Sommaire

Thème 1 Statistiques à deux variables

Fiche 1

Statistiques
Activités préparatoires

D'après Bréal ES, 2002.

I. La meilleure droite

Dans le plan muni d'un repère, on considère les trois points $A(2;6)$, $E(7;10)$ et $C(12;17)$ On cherche une droite d'équation $y = ax + b$ qui passe le plus près possible de ces trois points. Plus précisément, on veut que les ordonnées des trois points A', B' et C' de la droite, de mêmes abscisses que les points A, B et C respectivement, soient les plus proches possible des ordonnées des trois points A, B et C. Pour cela, on cherche à rendre le plus petit possible le nombre : $d^2 = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2$.

1. Démontrer que $d^2 = (2a + b - 6)^2 + (7a + b - 10)^2 + (12a + b - 17)^2$.
2. Calculer d^2 pour la droite d'équation $y = x + 4$, puis pour la droite d'équation $y = 1,1x + 3$. Quelle est la meilleure de ces deux droites ?
3. On appelle $\overline{x}$ la moyenne des abscisses de A, B, C et $\overline{y}$ la moyenne de leurs ordonnées. Calculer $\overline{x}$ et $\overline{y}$, puis placer le point G de coordonnées $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$.
4. On se propose de trouver la meilleure droite parmi toutes les droites qui passent par G.
   (a) Démontrer qu'une telle droite a une équation de la forme $y = a(x - 7) + 11$.
   (b) Exprimer d^2 en fonction de a. Conclure.

II. Prévision

Au cours d'une période d'hiver, l'intendant d'un lycée a relevé, certains jours, la température extérieure moyenne de la journée et la consommation de fioul de la chaudière pendant la même journée. Il a obtenu le tableau suivant :

Température X (en °C)	-6	-5	-3	-2	-1	1	2	3	5	6
Consommation Y (enL)	400	390	360	330	310	290	260	250	200	190

Il voudrait estimer la consommation à prévoir pour une journée à -7 °C. Pour cela, il cherche une formule du type $y = ax + b$ qui exprime de façon approchée le lien entre la température et la consommation. Après avoir placé dans un repère les points de coordonnées $(X;Y)$, déterminer graphiquement une telle formule. Comment peut-on juger la qualité de l'approximation qu'elle fournit ?

Fiche 2

Statistiques

D'après Bréal 2002.

I. Étude de deux variables quantitatives sur une même population

On considère sur une même population deux variables quantitatives X et Y, pour lesquelles on dispose de n observations, résumées dans le tableau ci-dessous :

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	$\dots$	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	$\dots$	y_n

L'objectif est de savoir s'il y a un lien entre les deux grandeurs X et Y et éventuellement de préciser ce lien.

I.1. Nuage de points

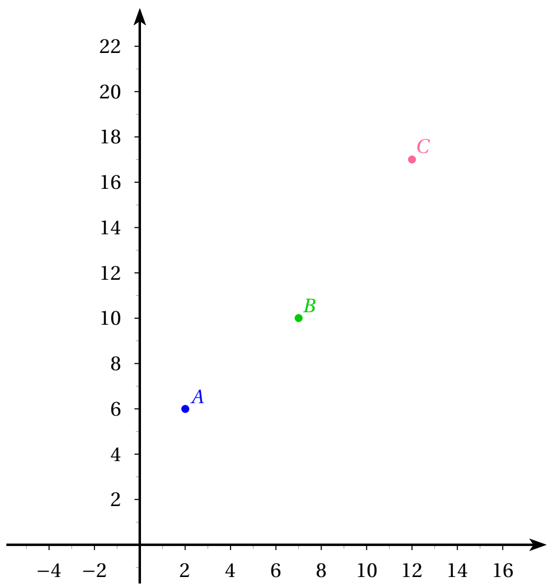
On peut représenter les données en plaçant dans un repère les points :

$$M_1(x_1\ ;\ y_1)\ ,\ M_2(x_2\ ;\ y_2)\ ,\ M_3(x_3\ ;\ y_3)\ ,\ \dots, M_n(x_n\ ;\ y_n).$$

On obtient ce qu'on appelle **un nuage de points**.
La forme de ce nuage donne une information importante : si les points sont proches d'une courbe d'équation $y = f(x)$, cela peut laisser penser que la valeur de X permet d'estimer celle de Y.

Des exemples pour comprendre

1. Nuage de points : $A(2;6)$, $E(7;10)$ et $C(12;17)$. Les points sont à peu près alignés. le nombre de points est trop faible pour que cela puisse avoir une signification statistique. Néanmoins, d'un point de vue géométrique, on peut rechercher une droite qui passe au plus près de ces trois points.



2. Au cours d'une période d'hiver, l'intendant d'un lycée a relevé, certains jours, la température extérieure moyenne de la journée et la consommation de fioul de la chaudière pendant la même journée. Il a obtenu le tableau suivant :

Température X (en °C)	-6	-5	-3	-2	-1	1	2	3	5	6
Consommation Y (enL)	400	390	360	330	310	290	260	250	200	190

Le nuage de points qui représente ces données montre des points à peu près alignés, ce qui laisse penser que la connaissance de X permet d'estimer la valeur de Y.

I.2. Point moyen

Pour avoir une idée de la tendance centrale de X et Y, on peut calculer leurs moyennes.

Définition 1
Étant donné un nuage de points, on appelle **point moyen** le point de coordonnées $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$, où $\overline{x}$ et $\overline{y}$) sont les moyennes respectives des abscisses et des ordonnées des points du nuage.

Des exemples pour comprendre

1. Pour l'exemple 1, le point moyen a pour coordonnées $(7, 11)$.
2. Dans l'exemple de la consommation de fioul le point moyen a pour coordonnées $(0, 298)$.

I.3. Variances et covariance

pour étudier la dispersion de chaque variable X et Y, on peut calculer leurs variances :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2$$

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum(y_i - \overline{y})^2$$

Mais il est inutile d'introduire une quantité qui fasse intervenir à la fois les valeurs de X et de Y.

Définition 2
On appelle covariance de X et Y le nombre :

$$cov(X, Y) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Remarque
Considérons le repère dont l'origine est le point moyen et qui a les mêmes vecteurs de base que le repère initial. Dans ce repère, les coordonnées des points du nuage sont données par $x'_i = x_i - \overline{x}$ et $y'_i = y_i - \overline{y}$.
la covariance s'écrit alors

$$cov(X, Y) = \frac{1}{n}\sum x'_i y'_i.$$

Or dans le premier et le troisième quadrant $x'_i y'_i$ est positif, alors que dans le deuxième et le quatrième quadrant $x'_i y'_i$ est négatif.
Par suite :

1. si tous les points du nuage sont dans le premier et le troisième quadrant, la covariance est positive,
2. si tous les points du nuage sont dans le deuxième et le quatrième quadrant, la covariance est négative.

Mais la réciproque est fausse : quel que soit le signe de la covariance, il y a en général des points dans les quatre quadrants.

Des exemples pour comprendre

1. Pour l'exemple 1,
   $V(X) = \dfrac{50}{3}$, $V(Y) = \dfrac{62}{3}$ et $cov(X,Y) = \dfrac{55}{3}$.
2. Dans l'exemple 2,
   $V(X) = 15$, $V(Y) = 4896$ et $cov(X,Y) = -270$.

I.4. Ajustement affine

Lorsque les points du nuage paraissent presque alignés, on peut chercher une relation de la forme $y = ax+b$ qui exprime de façon approchée Y en fonction de X, autrement dit, une fonction affine f telle que l'égalité $y = f(x)$ s'ajuste au mieux avec les données. Graphiquement, cela signifie qu'on cherche **une droite qui passe au plus près de tous les points du nuage**.
Une telle relation permettrait notamment de faire des **prévisions**.
Pour mesurer la qualité d'une telle formule, on considère, pour chaque valeur x_i, la différence entre la valeur observée, c'est à dire y_i, et la valeur calculée par la formule, c'est à dire $ax_i + b$. on souhaite que toutes les différences :

$$y_i - ax_i - b,$$

appelées **erreurs**, ou résidus, ou perturbations, soient les plus petites possible.
La méthode la plus couramment employée dite méthode des moindres carrés, consiste à choisir a et b de façon que la **somme des carrés des résidus soit la plus petite possible**.

Remarque
Faire simplement la somme des résidus ne serait pas satisfaisant, car les erreurs positives et négatives peuvent se compenser même si la droite passe loin de tous les points.

Définition 3
Étant donné un nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ et une droite d'équation $y = ax+b$, on appelle erreur quadratique totale la somme des carrés des résidus, c'est à dire e nombre :

$$E = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2.$$

Des exemples pour comprendre

1. Dans le cas de l'exemple 1, la droite d'équation $y = x+4$ fournit une erreur quadratique totale égale à $0^2 + 1^2 + 1^2$, c'est à dire 2.
   La droite d'équation $y = 1,1x+3$ fournit une erreur quadratique totale égale à $0,8^2 + 0,7^2 + 0,8^2$, c'est à dire $1,77$. La deuxième droite est donc meilleure que la première.

2. Dans le deuxième exemple, la droite d'équation $y = -15x + 300$ fournit une erreur quadratique totale égale à 1750.
   La droite d'équation $y = -20x + 300$ fournit une erreur quadratique totale égale à 1000. La deuxième droite est donc meilleure que la première.

Théorème 1
Étant donné un nuage de points $(x_i \ ; \ y_i)$, la droite pour laquelle l'erreur quadratique est la plus faible a pour équation $y = ax + b$, avec

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Cette droite est appelée la droite de régression de Y en X.
Elle passe le point moyen. En effet : $\overline{y} = a\overline{x} + b$, donc les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du point moyen vérifient l'équation de la droite.
a s'appelle le coefficient de régression. S'il est positif, Y varie dans le même sens que X, s'il est négatif, Y varie dans le sens contraire de X.

Remarques

— La méthode utilisée (ajustement affine par la méthode des moindres carrés) s'appelle aussi la régression linéaire. A proprement parler, celle-ci contient en plus une interprétation probabiliste des résidus. On ne développera pas ici.

— En 1877, le statisticien britannique Francis Galton (1822-1911), étudiant l'évolution de la taille des individus d'une génération à la suivante, a constaté une régression (c'est à dire une diminution) de la dispersion des tailles. Curieusement, le mot est resté attaché à la méthode des moindres carrés, alors que Galton n'avait pas utilisé cette méthode.

