Thème : probabilités Lois à densité

Fiche 1

Lois de probabilités à densité-Activité

I. [Vers la loi uniforme

[Avec une calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\ ;\ 1[$:

Calculatrice TI
On appuie sur la touche math puis on choisit **PRB** et **NbrAléat**.

Calculatrice Casio
On appuie sur OPTN puis on choisit **PROB**, **Rand** et **Ran#**.

1. Combien y a-t-il de nombres avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\ ;\ 1[$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0,123 456 789 0 ?

[Avec le tableur

On utilise le tableur et la commande « =ALEA() » qui donne un nombre aléatoire (avec 15 décimales) pour réaliser une simulation de 5 000 nombres dans $[0\ ;\ 1[$.
Dans la copie d'écran ci-dessous, on présente des relevés de cette simulation.

E3 =NB.SI($A1:$A5000;"<0,2")-NB.SI($A1:$A5000;"<0,1")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,502668082421260										
2	0,366299904640073		Classe	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,4[	[0,4;0,6[	[0,6;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[	Total
3	0,803212003060794		Effectif	512	493	982	1025	969	528	491	5000
4	0,540163650044041		fréquence	0,1024	0,0986	0,1964	0,2050	0,1938	0,1056	0,0982	1
5	0,769655100151884										
6	0,005502001771556										

1. Comment semblent être les fréquences observées pour des classes de même amplitude ?
2. Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0{,}1\ ;\ 0{,}2[$?
3. Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0{,}6\ ;\ 0{,}9[$?

Un peu de réflexion

On choisit un nombre réel au hasard dans $[0\ ;\ 1]$ (sans se préoccuper du nombre de décimales).

1. Que peut-on penser de la probabilité de tomber exactement sur 0,4 ?
2. Que peut-on penser de la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 0,5 ?

UAvec une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x)=1$.

1. Montrer que cette fonction est une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f.
   (a) Déterminer $P(X=0{,}4)$.
   (b) Déterminer $P(X>0{,}5)$.

On admet que le choix d'un nombre au hasard dans $[0\,;\,1]$ peut-être modélisé par une variable aléatoire suivant la loi de densité f définie dans la partie D de l'activité.
On dit que la variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

Entre deux et 5

On considère une variable aléatoire Y donnant un nombre aléatoire sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.

1. Déterminer $P(2{,}5\leqslant Y\leqslant 4)$ puis $P(c\leqslant Y\leqslant d)$ pour $c\leqslant d$ dans $[2\,;\,5]$.
2. En déduire la fonction de densité de Y.

Fiche 2

Lois de probabilités à densité

I. Variables aléatoires à densité

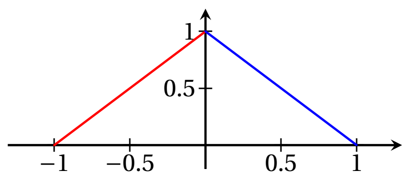
Exemple
Dans une bouteille vide de contenance 1,5 litres, on verse une quantité au hasard d'eau. On considère la variable aléatoire X égale à ce volume d'eau en litres. Cette quantité peut être égale à n'importe quel nombre de l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.
Cela signifie que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.

Remarque
Jusqu'à présent on a travaillé avec des variables aléatoires **discrètes** qui prennent un nombre fini de valeurs et leur loi est soit connue (binomiale ou Bernoulli), soit présentable sous la forme d'un tableau. Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire prend une infinité de valeurs et toutes ces valeurs sont dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 36
Si une fonction f définie sur un intervalle I est continue et positive sur I et si l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1 (unité d'aire) alors on dit que f est une **fonction de densité**(ou une **densité de probabilité**).

Exemple
On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par

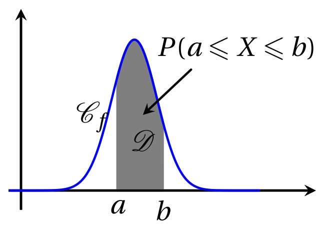
$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in [-1;0[\\ -x+1 \text{ si } x \in [0;1] \end{cases}.$$



La fonction f est positive et continue sur $[-1;1]$. De plus, le domaine entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-1;1]$ est un triangle d'aire $\dfrac{2\times 1}{2} = 1$: la fonction f est donc une fonction de densité.

