leqslant k)$
315	0,014
316	0,021
317	0,031
318	0,044
319	0,062
...	...
338	0,964
339	0,977
340	0,986
341	0,991
342	0,995

Exercice 289. Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :

— l'entreprise Savamal dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;

— l'entreprise Cébon dans laquelle 459 des 1027 employés sont des femmes.

Cette association peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 % que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ? Argumenter.

Exercice 290. En 2012, 29 % des français possédaient un smartphone.
D'après une étude réalisée en 2013 par le Credoc, et portant sur 2 215 personnes, ce nombre est passé à 39 %.

Peut-on affirmer au seuil de 99 % que le pourcentage de français équipés d'un smartphone n'est plus de 29 % ?

Exercice 291. Dans une imprimerie, la proportion des journaux imprimés qui présentent un défaut est de 1,2 %.
L'imprimeur décide de changer ses presses puis prélève 900 journaux dont 6 présentent un défaut. Peut-on affirmer au seuil de confiance de 95% que la proportion de journaux présentant des défauts a changé ?

Exercice 292. Un fabricant de tickets de jeux à gratter affirme que 40 % de ses tickets sont gagnants.
Djanany achète 10 de ces tickets.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de tickets gagnants dans cet échantillon sous l'hypothèse que le fabricant dise la vérité.
2. Parmi les 10 tickets, 1 seul est gagnant. Djanany peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 %, que le fabricant ment sur la proportion de tickets gagnants.
3. (a) Même question si elle avait obtenu 8 tickets gagnants.
   (b) En quoi la situation serait-elle alors paradoxale ?
4. (a) Donner le meilleur (c'est-à-dire le plus petit) intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la forme $[a\,;\,10]$.
   (b) Reprendre la question 2 avec cet intervalle et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 293 — Discrimination ? Dans le système judiciaire américain, lors de la constitution d'un jury, les procureurs ont le droit d'exclure des jurés potentiels sans justification.
De 1973 à 1990, dans le district judiciaire de Chattahoochee en Géorgie, les procureurs de l'État ont utilisé 83 % de ces droits d'exclusion contre des jurés afro-américains bien que ceux-ci constituent 34 % de la population locale.

En conséquence, sur 10 jurys jugeant des afro-américains risquant la peine de mort, 6 n'en contenaient aucun (source : *The associated press-Stephen B. Bright*).

1. Sachant qu'un jury est constitué de 12 jurés, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jurés afro-américains dans un jury.
2. (a) Plus précisément, quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun juré afro-américain dans un jury ?
   (b) Quelle est la probabilité que, sur 10 jurys choisis en toute indépendance, au moins la moitié ne contiennent pas de juré afro-américain ? Conclure.

Exercice 294 — D'après BAC 39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1. (a) Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
   (b) Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
   (c) On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.
2. On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34 % sont du groupe A+.
   Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

Exercice 295 — D'après BAC En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que 10 % de la population française présente à la naissance une malformation cardiaque de type anévrisme.
Elle décide alors de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème d'anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. (a) Définir la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer $P(X = 35)$.

(c) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

2. (a) On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

(b) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Que peut-on en penser ?

Fiche 7

Lois de probabilités discrètes-Loi géométrique

I. Définition

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est notée p. On choisit comme univers l'ensemble Ω des suites infinies de termes choisis dans $\{"S", "E"\}$. On remarque que Ω est un ensemble infini. On définit sur Ω la fonction X (dont on admettra qu'il s'agit d'une variable aléatoire) qui à chaque suite associe le rang du premier succès.

Définition 35
La loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier succès lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli dans des conditions indépendantes est appelée loi géométrique de paramètre p. Elle est notée $\mathscr{G}(p)$.

Exemples

— La loi du rang du premier lancer donnant un 6, lors de lancers successifs d'un dé équilibré suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

— La loi du rang du premier lancer donnant PILE, lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

II. Loi de probabilité

Propriété 26
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et k un entier non nul,

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$$

$$P(X > k) = (1-p)^{k}$$

$$P(X \leqslant k) = 1-(1-p)^{k}$$

Démonstration : En classe. □

III. Espérance et variance

Propriété 27
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et k un entier non nul,

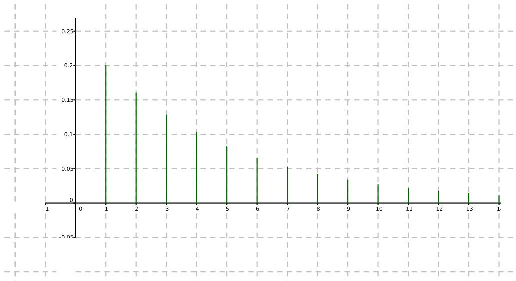
$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