Des exemples pour comprendre

1. Dans le cas de l'exemple 1, on obtient pour coefficients $a = \frac{55}{50} = 1,1$ et $b = 11 - 1,1 \times 7 = 3,3$. La droite des moindres carrés a pour équation $y = 1,1x + 3,3$. L'erreur quadratique est alors égale à 1,5.
2. Dans le cas de l'exemple 2, $a = \frac{-270}{15} = -18$ et $b = 298 - 18 \times 0 = 298$. La droite des moindres carrés a pour équation $y = -18x + 298$. L'erreur quadratique est alors égale à 360.

Remarques

1. La formule trouvée n'a d'intérêt que si elle fournit une bonne approximation des données. La qualité de cette approximation peut être évaluée graphiquement : les points du nuage doivent apparaître presque alignés. il faut également que le nombre de points soit suffisant. Il existe des critères permettant de savoir, en fonction du nombre d'observations, si l'erreur quadratique totale est significativement élevé. mais cette étude n'est pas au programme.
2. Le fait que l'on trouve une relation de la forme $y = ax + b$ qui traduise de façon satisfaisante les données ne signifie pas nécessairement un lien de causalité entre X et Y, il peut se faire par exemple que X et Y soient toutes les deux conséquences d'une même cause Z. Ainsi, dans une station balnéaire, les ventes de crème solaire et de boissons fraîches sont fortement reliées, sans que l'on puisse dire pour autant que les unes soient les causes des autres ! Il est plus vraisemblable que l'ensoleillement en est une cause commune.

La formule permet d'obtenir des **prévisions**.

Des exemples pour comprendre

1. Dans le cas de l'exemple 2, pour une journée à 4řC, la consommation en fioul peut être estimée à $y = -18 \times 4 + 298$ soit $226L$ environ. Cette prévision est une **interpolation** car la valeur de x est à l'**intérieur** de l'intervalle dont les bornes sont la valeur minimale et la valeur maximale de x relevées.
2. Dans le cas de l'exemple 2, pour une journée à -7řC, la consommation en fioul peut être estimée à $y = -18 \times (-7) + 298$ soit $424L$ environ. Cette prévision est une **extrapolation** car la valeur de x est à l'**extérieur** de l'intervalle dont les bornes sont la valeur minimale et la valeur maximale de x relevées.

Remarque
Les prévisions obtenues sont à considérer avec prudence, car elles supposent que le lien observé (appelé corrélation) se maintienne au-delà du domaine des observations faites, ce qui n'est pas nécessairement le garanti. Ainsi dans l'exemple 2 (consommation de fioul et température extérieure) des travaux d'isolation peuvent remettre en cause les prévisions. Par ailleurs, la formule trouvée a un domaine de validité limité : dans le même exemple, il serait absurde de l'appliquer à une température de 20řC.

I.5. Un indicateur de la qualité de l'ajustement affine des moindres carrés

La covariance est sensible aux changements d'unités, par exemple si on multiplie par 1000 les valeurs de Y sans changer les valeurs de X, la covariance est multipliée par 1000. Ainsi, la valeur absolue de la covariance ne donne pas d'information sur la qualité de l'ajustement. D'où la définition :

Définition 4
On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y, que l'on note r , le nombre défini par

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

Comme, $\sqrt{V(X)}$ est l'écart type de X, noté $\sigma(X)$, on peut aussi écrire :

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété 1
Le coefficient de corrélation linéaire est un nombre compris entre -1 et 1.

— si $|r| = 1$ alors la droite de régression passe par tous les points du nuage.

— si $r = 0$ alors il n y a pas de liaison linéaire entre X et Y.

Le coefficient de détermination

Définition 5
On appelle coefficient de détermination de X et Y, que l'on note R^2 , le nombre défini par

$$R^2 = r^2$$

Ce nombre désigne la part en % de la dispersion de la variable Y qui expliquée par la dispersion de la variable X. C'est donc un indicateur de la qualité du modèle. La part complémentaire étant liée aux aléas.

II. EXERCICES

Exercice 1. Représenter le nuage suivant et placer le point moyen :

X	1	3	5	7
Y	3	4	8	9

1. On propose l'ajustement $y = 2x - 2$. tracer la droite correspondante, et calculer l'erreur quadratique totale.
2. Même question avec l'ajustement $y = x + 2$. Cet ajustement affine est -il meilleur que le précédent ?
3. Démontrer que $V(X) = 5$, $V(Y) = 6,5$, $cov(X, Y) = 5,5$.
4. Déterminer et tracer la droite des moindres carrés et calculer l'erreur quadratique totale.

Exercice 2. Une entreprise souhaite mesurer l'impact de ses dépenses publicitaires sur son chiffre d'affaires. Elle dispose des renseignements suivants, observés sur les dix dernières années (en milliers d'euros).

Frais de pub X	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Y	36	59	83	102	122	149	168	192	213	235

1. Représenter le nuage et placer le point moyen. Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?
2. Déterminer (avec un tableur ou une calculatrice) la droite de régression de Y en X. Interpréter le signe de son coefficient directeur.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
4. On envisage un budget publicitaire de 18000 euros. Estimer le chiffre d'affaires correspondant.

Exercice 3.
1. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, donnant la moyenne de X.
2. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, donnant la variance de X.
3. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, et la liste des valeurs de Y, donnant la covariance de X et Y.
4. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, et la liste des valeurs de y, le coefficient directeur de la droite des moindres carrés.

5. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, et la liste des valeurs de y, l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés.
6. Écrire une fonction Python avec en arguments la liste des valeurs de X, et la liste des valeurs de y, le coefficient de corrélation linéaire de la droite des moindres carrés.

Exercice 4. Voici le tableau donnant la consommation finale d'électricité par secteur en TWh et en %

TWh	1970	1980	1990	2000	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Sidérurgie	10,3	12,4	10,5	11,1	11,8	8,8	10,5	11,2	10,6	10,4	10,6	10,4
Industrie	62,1	83,0	105,0	127,4	120,9	108,1	110,5	108,0	107,8	106,9	106,0	105,7
Résid-Tert	41,1	105,3	172,2	236,5	288,8	289,5	302,8	292,3	300,4	305,7	293,9	298,6
Agric	2,6	4,2	5,0	6,0	6,6	7,4	7,6	8,0	8,4	8,8	8,2	8,1
Transp(urb+trains)	5,1	6,0	7,5	9,4	10,4	10,1	10,0	10,0	10,2	10,2	10,0	10,2
TOTAL	121,3	211,0	300,2	390,4	438,5	423,9	441,4	429,4	437,4	442,0	428,8	432,9

On se propose d'analyser si la crise de 2008 a eu un impact sur cette consommation. Proposer une démarche.

Thème 2 Suites de réels

Fiche 1

Analyse- SUITES DE RÉELS
Suites arithmétiques et géométriques

I. Résumé

Le tableau ci-dessous rassemble les principaux résultats obtenus en classe de première.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = r \times n + b$	$u_n = k \times q^n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
S= somme des N termes consécutifs	$S = \begin{pmatrix} moyenne \\ des\ termes \\ extrêmes \end{pmatrix} \times N$	$S = \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} \times \dfrac{1-q^N}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

II. Exemples

Calculer les sommes $A = 5+9+13+\ldots+61$ et $B = 5^2+5^3+\ldots+5^{10}$.

- A est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4, le nombre de termes est $\frac{61-5}{4}+1 = 15$ et la moyenne des termes extrêmes est 33. Donc $A = 33\times 15 = 495$.
- B est la somme de neuf termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.
  Donc $B = 5^2 \times \frac{1-5^9}{1-5}$ soit $B = 12207025$.

Les résultats relatifs à la somme de termes consécutifs résultent de deux formules sommatoires suivantes qu'il est important de connaître :

$$1+2+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1+q+\ldots+q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q}\ (si\ q \neq 1)$$

III. Suites arithmético-géométriques

Définition 6
On appelle suite arithmético-géométrique une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme : quel que soit l'entier n, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent des réels.

Remarque

— si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique

— si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.

III.1. Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le cas où $a \neq 1$

— Rechercher une suite constante (c) vérifiant la relation de récurrence.

— Prouver que la suite $(u_n - c)$ est géométrique de raison a

— Exprimer le terme général de la suite $(u_n - c)$ en fonction de n

— Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

III.2. Exemple

Soit (C_n) la suite définie par $C_{n+1} = 1{,}005\times C_n - 400$, de premier terme 50000. Exprimer le terme général de cette suite en fonction de n.

— Résolvons l'équation d'inconnue x, $x = 1{,}005\times x - 400$. Après quelques prouesses techniques, on obtient $-0{,}005x = -400$ donc $x = 80000$. La suite (α_n) de premier terme 80000, vérifiant la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = 1{,}005\times \alpha_n - 400$ est une suite constante.

— Prouvons que la suite $(C_n - \alpha)$ est géométrique de raison a :
Soit n un entier naturel,

$$
\begin{array}{ccc}
C_{n+1} & = & 1,005 \times C_n - 400 \\
\alpha & = & 1,005 \times \alpha - 400 \\
\text{Soustrayons} & \text{la} & \text{deuxième égalité} \quad \text{à la première} \\
C_{n+1} - \alpha & = & 1,005(C_n - \alpha)
\end{array}
$$

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, $C_{n+1} - \alpha = 1,005(C_n - \alpha)$. La suite $(C_n - 80000)$ est donc géométrique de raison $1,005$. Le premier terme est $C_0 - 80000$ c'est à dire -30000.

— Exprimons le terme général de la suite $(C_n - 80000)$ en fonction de n :
$C_n - 80000 = (C_0 - 80000) \times 1,005^n$. On obtient $C_n - 80000 = -30000 \times 1,005^n$

— Exprimons alors le terme général de (C_n) en fonction de n.
De l'étape précédente, on déduit que, pour tout entier naturel n, $C_n = 80000 - 30000 \times 1,005^n$

IV. Exercices

Exercice 5. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite arithmétique de raison r, vérifiant :

1. $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{3}{2}$
2. $u_5 = 1$ et $u_{11} = 8$
3. $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{100} = 2$

Exercice 6. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite géométrique de raison q, vérifiant :

1. $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$
2. $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$
3. $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = 24573$

Exercice 7. Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique et préciser la raison.

1. $u_n = 3^{n+2}$
2. $u_n = 5^{1-3n}$
3. $u_n = (-1)^n \times 6^{2n+3}$
4. $u_n = 2 + (2 + 2^2 + \ldots + 2^n)$

Exercice 8. Calculer les sommes :

1. $A = 8 + 13 + 18 + \ldots + 2018 + 2023$
2. $2^2 + 2^5 + 2^8 + \ldots + 2^{20}$
3. $x + x^2 + \ldots + x^n$ (lorsque $x \neq 1$, puis $x = 1$).

Suites arithmético-géométriques

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite en fonction de n.