Définition 37
Soit f une fonction de densité sur un intervalle I.

Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie que pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans I on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = \text{aire}(\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques
— On dit alors que X est une **variable aléatoire à densité**.

— La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car $P(X = c) = \int_c^c f(t)\,dt = 0$.
Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilités : par exemple $P(1 < X \leqslant 3) = P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

— La fonction de répartition F $x \mapsto P(X \leqslant x)$ d'une variable aléatoire dont la loi est à densité est une fonction continue, croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est f.

II. exercices

Exercice 298. Parmi les exemples, donner ceux que l'on peut modéliser à l'aide d'une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle et, le cas échéant, indiquer cet intervalle.

1. On étudie le temps d'attente à l'accueil d'un standard téléphonique.
2. On lance un dé à 12 faces et on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 10, on perd 2 euros sinon.
   On étudie le gain obtenu.
3. En Europe, on estime qu'il y a 30 % de personnes myopes. On choisit au hasard un groupe de 50 personnes au hasard.
   On étudie le nombre de personnes myopes dans ce groupe.
4. On étudie la taille des élèves d'un collège.
5. On étudie le temps avant qu'une voiture rouge passe à un carrefour.

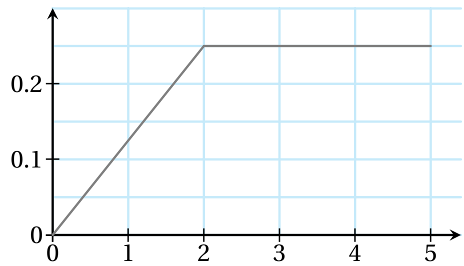
Exercice 299. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$.

1. Montrer que f est une fonction de densité sur $[0 ; 2]$.
2. Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$
   (b) $P(X \leqslant 1)$
   (c) $P(X > 1)$
   (d) $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$
3. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
4. Calculer $F(1,5) - F(0,5)$ et interpréter en terme de probabilités.

Exercice 300. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = ax^2$.

1. Déterminer la valeur de a telle que f soit une fonction de densité sur $[0 ; 1]$.
2. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f pour la valeur de a trouvée à la question précédente. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$
   (b) $P(X \leqslant 0{,}1)$
   (c) $P(X < 0{,}5)$
   (d) $P_{(X \geqslant 0{,}5)}(X \geqslant 0{,}1)$
3. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
4. Calculer $F(0)$ et interpréter en terme de probabilités.
5. Calculer $F(1,5) - F(0,5)$ et interpréter en terme de probabilités.

Exercice 301. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0 ; 5]$ est représentée
ci-dessous :

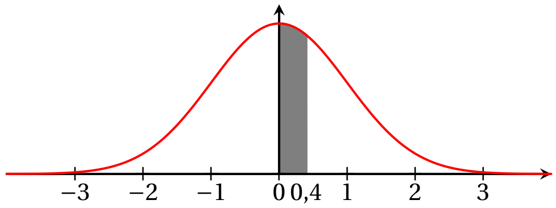


Déterminer :

1. $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$
2. $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$
3. $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$
4. $P(X < 3)$

Tracer l'allure de la fonction de répartition.

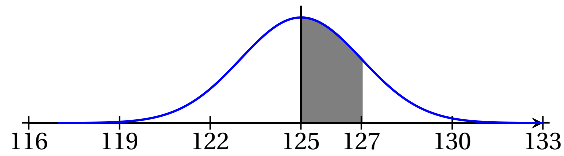
Exercice 302. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.
Donner une valeur approchée de :

1. $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0)$
2. $P(X > 0{,}4)$
3. $P(X \leqslant 0{,}4)$
4. $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

Exercice 303. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0{,}341$.
Donner une valeur approchée de :

1. $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$
2. $P(X > 125)$
3. $P(X \leqslant 123)$
4. $P(127 \leqslant X)$

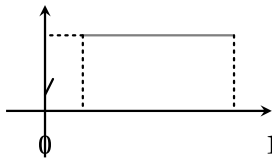
Tracer l'allure de la fonction de répartition.