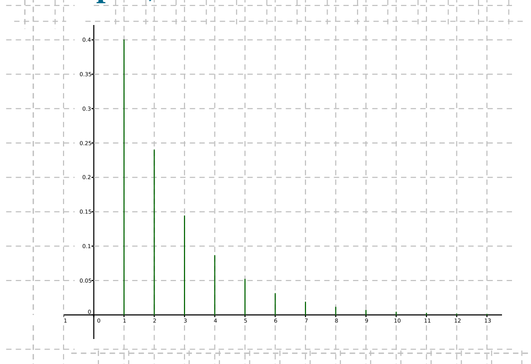
Démonstration : En classe. □

IV. Représentation graphique de la loi de probabilité d'une loi géométrique

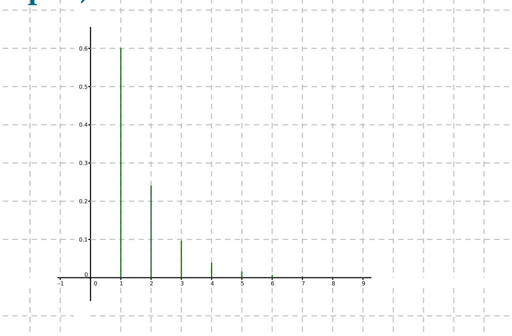
Loi géométrique de paramètre p=0,2



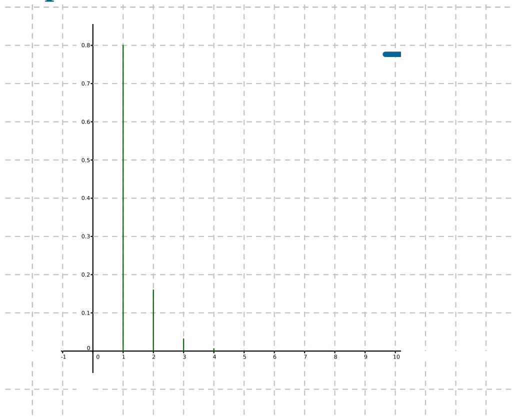
Loi géométrique de paramètre p=0,4



Loi géométrique de paramètre p=0,6

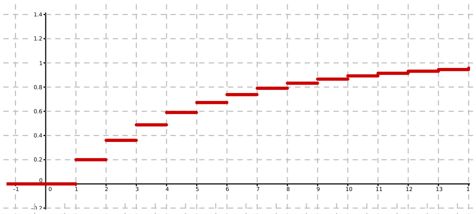


Loi géométrique de paramètre p=0,8

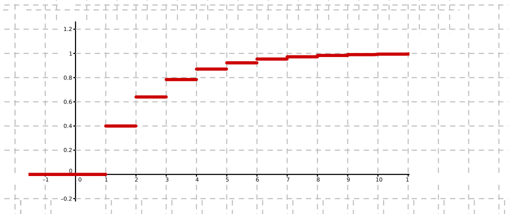


V. Représentation graphique de la fonction de répartition d'une loi géométrique

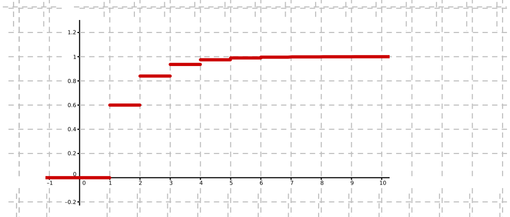
Loi géométrique de paramètre p=0,2



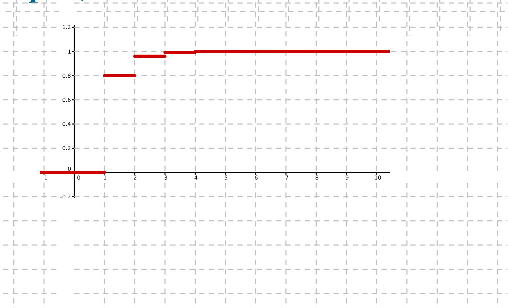
Loi géométrique de paramètre p=0,4



Loi géométrique de paramètre p=0,6



Loi géométrique de paramètre p=0,8



VI. Non vieillissement d'une loi géométrique

Propriété 28
Si X suit une loi géométrique, on a $P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{N}^*$ $P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$ alors la variable X suit une loi géométrique

Démonstration : Ensemble. □

Exemple
Sachant qu'au lancer 10, Pile n'est pas sorti, quelle est la probabilité que Pile ne sorte pas avant le 15-ième lancer ? En utilisant la propriété de non vieillissement, cette probabilité est également la probabilité que Pile ne sorte pas avant le 5-ième lancer,ou encore que le rang du premier pile est au moins 5, donc strictement supérieur à 4, soit $(1-p)^4$ soit $1/16$.

VII. Exercices

Exercice 296. On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est 0,2 et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir Face pour la première fois.

1. Justifier que F suit la loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir Face.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir Face.
4. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais au moins pour obtenir Face.
5. Combien de lancers en moyenne pour obtenir face ?

Exercice 297. On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est p et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir Face pour la première fois.

1. Justifier que F suit la loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir Face.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir Face.
4. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais au moins pour obtenir Face.
5. Combien de lancers en moyenne pour obtenir face ?

D'autres viendront...