— $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n - 300$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 0,90u_n + 300$

Exercice 10. TOTORO va voir son banquier pour obtenir un crédit de 10000 euros. Celui-ci lui propose de rembourser une somme de 400 euros par mois avec un taux mensuel de 0,05%. Combien de temps va mettre TOTORO pour rembourser son crédit ?

Fiche 2

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement global d'une suite

Suites monotones

Définition 7
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est non monotone si elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Techniques d'étude :
Trois techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

1. **La technique fonctionnelle**.
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
2. **Les techniques algébriques**.
   Elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
   — soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
   — soit en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition 8
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que , pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que , pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.
- La suite (u_n) est non bornée si elle n'est pas majorée ou elle n'est pas minorée.

Les techniques précédentes s'appliquent encore ici.

— suites $u_n = f(n)$: si f est majorée sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) l'est aussi.

— méthodes algébriques. Exemple si on conjecture un majorant M de la suite (u_n) alors on peut chercher à étudier algébriquement le signe de $u_n - M$.

Exercices

Suites croissantes, décroissantes

Exercice 11. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n^2 - 5n$
3. $u_n = 3n + (-1)^n$
4. $u_n = n - 3^n$

Exercice 12. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$
2. $u_n = 0,1^n \times n^2$
3. $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n}$

Exercice 13. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la fonction f $(u_n = f(n))$.

1. $u_n = n + \cos(n)$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
3. $u_n = n^2(3 - n)$

Suites majorées, minorées

Exercice 14. Montrer que chacune des suites ci-après est majorée et en déterminer un majorant.

1. $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \ldots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$
2. $u_n = 10 + 2\cos(n)$
3. $u_n = 9 + 3 + 1 + \ldots + 3^{-n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, étudier les bornes éventuelles de la suite (u_n) à l'aide du sens de variation de la fonction f. ($u_n = f(n)$).

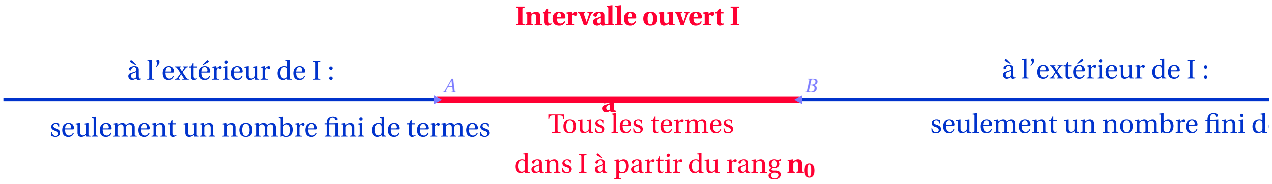
1. $u_n = n^2 - 10n - 3$
2. $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + 1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Fiche 3

Analyse- SUITES DE RÉELS Comportement asymptotique

I. Suites convergentes

Définition 9
Soit (u_n) une suite numérique et a un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- Lorsque (u_n) admet pour limite a, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
- Lorsqu'une suite admet une limite finie a, on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, elle est divergente.
- Si une suite est convergente, sa limite est unique. Preuve en exercice.

I.1. Suites de référence

Propriété 2
Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$...admettent pour limite 0

II. Suites ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 10
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 11
On dit que (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

II.1. Suites de référence

Propriété 3
Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2...admettent pour limite $+\infty$

II.2. Suites divergentes

Elles sont de deux types, une suite divergente peut être :

— soit avoir une limite infinie

— soit de ne pas avoir de limite comme $(-1)^n$ (cf exercice)

III. Exercices

Exercice 16. Unicité de la limite.

1. On suppose qu'une suite (u_n) admet deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, on a donc $\alpha > 0$. Montrer que la définition de la limite appliquée à deux intervalles bien choisis conduit à une contradiction.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17. En utilisant les définitions du cours montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ ne peut avoir de limite.

Exercice 18. Démontrer que si une suite (u_n) est convergente alors elle est bornée.

Fiche 4

Analyse- SUITES DE RÉELS
Opérations sur les limites

I. La somme

Théorème 2
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite de la somme $(u_n + v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
a est$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	x
a est$-\infty$	$-\infty$	x	$-\infty$

II. Le produit

Théorème 3
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $(u_n \times v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	ab	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$
a est$+\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
a est$-\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

III. Le quotient

Théorème 4
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel $(b \neq 0)$	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$\frac{a}{b}$	0	0
a est$+\infty$	$\pm\infty$	x	x
a est$-\infty$	$\pm\infty$	x	x

IV. Exemples

Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2. $v_n = n(3 - n)$

3. $\boldsymbol{w_n = \dfrac{1}{n^2-5}}$

La suite (u_n) :
On a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ car ce sont des suites de référence, donc, en utilisant le théorème sur la limite d'une somme, $\lim u_n = +\infty$.
La suite (v_n) :
On a $\lim(-n) = -\infty$ donc $\lim(3-n) = -\infty$ (limite d'une somme). Comme $v_n = n(3-n)$, le résultat sur le produit fournit $\lim v_n = -\infty$.
La suite (w_n) :
Il est clair que $\lim(n^2-5) = +\infty$, le résultat sur le quotient fournit alors $\lim w_n = 0$.

V. Formes indéterminées

Les théorèmes précédents ne disent rien :

— sur la somme lorsque $a = +\infty$ et $b = -\infty$

— sur le produit lorsque $a = \pm\infty$ et $b = 0$

— sur le quotient lorsque $b = 0$ ou lorsque a et b sont infinis tous les deux.

Ces situations dont certaines sont appelées formes indéterminées seront étudiées en exercice.

VI. Exercices

Opérations algébriques

Exercice 19. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide des théorèmes concernant les opérations sur les limites,

1. $u_n = 3n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = 1 - n^5$
3. $u_n = (1-3n)(n^2+n-2)$

Formes indéterminées

Exercice 20. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = 3n^2 - n + 5$. Mettre en facteur n^2.
2. $u_n = 8n - n^3$. Mettre en facteur n^3.

Exercice 21. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \dfrac{3n^2-n}{1-n^2}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
3. $u_n = \dfrac{(n+3)(-2n+1)}{3n+5}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Exercice 22. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \sqrt{n} - n$. Mettre en facteur le terme dominant.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{2n+1}$. Mettre en facteur le terme dominant.

Exercice 23. Déterminer la limite de (u_n) avec $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Fiche 5

Analyse- SUITES DE RÉELS THÉORÈMES DE COMPARAISON

I. Théorèmes des comparaison

Théorème 5
On résume les théorèmes dans le tableau ci-dessous :

— les quatre premiers déterminent le comportement à l'infini d'une suite (x_n) par comparaison à d'autres suites (u_n), (v_n) dont le comportement est connu.

— le dernier résultat autorise le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse 1 : une inégalité à partir d'un certain rang	Hypothèse 2 : Comportement à l'infini	Conclusion
$u_n \leqslant x_n$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim x_n = +\infty$
$x_n \leqslant u_n$	$\lim u_n = -\infty$	$\lim x_n = -\infty$
$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers le même nombre ℓ	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$\lvert x_n - \ell\rvert \leqslant u_n$	$\lim u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$x_n \leqslant y_n$	$\lim x_n = \ell$ $\lim y_n = \ell'$	$\ell \leqslant \ell'$

II. Comportement asymptotique de q^n (q réel)

Théorème 6

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante et a pour limite 1.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant 1$ alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Ce résultat sera démontré en exercice. Il permet le cas échéant, de déterminer la limite d'une suite géométrique, ou de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple
Etudier la limite de la suite (S_n) : $S_n = 1 + x + \ldots + x^n$ avec $-1 < x < 1$. Utilisons la formule sommatoire

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

III. Exercices

III.1. Théorème de comparaison

Exercice 24. Énoncer et démontrer le théorème de la première ligne du tableau.

Exercice 25. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \cos(n) - n$
2. $u_n = 2n + (-1)^n$

Exercice 26. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{n}$

III.2. Suites géométriques

Exercice 27.

1. Démontrer , pour tout $n \geqslant 0$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \text{ Inégalité de Bernoulli}$$

2. En déduire que, si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

3. A l'aide des théorèmes de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Exercice 28. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 1{,}01^n$
2. $u_n = 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Exercice 29. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
2. $u_n = 1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{6}{5}\right)^n$
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^n$
5. $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{7}\right)^{2n}$

Exercice 30. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 3{,}77..7$ (n chiffres 7)
2. $u_n = 0{,}6767..67$ (n séquences 67)
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
5. $u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

Fiche 6

Analyse- SUITES DE RÉELS
Exercices supplémentaires

I. Majorants, minorants et variations

Exercice 31. Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3 + 5n$
2. $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$
4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$
5. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$
6. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$
7. $u_n = n + (-1)^n$

Exercice 32.

1. Montrer que la suite de terme général :
   (a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;
   (b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant ;
   (c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) ;
   (d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;
   (e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$;
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

Thème 3 Analyse-Équations différentielles

Fiche 1

Analyse- Équation différentielle L'équation différentielle $y' = ay + b$

I. Généralités

— Une fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout x de I

$$f'(x) = af(x) + b$$

Sans précision, on prendra $I = \mathbb{R}$. En dehors des notations fonctionnelles habituelles, on autorise l'écriture : « $y = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ », étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction.

— Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$, c'est trouver toutes les solutions.

— Un peu de vocabulaire :

  — L'équation $y' = ay + b$ est dite du premier ordre linéaire à coefficients constants

  — $y' = ay$ est l'équation sans second membre associée. La locution « sans second membre » se conçoit mieux si l'on écrit $y' - ay = b$, l'équation sans second membre associée est alors $y' - ay = 0$.

II. Résolution de l'équation $y' = ay$ (a réel).

L'équation $y' = ay$ est l'équation de référence dans ce chapitre. Nous en donnons ci-dessous les solutions.

Théorème 7
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante arbitraire.

Démonstration : — D'une part, il est évident que $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

— Réciproquement, si y est une solution de $y' = ay$, posons $z(x) = \mathrm{e}^{-ax}y(x)$, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$z'(x) = -a\mathrm{e}^{-ax}y(x) + \mathrm{e}^{-ax}y'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

Donc, pour tout x réel, $z'(x) = 0$. Ainsi, il existe une constante C telle que, pour tout x réel, $z(x) = C$. On en déduit que pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-ax}y(x) = C$, donc, pour tout x réel, $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Ce qui démontre le théorème annoncé. $\square$

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $\mathbf{2y'+3y=0}$ Ici $a=-\dfrac{3}{2}$, donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$.

