Thème : Annexes

Fiche 1

Équations et inéquations du second degré Résolution d'équations et factorisation

I. Définition

Définition 42
Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ le réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque
Δ est appelé discriminant du trinôme car son signe permet de faire une discrimination entre les équations selon leur nombre de solutions.

II. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Notons (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a vu chapitre 3 - Fiche 1 que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (E) &\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

On raisonne par disjonction des cas :

1er cas : $\Delta < 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Par conséquent l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E) n'a pas de solution.
De plus, $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ ne peut pas se factoriser (s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré). (Sinon, l'équation aurait au moins une solution.)

2[e] cas : $\Delta = 0$

On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ et donc

$(E) \iff \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc l'équation (E) a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

De plus, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$

3[e] cas : $\Delta > 0$

On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

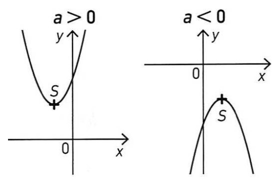
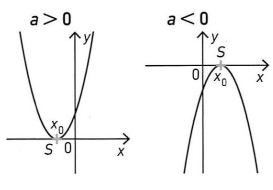
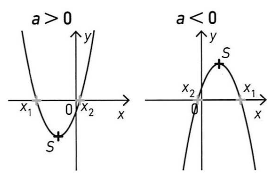
Donc l'équation (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 38

Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de l'équation	pas de solution réelle	une solution « double » $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Représentation graphique	 la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses	 la parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point	 la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points
Forme factorisée du trinôme	pas de factorisation en produit de facteurs de degré 1	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration : Voir ci-dessus □

III. Exemples

Résoudre les équations suivantes.

a. $2x^2-2x-3=0$ (1)
On calcule le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=4-4\times2\times(-3)=4+24=28$
$\Delta>0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$$
et
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$
Remarque : Penser à diviser les membres de l'équation si possible pour simplifier les calculs.
Ici, (1) $\iff x^2-x-\frac{3}{2}=0$
Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac=1+4\times\frac{3}{2}=7$
$\Delta>0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$$
et
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

b. $6x^2-4x+\frac{2}{3}=0$ (2)
On calcule le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=16-4\times6\times\frac{2}{3}=16-16=0$
$\Delta=0$, donc l'équation (2) a une solution :
$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

c. $x+3x^2=-1$ (3)
On a :
(3) $\iff 3x^2+x+1=0$
On calcule le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=1-4\times3=1-12=-11$
$\Delta=0$, donc l'équation (3) n'a pas de solution.

d. $2x^2-5x=0$ (4)
Il n'y a pas de terme constant : inutile de calculer le discriminant : on factorise !
On a :
$$\begin{aligned}(4) &\iff x(2x-5)=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } 2x-5=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Donc l'équation (4) a deux solutions : 0 et $\frac{5}{2}$.

e. $x^2+3=0$ (5)
Il n'y a pas de terme de degré 1 : inutile de calculer le discriminant !
On a :
(5) $\iff x^2=-3$
Donc l'équation (5) a n'a pas de solution.

On déduit des calculs précédents les factorisations suivantes :
$2x^2-2x-3=a(x-x_1)(x-x_2)=2\left(x-\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)\left(1+\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$
$6x^2-4x+\frac{2}{3}=a(x-x_0)^2=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$
$2x^2-5x=a(x-x_1)(x-x_2)=2x\left(x-\frac{5}{2}\right)$

IV. Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x)=0$ est appelée racine ou zéro du trinôme.
- Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
- Si l'équation s'écrit $ax^2+bx=0$ ou $ax^2+c=0$, il est inutile de calculer le discriminant (voir exemples d) et e).
- On peut bien sûr contrôler graphiquement les solutions trouvées avec la calculatrice ou un logiciel comme Geogebra.

Fiche 2

Équations et inéquations du second degré Signe du trinôme - Résolution d'inéquations

I. Signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$,

- Si $\Delta < 0$,
  on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

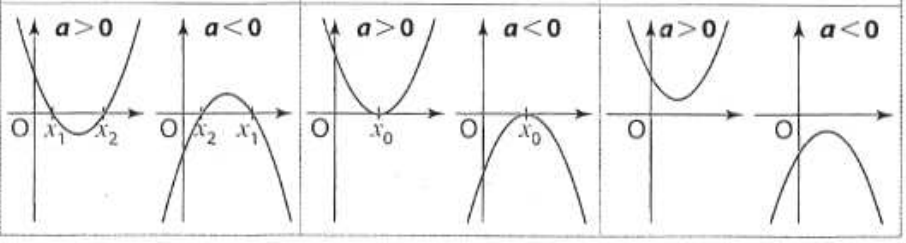
  L'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme.
  Ainsi, si $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Ainsi, en supposant que $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$		signe de a	

D'où la propriété suivante :

Propriété 39
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le signe de f est donné par les tableaux suivants :

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$; $f(x)$: signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$; $f(x)$: signe de a 0 signe de a	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f(x)$: signe de a
Courbe représentative de f			



Démonstration : Voir ci-dessus. □

On peut retenir cette propriété en disant que :
« $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre les racines, s'il y en a ».

II. Exemples

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ (1)

On a démontré que le trinôme $2x^2 - 2x - 3$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2-2x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $]-\infty\,;\, x_1] \cup [x_2\,;\, +\infty[$.

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} \leqslant 0$ (2)

On a démontré que le trinôme $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$ a une racine : $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2-4x+\dfrac{2}{3}$		$+$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

c. $3x^2+x+1>0$ (3)
On a démontré que le trinôme $3x^2+x+1$ n'a pas de racine.
De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+x+1>0$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est $\mathbb{R}$.

d. $-6x^2-10x+3<-4+x$ (4)
Soit $x \in \mathbb{R}$,
(4) $\iff -6x^2-11x+7<0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = 121+4\times 6\times 7 = 121+168 = 289 = 17^2$.
On a $\Delta>0$, donc le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11-17}{-12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$,
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11+17}{-12} = -\dfrac{28}{12} = -\dfrac{7}{3}$.
De plus le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2-11x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\left]-\infty\,;\,-\frac{7}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.