Fiche 3

Lois de probabilités à densité

I. Loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$

Définition 38
Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur [0 ; 1]** si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur par $f(x) = 1$ si $x \in [0\ ;\ 1]$, 0 sinon.



« X suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{U}([0\ ;\ 1])$ ».

Propriété 29
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ et $[c\ ;\ d]$ un intervalle inclus dans $[0\ ;\ 1]$. Alors on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = d - c$.

Démonstration : X admet pour densité $f : t \mapsto 1$ sur $[0\ ;\ 1]$.
Donc on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = [1]_c^d = d - c$. □

II. Fonction de répartition

Propriété 30
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ alors la fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 0$ si $x < 0$, x si $x \in [0\ ;\ 1]$, et 1 si $x > 1$.

III. Espérance et Variance

Propriété 31
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors $E(X) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration : On a $E(X) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2 - 0^2}{2}$
$= \frac{1}{2}$. □

Propriété 32
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$ de densité f et on appelle variance mathématique de X le nombre $V(X) = \int_0^1 (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors $V(X) = \frac{1}{12}$.

IV. Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

Définition 30
Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur [*a* ; *b*]** si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur par $f(x) = \frac{x - a}{b - a}$ si $x \in [a\,;\,b]$, 0 sinon.

Propriété 33
- Si X est une variable aléatoire X suivant **la loi uniforme sur [*a* ; *b*]** alors la variable $U = \frac{X - a}{b - a}$ suit la loi uniforme $[0\,;\,1]$.
- Si U suit la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$ alors si a et b sont des réels avec $a < b$ la variable $X = a + (b - a)U$ suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

Propriété 34
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$
On a alors
- $E(X) = \frac{a + b}{2}$,
- $V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$.

Exemple (Calculer une probabilité et une espérance pour une loi uniforme)
On utilise les différentes formules des propriétés ou on calcule à l'aide de la fonction de densité et des intégrales.

Enoncé Armand et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[17\,;\,18]$.

1. Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?

2. À quelle heure leurs parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

Correction

1. Sous forme décimale, 17h15= 17,25h puis $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \dfrac{17{,}25-17}{18-17} = 0{,}25$.
2. On a $E(X) = \dfrac{17+18}{2} = 17{,}5$ donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

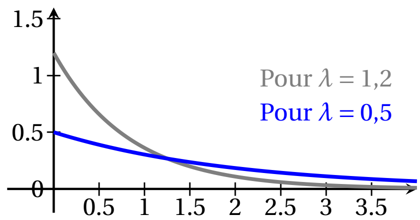
Remarque
Pour la question de l'exemple, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{18-17} = 1$ sur $[17\,;\,18]$ est la fonction de densité de X, on aurait aussi pu calculer $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \displaystyle\int_{17}^{17{,}25} 1\,\mathrm{d}t = [t]_{17}^{17{,}25} = 17{,}25 - 17 = 0{,}25$.

Fiche 4

Lois de probabilités à densité -Loi exponentielle

I. Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

Définition 41
Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.



« X suit la loi exponentielle de paramètre λ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ ».

Propriété 35
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs. On a alors :
- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

Démonstration :
- Pour tous réels c et d positifs, on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_c^d$
$= -\mathrm{e}^{-\lambda d} - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda c}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.
- En prenant $c = 0$ et $d = a$ dans le résultat précédent, on trouve
$P(X \leqslant a) = P(0 \leqslant X \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 0} - \mathrm{e}^{-\lambda a} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
- On a $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$. □