III. Résolution de l'équation différentielle $y'=ay+b$ (a et b réels)

Théorème 8
On considère l'équation différentielle $y'=ay+b$ (1) (a et b réels et a non nul), et on associe l'équation sans second membre associée $y'=ay$. Alors :

— il existe une fonction constante g, solution particulière de (1) : $g(x)=-\dfrac{b}{a}$

— l'ensemble des solutions de (1) s'obtient en ajoutant g à une solution quelconque de l'équation sans second membre.
Ces solutions sont donc les fonctions $x\mapsto Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$. ($C$ réel quelconque).

Démonstration :

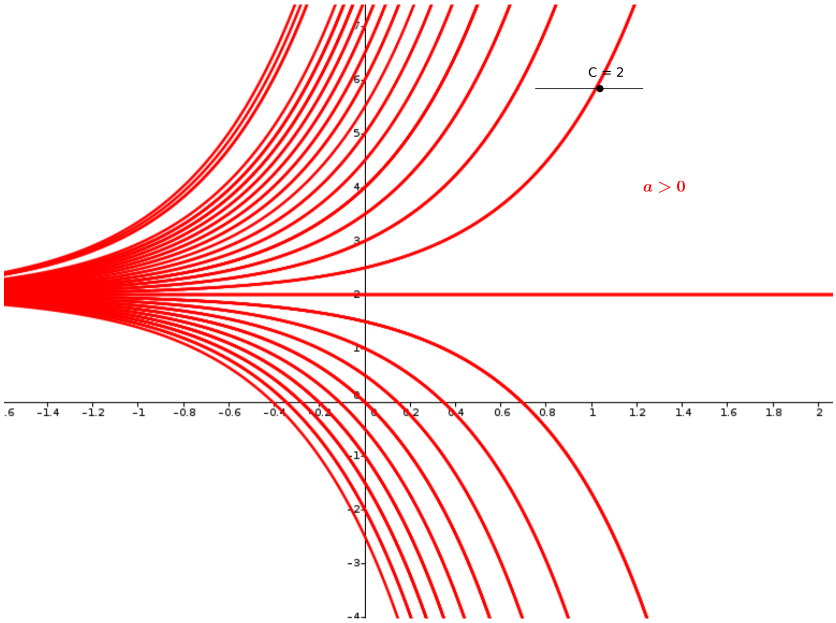
La fonction g $x\mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de (1), la vérification est aisée.

La condition « f est solution de (1) » est équivalente à ,pour tout x, $f'(x)-af(x)=b$, soit encore à $f'(x)-af(x)=g'(x)-ag(x)$.
La dernière égalité s'écrit encore $(f-g)'=a(f-g)$. Ainsi, f est solution de (1) est équivalente, $f-g$ est solution de $y'=ay$. Cette dernière condition se traduit par, pour tout x réel, $f(x)-g(x)=Ce^{ax}$. En conclusion, les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions $x\mapsto Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$. □

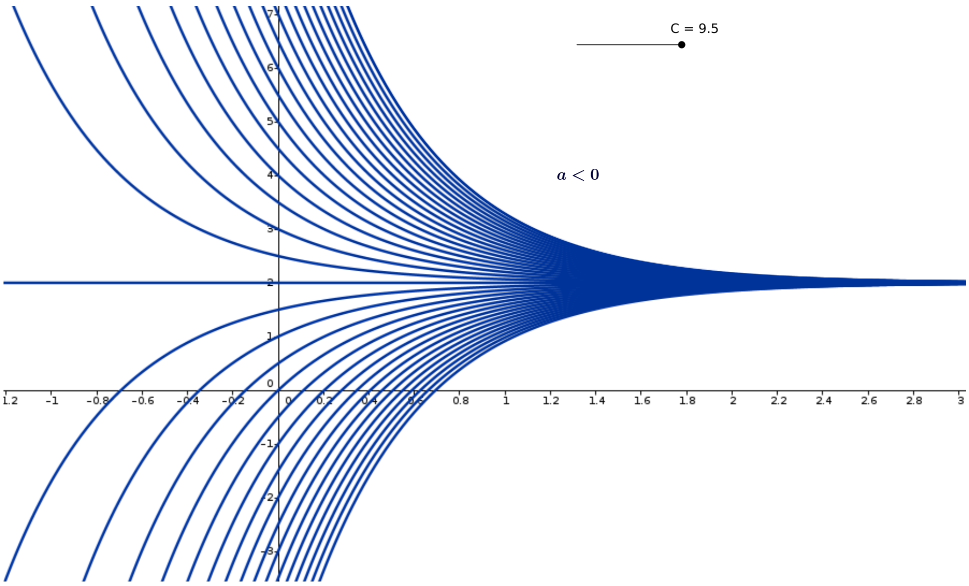
le point de vue graphique

Voici les courbes des solutions de solutions de l'équation $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = -4$

$a > 0$



$a < 0$



Remarque
Si $a = 0$, les solutions de (1) sont les fonctions affines $x \mapsto bx + k$.

> **Théorème 9**
> Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. (x_0 et y_0 réels donnés).

Exemple
Déterminer la fonction f, solution de $y' = -0,5y + 1$ telle que $f(0) = 4$.
La solution générale de l'équation est $x \mapsto Ce^{-0,5x} + 2$. La condition $f(0) = 4$ donne $C = 2$. Donc $f(x) = 2e^{-0,5x} + 2$.

IV. Exercices

Exercice 33. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \frac{3}{2}y$
2. $-y' + y = 0$
3. $7y' + 8y = 0$

Exercice 34. Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels), et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - 5 = y$
3. $3y' - 2y + 1 = 0$
4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$
5. $y' = 100(y - 3)$
6. $y' = 0,1(100 - y)$
7. $y' = 2002(8 - 5y)$

Exercice 35. Démontrer le théorème 3 du cours « Il existe un unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés) ».

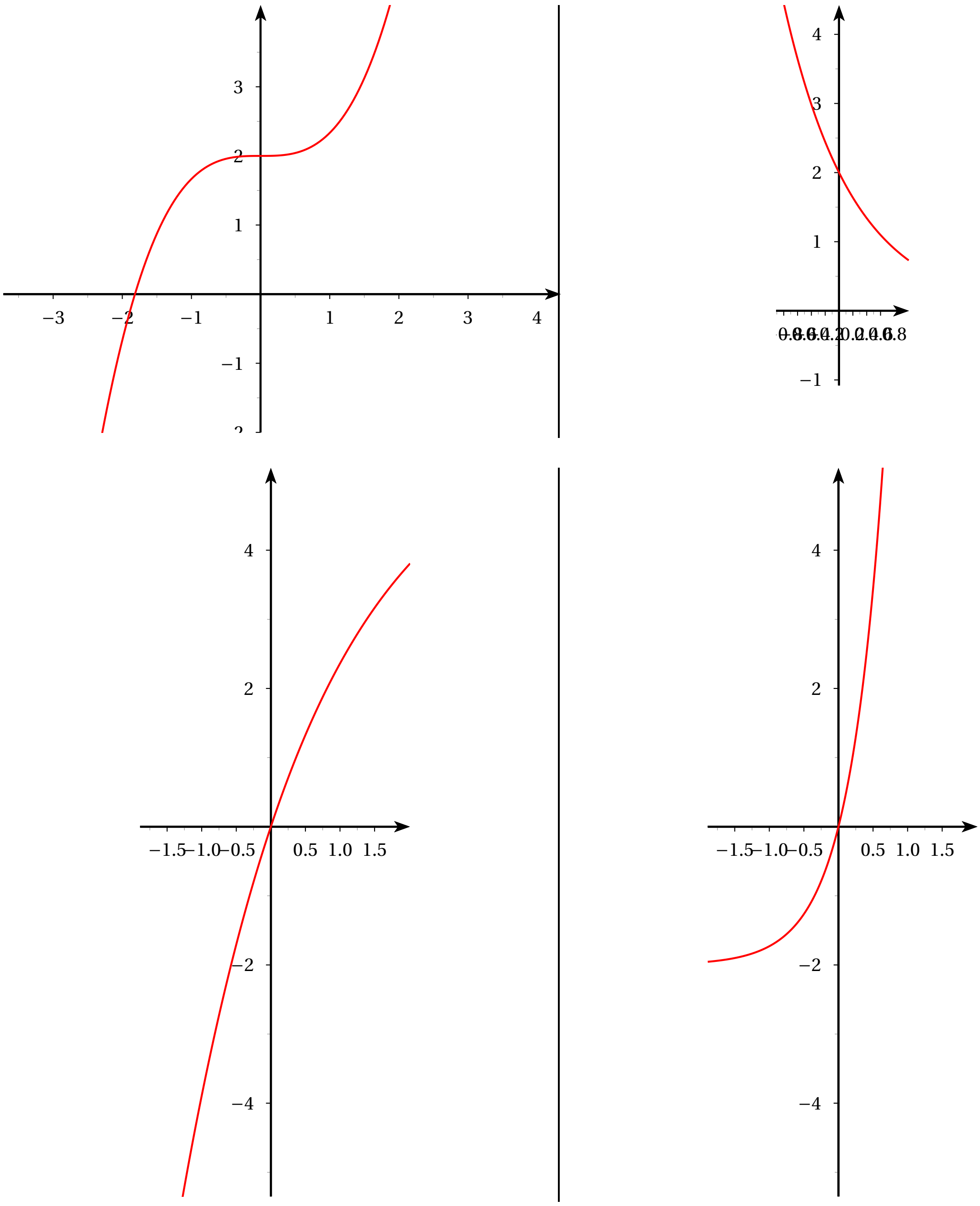
Exercice 36. Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée, et donner l'allure de sa représentation graphique.

1. $y' = 4y - 3$, $y(0) = -1$
2. $y' = -y + 1$, $y(2) = 6$
3. $y' + 0,03y = 5$, $y(0) = 200$
4. $y' = 500 - 0,1y$ $y(10) = 0$

Exercice 37. On considère les équations différentielles suivantes :

1. $y' = x^2$,
2. $y' = 3 - 0,5y$,
3. $y' + 0,03y = 5$
4. $y' - 2y = 4$
5. $y' = -y$

Les figures ci-après donnent sommairement l'allure des courbes représentatives d'une solution (1), (2), (3) et (4). Associer à chaque courbe son équation différentielle.



Exercice 38. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (5x+2)e^{3x}$$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = 3y + 5e^{3x}$$

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Fiche 2

Analyse- Équation différentielle Équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$

Il s'agit d'étudier certaines équations différentielles se ramenant à la forme $y' = ay + b$.

I. Exercice résolu

On considère les équations différentielles :

$$y' - 2y = 1 - 6x \tag{2.1}$$

$$y' = y(5 - y) \tag{2.2}$$

1. Montrer que (1) admet une solution affine et résoudre (1).
2. Déterminer les solutions strictement positives de (2) en posant $z = \dfrac{1}{y}$

II. Résolution de l'exercice

1. Posons $g(x) = ax + b$, g est solution de (1) si, pour tout x réel,

$$a - 2(ax + b) = 1 - 6x.$$

   Cette égalité implique $a = 3$ et $b = 1$. On vérifie que la fonction $x \mapsto 3x + 1$ est solution de l'équation (1).
   On en déduit les équivalences suivantes : y est solution de (1) $\Leftrightarrow y' - 2y = 1 - 6x$
   $\Leftrightarrow y' - 2y = g' - 2g$
   $\Leftrightarrow (y - g)' - 2(y - g) = 0$
   Ainsi, pour tout x réel, $y(x) - g(x) = Ce^{2x}$ (C est réel)
   Les solutions de (1) sont les fonctions $x \mapsto 3x + 1 + Ce^{2x}$ (C est réel)

2. $z = \dfrac{1}{y}$, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $y > 0$ et
   $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{y(5-y)}{y^2} = -\dfrac{5}{y} + 1$ donc $z' = -5z + 1$. On en déduit facilement $z(x) = \dfrac{1}{5} + Ce^{-5x}$, puis $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$.
   Remarque : si $C < 0$, on peut avoir $z(x) \leqslant 0$ (donc $y(x) \leqslant 0$) pour certaines valeurs de x. La condition $y(x) > 0$ impose $C \geqslant 0$.

III. Exercices

Exercice 39. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = \mathrm{e}^x$, en montrant d'abord qu'il existe une solution particulière de la forme $g : x \mapsto a\mathrm{e}^x$.

Exercice 40. On considère l'équation différentielle $y' = -y^2$. En posant $z = \dfrac{1}{y}$, montrer que l'équation admet des solutions strictement positives sur $[0, +\infty[$.

Exercice 41. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x - 5$.

1. Montrer que (E) admet une fonction affine $g : ax + b$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 42. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$.

1. Montrer que (E) admet une fonction polynôme du second degré $g : ax^2 + bx + c$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 43. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : (ax + b)\mathrm{e}^{-2x}$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 44. On considère l'équation différentielle $y' + y = \sin x$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : \lambda \sin x + \mu \cos x$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 45. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = x\mathrm{e}^x \tag{2.3}$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$$

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1)
   (b) Montrer que v est solution de l'équation (2) si, et seulement si $u + v$ est solution (1)
   (c) En déduire l'ensemble (1)
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 46. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x} \tag{2.4}$$

1. Démontrer que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$, est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E)
5. Déterminer la fonction solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 47. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive, vérifiant l'équation différentielle $y' = ky(A-y)$ où A et k sont des réels donnés ($k \neq 0$ et $A > 0$)

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle du type $z' = az + b$ (On exprimera a et b en fonction de k et de A).
2. En déduire qu'il existe une constante B telle que l'on ait, pour tout x réel
$$y(x) = \frac{A}{1 + B\mathrm{e}^{-kAx}}.$$
Préciser le signe B compte tenu de la condition $y(x) > 0$ pour tout x.
3. Donner l'allure de la courbe représentative d'une solution en distinguant les deux cas
   (a) $k > 0$
   (b) $k < 0$

Exercice 48. On considère les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde et vérifiant $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$ et, pour tout x $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$.

1. On pose, pour tout x réel, $z(x) = \mathrm{e}^x y(x)$.
   (a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.
   (b) Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que pour tout x réel, $z''(x) - 2z'(x)$.
   (c) En déduire que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z' = 4 - 2z$.
   (d) Exprimer alors $z(x)$ en fonction de x.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution fonction y vérifiant les hypothèses de départ, et exprimer $y(x)$ en fonction de x.

Fiche 3

Analyse- Équation différentielle Situations menant à une équation différentielle

I. Problème Sciences PO 2012

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie quelques-uns de ces modèles.

I.1. Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1. **Modèle discret**
   Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n de l'étude P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = kP_n.$$

   (a) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.
   (b) Indiquer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
   (c) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
   (d) Interpréter les résultats des questions **b.** et **c.** en termes d'évolution de population.

2. **Modèle continu**
   On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle k telle que,pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.
   (a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $P(t)$ en fonction de t, k et P_0 la population à l'instant $t = 0$.

(b) Quel est le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction P ? On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de k.

(c) On se place maintenant dans le cas où $k > 0$. On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale.
Exprimer λ en fonction de k.
Si la population double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle ? Justifier.

(d) On suppose toujours que $k > 0$. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;\,T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
En déduire la population moyenne sur l'intervalle $[0\,;\,\lambda]$ en fonction de P_0.

3. **Comparaison des deux modèles**
On suppose que la population initiale est de 1 000 individus et que $k = 0,1$.
Comparer les résultats obtenus après 10 ans puis après 100 ans pour chacun des deux modèles.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas très réaliste. Le taux d'accroissement de la population va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources. Il faut donc introduire un facteur d'autorégulation M tenant compte de la capacité d'accueil du milieu.
Dans ce qui suit, on étudie donc les modèles de Verhulst et de Gompertz qui permettent de décrire l'accroissement de la population comme « proportionnel » à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.

I.2. Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telle que, pour tout entier naturel n,

$$P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$$

1. Si la suite (P_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?
2. On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{k}{rM}P_n$. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = r\,u_n\,(1-u_n)\,.$$

3. Dans cette question 3., on suppose que $r = 1,8$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ et croissante.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

   (c) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population P_n ? Justifier.

4. Dans cette question 4., on suppose que $r = 3,2$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Sur le graphique fourni en annexe on a représenté, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3,2x(1-x)$ et la droite d'équation $y = x$.
   Sur ce graphique, construire, sur l'axe des abscisses, les 4 premiers termes de la suite (u_n). On laissera les traits de construction apparents.
   (b) Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la suite (u_n) ?
   (c) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs arrondies à 10^{-5} près des 6 premiers termes de la suite. Ces résultats confirment-ils la conjecture émise précédemment ?

5. Dans cette question 5., on suppose que $r = 5$ et u_0 est un réel strictement positif. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > 1$.
   (a) Démontrer que $u_{p+1} < 0$ puis que, pour tout $n \geqslant p+1$, $u_n < 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. On pourra, pour cela, étudier le signe de la fonction $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$. En déduire que, s'il existe, l'entier p est unique.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (e) Si $U_0 = 0,8$, que peut -on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$? Justifier.
   (f) Démontrer que si $u_0 = 0,5$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Même question avec $u_0 = 0,1$.
   En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0,799\,999$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Que peut-on dire de la validité du modèle dans ces différents cas ?

I.3. Modèle de Verhulst continu

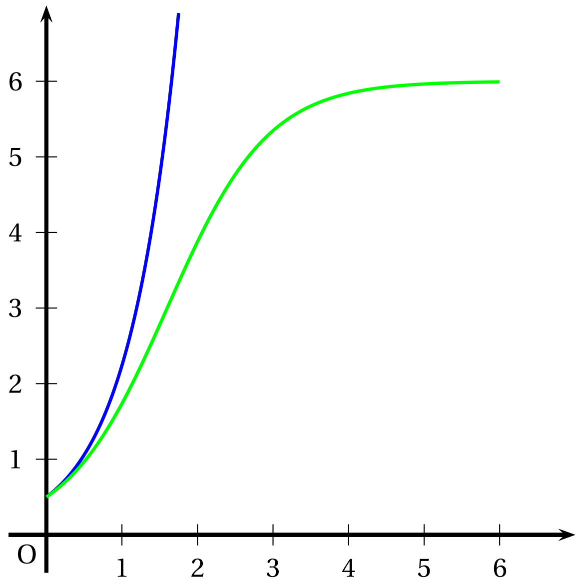
On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$P'(t) = kP\left(1 - \frac{P(t)}{P\,M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky(1-y)$.

1. On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $Q = \dfrac{1}{P}$.
   (a) Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $\quad y' = -ky + \dfrac{k}{M}$.
   (b) Résoudre (E'). Justifier que les fonctions obtenues sont strictement positives quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t) = \dfrac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ où C est une constante réelle.
   (a) Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ selon le signe de C.
   (c) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
   (d) Décrire l'évolution de cette population. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.
3. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;\,T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
   (b) Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.
4. On se place dans un repère (O, I, J). Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ un point où la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la courbe C J .
   (a) Démontrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.
   (b) Calculer la dérivée seconde P'' de la fonction P. Montrer que l'équation $P''(t) = 0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C > 0$. Démontrer que $t_0 = \dfrac{\ln(C)}{k}$.
   (c) Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\,(t_0\,;\,P\,(t_0))$ appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{M}{2}$.
   (d) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P, au point A_0. On note g la fonction affine correspondante.
   (e) Étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0. On pourra, pour cela, étudier les variations puis le signe de la fonction φ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(t) = P(t) - g(t)$.
   En déduire que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.
5. Dans cette question, on prend $P_0 = 0,5$, $k = 1,5$ et $M = 6$. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions $t \mapsto 0,5\mathrm{e}^{1,5t}$ et $t \mapsto \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1,5t}}$ définies sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (a) On considère la fonction d définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $d(t) = 0,5\mathrm{e}^{1,5t} - \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1,5t}}$.
   Résoudre l'inéquation $d(t) < 0,1$.
   Que peut-on dire de ces deux courbes au voisinage de l'origine O ?
   (b) À l'aide du graphique ci-dessous, décrire, dans le cas du modèle de Verhulst continu, l'évolution de la population quand son effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M.