Propriété 36
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration : La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Posons alors pour tout réel t positif $g(t) = t f(t) = t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$: il s'agit alors de connaître une primitive de g pour calculer l'intégrale. On va utiliser la technique de l'équation différentielle. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sa dérivée vérifie : $g'(t) = f(t) + t \times f'(t)$.
Or $f'(t) = -\lambda f(t)$ donc $g'(t) = f(t) - t \times \lambda f(t)$. Ainsi : $g'(t) = f(t) - \lambda g(t)$.Soit x un réel positif, en intégrant sur $[0, x]$, on obtient : $\displaystyle\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \lambda \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$. Ainsi $g(x) - g(0) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) -$

$\lambda \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ donc $\lambda \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = -g(x) + g(0) + 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ Donc $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}$ On a donc $E(X) = \lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.
Comme $\lambda > 0$, $\lim_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$:

— par composition, on a $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.

— par composition et croissance comparée, on a $\lim_{x\to+\infty} -\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$. □

Finalement, on obtient bien $E(X) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.

Exemple (Calculer avec une loi exponentielle)
exo On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.
2. Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.
3. Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

correction

1. On calcule $P(0 \leqslant T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,2\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$.
2. On calcule $P(T \geqslant 10) = \mathrm{e}^{-0,2\times 10} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0,135$.
3. $E(T) = \frac{1}{0,2} = 5$ donc le client peut espérer attendre 5 minutes.

Remarque
Dans le cas de la première probabilité, un calcul d'intégrale était envisageable : la fonction de densité de T est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$.
La probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes est donc :
$P(0 \leqslant T \leqslant 5) = \int_0^5 0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^5 = -\mathrm{e}^{-0,2\times 5} - \left(-\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$.

Exemple (Déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle)
Dans les cas où une information (probabilité ou espérance) peut être exploitée, on pose l'équation issue des formules du cours et on résout cette équation pour déterminer λ.
exo
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $P(X \leqslant 5) = 0,2$. Déterminer λ.
correction
D'après l'énoncé, on a $P(X \leqslant 5) = 0,2$ donc $1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,2$.
Résolvons donc cette équation : $1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \ln(0,8)$
$\Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,8)$ donc $\lambda = \frac{\ln(0,8)}{-5} \approx 0,045$.

Propriété 37
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.
La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t + h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.
On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

Démonstration : Par définition, on a : $P_{(X>t)}(X>t+h)=\dfrac{P((X>t)\cap(X>t+h))}{P(X>t)}$
$=\dfrac{P(X>t+h)}{P(X>t)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda h}=P(X>h)$. □

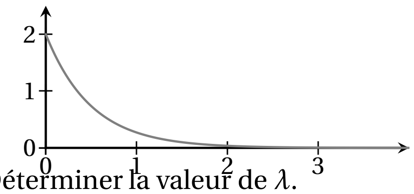
Exemple
On considère un appareil dont la durée de vie en années suit la loi exponentielle de paramètre 0,05 : d'après la propriété, $P_{(X>4)}(X>9)=P_{(X>4)}(X>4+5)=P(X>5)$.
Concrètement, si l'appareil a déjà fonctionné 4 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans de plus est égale à la probabilité (non conditionnelle) qu'il fonctionne plus de 5 ans.

II. Exercices

Exercice 304. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calculer :

1. $P(X\in[0\,;\,2])$
2. $P(X\in[1\,;\,+\infty[)$
3. $P(5<X<10)$
4. $P(X\in[5\,;\,10])$

Exercice 305. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\,;\,2)$ appartient à cette courbe.



1. Déterminer la valeur de λ.
2. L'égalité $P(X<0{,}5)=P(X\geqslant 0{,}5)$ est-elle vraie ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X<t)=P(X\geqslant t)$.

Exercice 306. Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(Y>30)=0{,}2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère maintenant $\lambda=0{,}05$. Calculer :
   (a) $P(Y\geqslant 15)$
   (b) $P(Y\geqslant 5)$
   (c) $P_{(Y\geqslant 15)}(Y\geqslant 20)$
   (d) $E(Y)$

Exercice 307. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X)=45$.