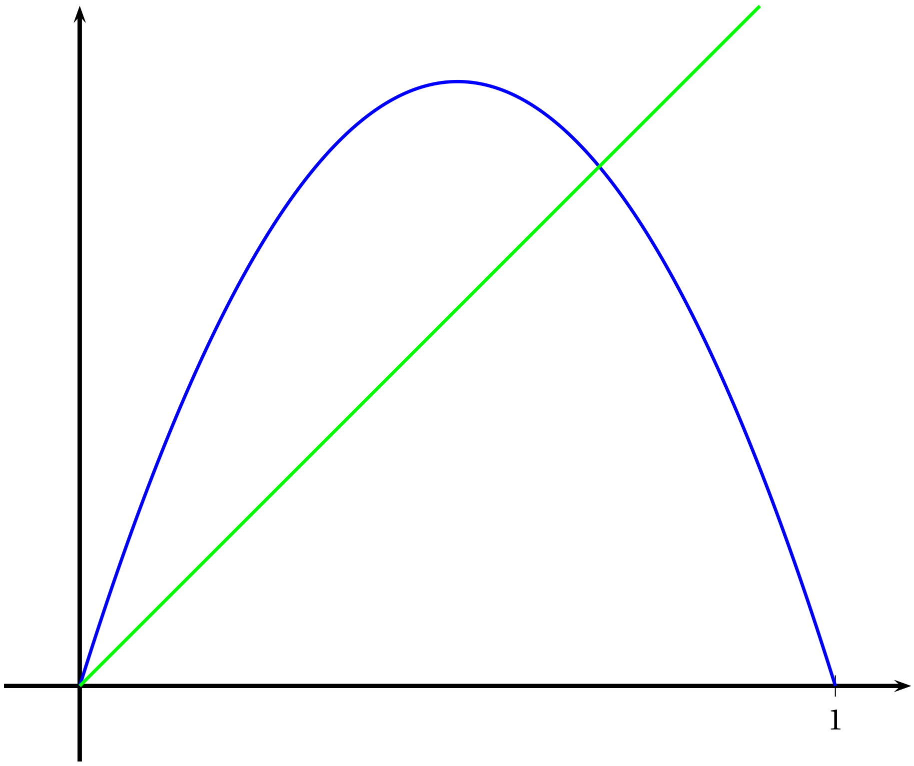
I.4. Modèle de Gompertz

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes k et M avec M strictement positive telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on ait :

$$P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1. On considère la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $Q = ln(P)$.
   (a) Démontrer qu'une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = kyln[\,]$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + kln(M)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
   (c) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $P(t) = Me^{-kt}$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.
3. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1 000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers d'individus, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 20$.
   (a) Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression « population en voie d'extinction ».
   (b) Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

Annexe



II. Problème posé au bac

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant
$t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue

période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. (a) Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

   (b) Résoudre (E′).
   (c) Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\dfrac{1}{h}$ vérifie (E).
2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\mathrm{M}}{1 + C\mathrm{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.
   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.
   (b) Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\mathrm{M}}{2}$.
   (c) Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\mathrm{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
   Exprimer t_0 en fonction de a et C.
   (d) Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(0{,}5\,;\,2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.
2. Sachant que $g(0) = \mathrm{N}_0$ et que $\mathrm{M} = 100\ \mathrm{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

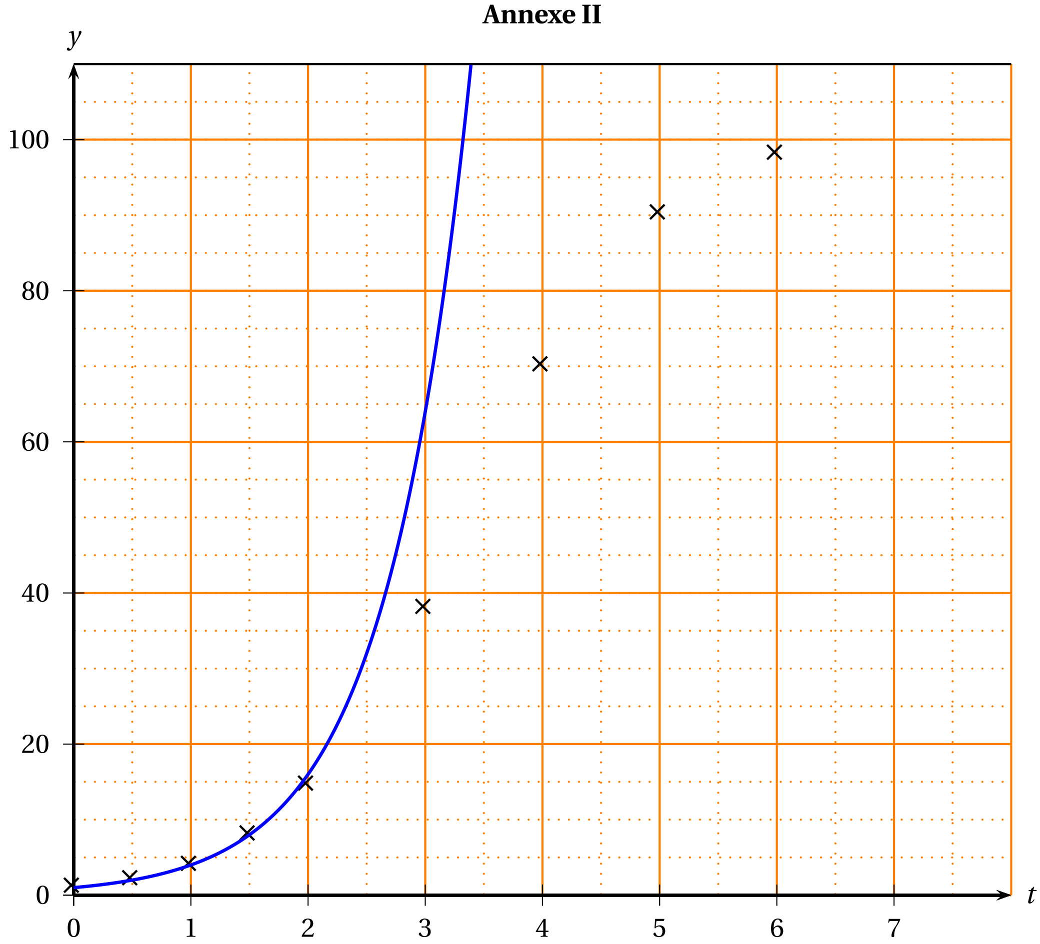
3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II



Thème 4 Analyse- Compléments sur la Dérivation

Fiche 1

Analyse- Fonctions
Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

I. Généralités

Définition 12
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite ℓ en a, c'est à dire :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

ou encore

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a, et on note $f'(a)$.

Remarques

1. Lorsque f est dérivable en a, nous pouvons encore écrire :
   (1) $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x-a) = 0$
   (2) $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
2. Si f est dérivable en a, il est clair d'après (1) que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ainsi toute fonction dérivable en a est continue en a. Toutefois la réciproque est fausse. Connaître les exemples classiques :
   — la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et non dérivable en 0
   — la fonction $x \mapsto |x|$ est continue et non dérivable en 0

II. L'écriture différentielle

Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole Δ ; ils notent $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$. Avec ces notations, l'égalité (1) s'écrit $\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$ avec $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$\mathrm{d}y = f'(a)\mathrm{d}x \text{ ou } f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$$

C'est ce que l'on nomme la notation différentielle.

III. Interprétations

III.1. Interprétation graphique : tangente

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$. Cette tangente a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

III.2. Interprétation numérique : approximation affine

Lorsque f est dérivable en a, la fonction f admet une bonne approximation affine au voisinage de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

III.3. Interprétation cinématique : vitesse

Si $t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ est la loi horaire du mouvement d'un point mobile dans un plan muni d'un référentiel alors $\begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases}$ désignent les coordonnées du vecteur vitesse instantanée de M en t.

IV. Dérivée seconde

Définition 13
Si la fonction f est dérivable en a et si sa dérivée première est elle même dérivable en a, on dit que f est deux fois dérivable en a et la dérivée de sa dérivée en a est notée $f''(a)$ c'est la dérivée seconde de f en a.

V. Exercices

Exercice 49. A l'aide de la définition, étudier la dérivabilité au point a d ela fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en distinguant les cas :

— $a > 0$
— $a = 0$

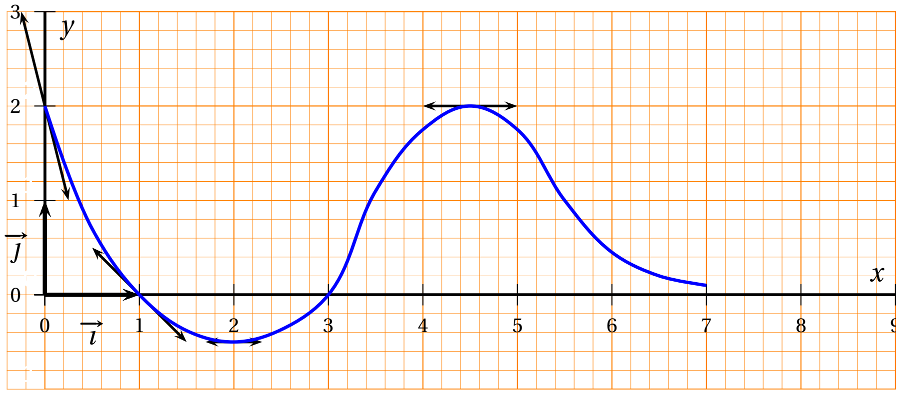
Exercice 50. Dans chaque cas déterminer tous les réels a tels que $f'(a) = 1$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \sin(x)$

Exercice 51. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

1. $f(x) = 1 - 3x + x^4$, $a = 0$
2. $f(x)\sqrt{x}$, $a = 4$
3. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ $a = \pi$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$



Exercice 52.
Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), on considère la courbe ci-dessus représentant une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;7]$.
Toutes les réponses aux questions suivantes seront obtenues à partir du graphique.

1. Lire $f(0)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.
2. Déterminer le signe de la fonction f et celui de sa dérivée f'.
3. Indiquer à 0,1 près des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 53.
1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.
2. En quels points de $\mathscr{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier un dessin.

Exercice 54. Justifier les approximations suivantes au voisinage de 0 :

1. $(1+x)^3 \approx 1+3x$
2. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$
3. $\exp(x) \approx 1+x$
4. $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$
5. $\sin x \approx x$
6. $\tan x \approx x$

Fiche 2

Analyse- Fonctions
Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

I. variations d'une fonction et extremums

Lorsqu'une fonction est dérivable en tout point d'un intervalle I, nous pouvons définir la fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ sur I. Avec la notation différentielle, f' se note encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Rappelons les résultats suivants, admis en classe de première.

Théorème 10
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si la fonction dérivée est nulle sur I alors f est constante sur I
- Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I

Ainsi l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée f' garde un signe constant.

Exemple
Etudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$. Ainsi

- f' est strictement positive sur $]-\infty, 0]$ sauf en 0 où elle s'annule, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$
- f' est strictement négative sur $[0, 4]$ sauf en 0 et en 4 où elle s'annule, donc f est strictement décroissante sur $[0, 4]$
- f' est strictement positive sur $[4, +\infty[$ sauf en 4 où elle s'annule, donc f est strictement croissante sur $[4, +\infty[$

Nous rappelons encore le résultat suivant précisant le lien entre dérivée et extrema locaux. le résultat essentiel découle du théorème précédent.

Théorème 11
Si f dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 un réel de I.

1. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$
2. si en x_0 la dérivée f' s'annule **en changeant de signe** alors f admet un extremum local en x_0.

Remarques

1. Les abscisses des extrema d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée mais si $f'(x_0) = 0$, x_0 n'est pas forcément l'abscisse d' un extremum local, ($f(x) = x^3$ et $x = 0$)
2. Pratiquement, les abscisses des extrema locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements d'orientation des flèches.

II. Exercices

Opérations et dérivées

Exercice 55. Déterminer pour chaque question le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$
2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
3. $f(x) = 3x^7$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
6. $f(x) = -\dfrac{5}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
8. $f(x) = (2x-1)x^2$
9. $f(x) = 3x\sin x$
10. $f(x) = x\sqrt{x}$
11. $f(x) = \cos x \sin x$
12. $f(x) = \cos^3(x)$
13. $f(x) = (x+4)^3$
14. $f(x) = (x+\sin x)^2$
15. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^4$
16. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$
17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
18. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$
19. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
20. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1+\cos x}$
21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

Exercice 56. Soit n un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1. En utilisant une formule sommatoire, calculer de deux manières la dérivée de $f : x \mapsto 1 + x + x + ... + x^n$, pour $x \neq 1$.
2. En déduire que pour $x \neq 1$, une formule sommatoire de $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.
3. Applications :
   (a) Calculer les sommes :
      i. $A = 1 + 2\times 2 + 3\times 2^2 + ... + 16\times 2^{15}$
      ii. $B = 1 + 2\sqrt{3} + 3\times 3 + ... + 20\times 3^9\sqrt{3}$
   (b) Etudier la limite de $u_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + ... + \dfrac{n}{3^{n-1}}$.

Exercice 57. On pose pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n\sqrt{x}$. Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Variation et extrema

Exercice 58. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et étudier les variations de f.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$
3. $f(x) = x^2(x-1)^3$
4. $f(x) = x^4 - 4x$
5. $f(x) = x(1-x)$
6. $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
9. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0, \pi]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$
11. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$

Exercice 59. On pose, pour $n \geqslant 2$, $f(x) = x^n$.

1. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$
2. Pour quelles valeurs de n la fonction f admet-elle un extremum local en 0.

Exercice 60. Peut-on trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante et admettant un extremum local pour toute valeur entière ?

Fiche 3

Analyse- Fonctions Dérivation - Dérivation d'une composée-tableaux récapitulatifs

Terracher- 2002

I. Dérivation d'une composée

Théorème 12
Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0, et v une fonction définie sur un intervalle J contenant $y_0 = u(x_0)$. Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en y_0, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = u'(x_0) \times v'(y_0)$.

Démonstration : Soit x un réel de I, la dérivabilité de u en x_0 entraîne $u(x) - u(x_0) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))$ où $z(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.
De même, si s est un réel de J, la dérivabilité de v en y_O entraîne $v(s) - v(y_0) = (s - y_0)(v'(y_0) + k(s))$ où $k(s)$ tend vers 0 quand s tend vers y_0.
En posant $s = u(x)$, on obtient donc,

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (u(x) - u(x_0))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Donc

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Si $x \neq x_0$, en divisant par $(x - x_0)$ on obtient

$$\frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = (u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$ et que $\lim\limits_{y \to y_0} k(y) = k(y_0)$ on peut conclure que $\lim\limits_{x \to x_0} k(u(x)) = 0$, de plus $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = 0$ donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = u'(x_0)v'(u(x_0))$$

Exemple
Montrer que $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Posons $u(x) = x^2$ et $v(y) = \sin(y)$, ces deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, or $f = v \circ u$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$f'(x) = u'(x) \times v'(y) = 2x\cos(x^2)$$

.

Exemples d'applications

Théorème 13
Soit u une fonction dérivable en x_0. Alors

— la fonction $f : x \mapsto (u(x))^n$, $(n \in \mathbb{Z})$, est dérivable sur en x_0 (sous la condition $u(x_0) \neq 0$ pour $n < 0$ et
$$f'(x_0) = nu'(x_0)(u(x_0))^{n-1}$$

— Si $u(x_0) > 0$, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en x_0 et
$$g'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$$

— la fonction $h : x \mapsto exp(u(x))$ est dérivable en x_0 et
$$h'(x_0) = u'(x_0) \times exp(u(x_0))$$

II. Tableau récapitulatif

Dérivées des fonctions usuelles

fonction	dérivée	commentaire	ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	k constante	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}$ si $n < 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		sur $]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$		sur $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \exp(x)$	$x \mapsto \exp(x)$		sur $\mathbb{R}$

Opérations et compositions

fonction	dérivée	commentaire	conditions
$u+v$	$u'+v'$		
au	au'	a constante	
uv	$u'v+uv'$		
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$		si $v(x)\neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		si $v(x)\neq 0$
$x\mapsto v\circ u(x)$	$x\mapsto u'(x)\times v'(u(x))$		
$x\mapsto (u(x))^n$	$x\mapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$	$n\in\mathbb{Z}$	si $u(x)\neq 0$ lorsque $n<0$
$x\mapsto\sqrt{u(x)}$	$x\mapsto\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$		si $u(x)>0$
$x\mapsto \exp(u)$	$x\mapsto u'(x)\exp(u(x))$		

III. Exercices

III.1. calcul de dérivées

Exercice 61. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

1. $f(x)=\cos(x^2)$
2. $f(x=\cos(\cos x))$
3. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$
4. $f(x)=\sqrt{x^4+1}$
5. $f(x)=\sqrt{5+\sin x}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$
8. $f(x)=\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$
9. $f(x)=x^2\times\exp(-x^2)$

Exercice 62. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable sur une réunion d'intervalles et calculer sa dérivée :

1. $f(x)=\tan(2x)$
2. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
3. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$
4. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
5. $f(x)=\sqrt{\cos x}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sin^4 x}$

Exercice 63. Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto\exp(5x)$

Exercice 64. Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x\exp(x)$

Exercice 65 — maths expertes avec complexes Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x\cos x$

Exercice 66 — approfondissements u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I

1. Calculer la dérivée seconde de $u\times v$.
2. Calculer la dérivée troisième de $u\times v$.
3. Calculer la dérivée n-ième de $u\times v$.

Optimisation

Exercice 67. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans l'arche de parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = 1 - x^2$ (avec $y \geqslant 0$), on inscrit un rectangle $MNQP$ ayant pour axe (Oy) avec M et N sur (Ox) et P et Q sur (Oy).

1. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?
2. Quel est le point de $\mathscr{P}$ le plus près de l'origine ?
3. La tangente à $\mathscr{P}$ en $S(x, y)$ coupe (Ox) en A et (Oy) en B ($x > 0$ et $y > 0$). Déterminer S pour que l'aire du triangle soit minimale.

Comparaison de fonctions

Exercice 68. Etudier la position relative de la courbe de la fonction cos par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 69. Démontrer que, pour tout x positif ou nul, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 70. Démontrer que, pour tout x positif ou nul,et inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$

$$\sin x \leqslant x$$

Fiche 4

Analyse- Fonctions
Convexité

Hachette MPSI - 2008

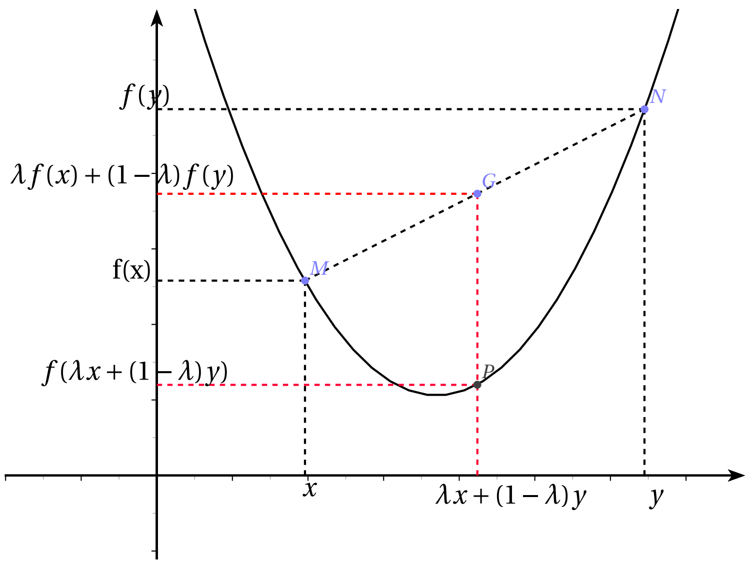
I. Définition

Définition 14
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Interprétation graphique

Soit M et N deux points de la courbe représentative de f d'abascisses respectives x et y.
Soit G le point de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y\,;\, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MG}$ sont $((1-\lambda)(y-x)\,;\,(1-\lambda)(f(y)-f(x))$. Les coordonnées de de $\overrightarrow{MN}$ sont $((y-x)\,;\,(f(y)-f(x))$. On obtient ainsi l'égalité $\overrightarrow{MG} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN}$ qui permet de conclure que le point G est un point du segment $[MN]$.En notant P le point de la courbe d'abscisse $\lambda x+(1-\lambda)y$. Les coordonnées de P sont $(\lambda x+(1-\lambda)y\,;\, f(\lambda x+(1-\lambda)y))$. La définition de la convexité de f exprime donc que le point P est situé en dessous de G.



Théorème 14
Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de sa courbe est situé en dessous de la corde correspondante.

Exemples

1. la fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$
2. la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$

Définition 15
Une fonction est dite concave sur I si son opposée est convexe sur I. Tout arc est situé au dessus de sa corde.

II. Caractérisations des fonctions convexes dérivables

Croissance de la fonction dérivée

Théorème 15
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I

Démonstration : Admis □

Dérivée seconde positive sur I

Théorème 16
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I

Démonstration : Admis □

Définition 16
Un point de la courbe en lequel la dérivée seconde **s'annule en changeant de signe** est appelé **point d'inflexion**. La courbe traverse sa tangente en ce point.

Application

— la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

— la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

— la fonction inverse est convexe sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$

— la fonction racine carrée est concave sur $]0, +\infty[$

— la fonction tangente est convexe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Position par rapport à une tangente

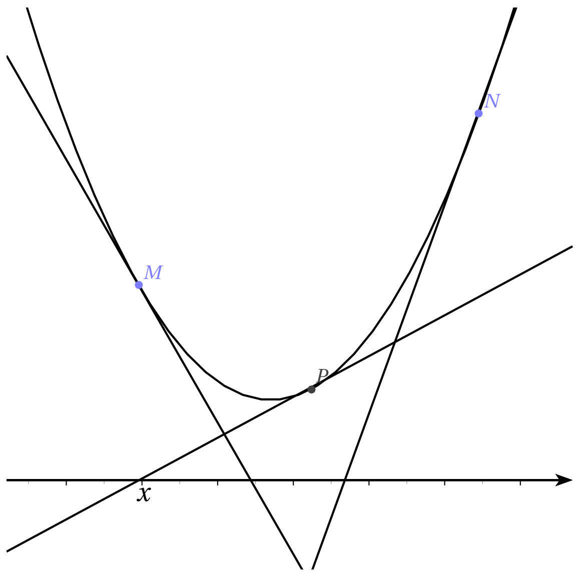
> **Théorème 17**
> Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration : Preuve du programme sens : si f convexe alors la courbe est situé au dessus de chacune de ses tangentes. Si f est une fonction dérivable sur I. l'équation de la tangente à sa courbe en un point d'abscisse a est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Notons $d(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Cette fonction d est dérivable sur I et sa dérivée est $d'(x) = f'(x) - f'(a)$. La croissance de la fonction f' implique que :

— si $x \leqslant a$ alors $f'(x) \leqslant f'(a)$ et donc $d'(x) \leqslant 0$.