1. Déterminer la valeur de λ arrondie au millième.
2. A-t-on $P(X\geqslant 45)=0{,}5$?

Exercice 308. Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes. On sait que la durée d'attente en minute peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Tessa vient retirer un colis. Calculer la probabilité :
   (a) que Tessa attende moins de 2 minutes ;
   (b) que Tessa attende plus de 5 minutes.
3. Tessa a déjà attendu 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende au moins 2 minutes de plus ?

Exercice 309 — Durée de vie d'un composant
Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Une étude statistique a permis d'établir que $P(T<5)=0{,}1$.
On arrondira tous les résultats au millième.

1. Déterminer la valeur de λ.

   Dans la suite, on prendra $\lambda=0{,}02$.

2. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4. Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?
5. Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

Exercice 310 — Carbone 14 La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5.
Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.

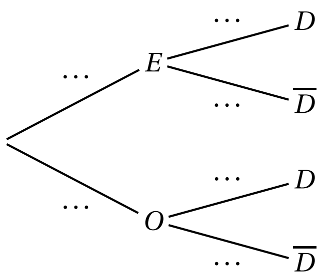
1. Calculer le paramètre λ dans le cas du carbone 14.
2. Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :
   (a) avant 1 000 ans ;
   (b) après 10 000 ans.
3. Déterminer la valeur de a telle que $P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 311. Un magasin vend des jeux électroniques.
On admet que ces jeux ont une durée de vie en heure modélisée par la variable aléatoire D suivant la loi exponentielle de paramètre 0,000 1.

1. Calculer la probabilité que le jeu ait une durée de vie inférieure ou égale à 5 000 heures.
2. Sachant que le jeu a déjà fonctionné 1 000 heures, quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 8 000 heures ?

Exercice 312. Dans un lycée, les oscilloscopes utilisés en physique-chimie ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,383.

1. Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4}.
   Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}12$.
2. Interpréter et déterminer la probabilité $P(X \geqslant 3)$.
3. Interpréter et déterminer la probabilité $P_{X>2}(X > 10)$.
4. Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.
5. Désirant changer son parc de matériel, le lycée achète 40 % d'oscilloscopes auprès du fournisseur Oscillo' et le reste auprès du magasin Electro'. Les deux fabricants ayant des productions différentes, les durées de vie moyenne des oscilloscopes qu'ils fournissent sont de 8 ans pour Oscillo' et de 5 ans pour Electro'. On admet toujours que les durées de vie des oscilloscopes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois exponentielles.
   Un professeur de physique-chimie prend au hasard un oscilloscope.
   On note E, O et D les événements respectifs « l'appareil vient du fournisseur Electro' », « l'appareil vient du fournisseur Oscillo' » et « l'appareil fonctionne plus de dix ans »
   (a) Quelle est la probabilité que l'oscilloscope choisi fonctionne plus de 10 ans sachant qu'il vient du fournisseur Oscillo' ?
   (b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (c) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'oscilloscope choisi soit supérieure ou égale à 10 ans ?

(d) Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise Electro' sachant que sa durée de vie est supérieure ou égale à 10 ans ?

Exercice 313. D'après Bac (Centres Étrangers - 2003). Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   (a) comprise entre 50 et 100 ;
   (b) supérieure à 300.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas au cours des 25 prochains kilomètres ?

Exercice 314. Dans un circuit imprimé, un composant électronique a une durée de vie en années qui peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,125.

1. Un fabricant de circuit imprimé achète 1 000 composants électroniques et on suppose que les durées de vie des composants sont indépendantes.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants électroniques qui auront une durée de vie inférieure ou égale à 1 an.
   (a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres (si nécessaire, on arrondira à 10^{-2} près).
   (b) Calculer $P(X \leqslant 100)$.
2. Ce composant électronique est vendu 10 euros. Le fabricant propose aux clients la grille de remboursement suivante en cas de problème avec un composant :

Durée de vie	jusqu'à 2 ans	entre 2 et 4 ans	plus de 4 ans
Remboursement	5 euros	3 euros	0 euros

   Calculer une estimation de la recette moyenne (qui tient compte du prix de vente et du remboursement) d'un composant si le fabricant en vend une grande quantité.