— si $x \geqslant a$ alors $f'(x) \geqslant f'(a)$ et donc $d'(x) \geqslant 0$.

Ainsi d' est décroissante sur l'intervalle situé à gauche de a et croissante sur l'intervalle situé à droite de a et donc la fonction d admet un minimum sur I atteint lorsque x vaut a. Or $d(a) = 0$ donc d est positive sur I donc $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$ et donc la courbe de f est au dessus de sa tangente. □



Application

— $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$

— $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leqslant x$

— $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{1}{x+1} \geqslant -x + 1$

III. Exercices

Exercices

Exercice 71. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

   a. $\ln 2$ **b.** $-2\ln 2$

   c. $2\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

   a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

   c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

   a. $y = 2x$ **b.** $y = x - 1$

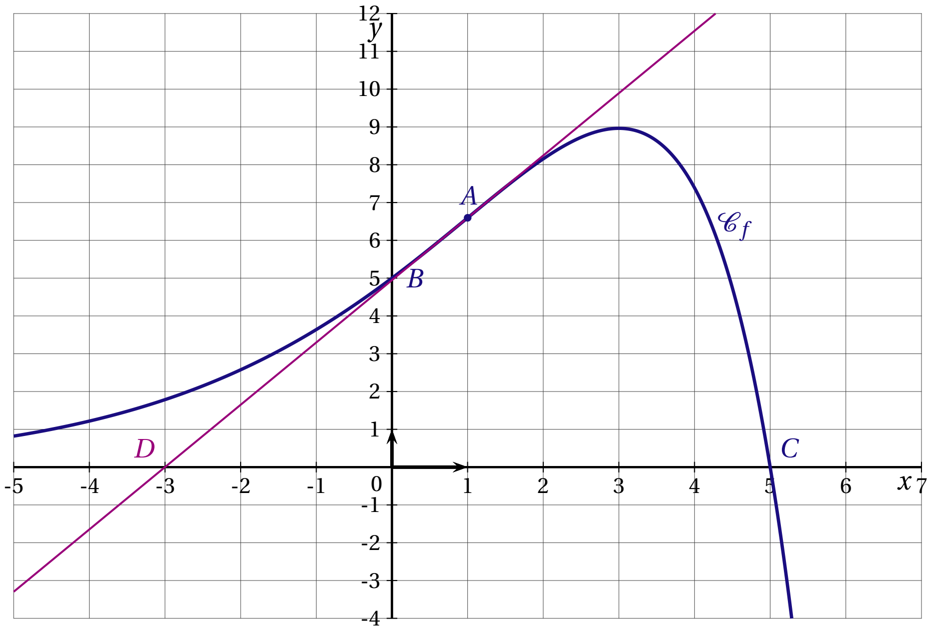
   c. $y = x$ **d.** $y = 2x - 1$

4. La fonction f est :

   a. concave sur $[0\,;\,1]$ **b.** concave sur $[0\,;\,+\infty[$

   c. convexe sur $[0;+\infty[$ **d.** convexe sur $[0;1]$

Exercice 72. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A\left(1\,;\,4\mathrm{e}^{0,5}\right)$, $B(0\,;\,5)$ et $C(5\,;\,0)$.
Le point $D(-3\,;\,0)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Par lecture graphique

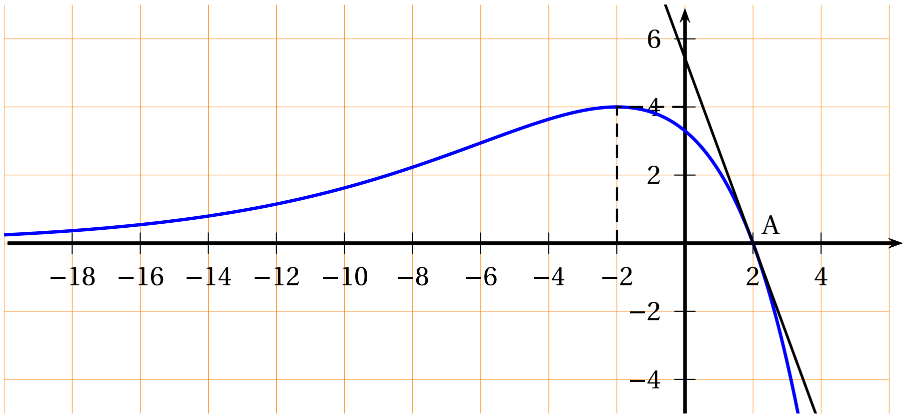
1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\mathrm{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5-0,5x)\mathrm{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = 0,25(-x+1)\mathrm{e}^{0,5x}$.
   (b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.
2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)\mathrm{e}^{0,5x}$. Démontrer que que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 73. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

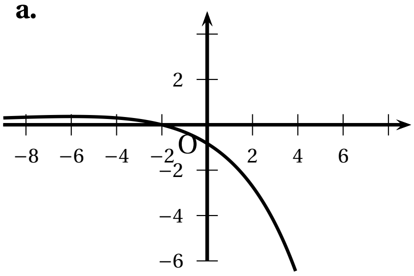
   a. $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ **b.** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c.** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d.** $y = -5x + 4\mathrm{e}$

2. La fonction f est :

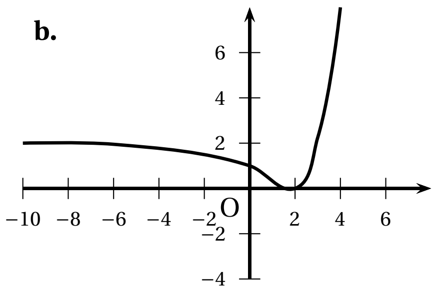
   a. concave sur $]-\infty\,;\,0]$ **b.** convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ **c.** concave sur $[0\,;\,2]$ **d.** convexe sur $[0\,;\,2]$

3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?

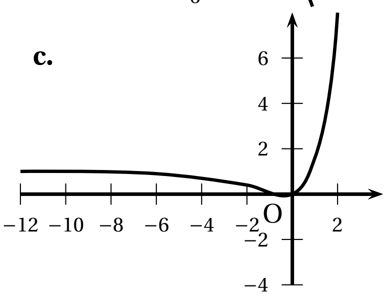
a.



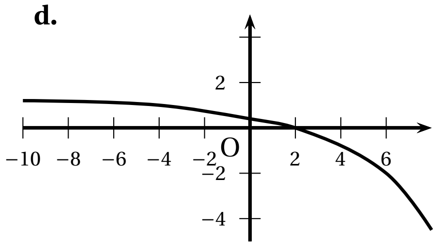
b.



c.



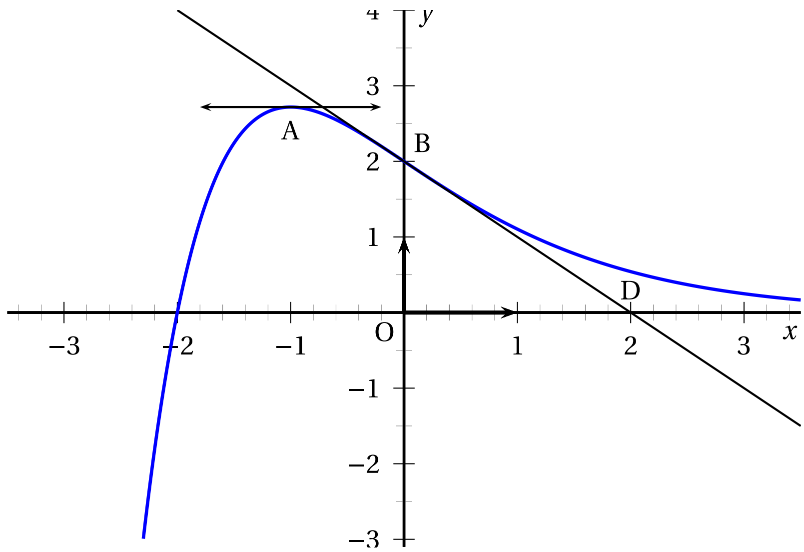
d.



Exercice 74. *Les parties A et B sont indépendantes.*

Partie A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points A$(-1\ ;\ \mathrm{e})$ et B$(0\ ;\ 2)$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2\ ;\ 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.
Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$.
5. $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.
Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
   La fonction g est convexe sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 75. Etudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(-\dfrac{x^2}{2})$. Préciser les points d'inflexions éventuels.

Exercice 76. Etudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$.Préciser les points d'inflexions éventuels.

Exercices approfondissements

Exercice 77. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I

Démontrer que f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout x_0 dans I, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I-\{x_0\}$.

Exercice 78.

1. Démontrer que si une fonction dérivable sur I est convexe alors sa dérivée est croissante sur I.
2. Démontrer que si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a)=f(b)$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. (Théorème de Rolle) On pourra utiliser le résultat de l'exercice 251.
3. Déduire du théorème précédent que si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Égalité des accroissements finis.
4. Démontrer que si une fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est croissante alors f est convexe sur I.

Exercice 79. Inégalité de Jensen. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \geqslant 2, \forall (x_i)\in I^n, \forall(\lambda_i)\in\mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Exercice 80.

1. Montrer que la fonction $x\mapsto -\ln x$ est convexe.
2. En déduire :
$$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in \mathbb{R}_+^{*n},\ \sqrt[n]{x_1\dots x_n} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$
3. Démontrer que :
$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3, a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$
$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3, (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Fiche 5

Analyse- Fonctions
Continuité d'une fonction

Warusfel-Vuibert- 2002

I. Fonctions continues en un point

définition

Définition 17
Soit f une fonction à valeurs réelles et a un réel. On dit que f est continue en a si a appartient à l'ensemble de définition de f et si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

Définition 18
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I si f en continue en $a$pour tout réel a appartenant à I.

Remarque
La notion de continuité est assez intuitive. elle se traduit par le fait que l'on affirme pouvoir tracer la courbe de f sans lever le crayon. Nous verrons que les fonctions usuelles sont presque toutes continues. **Donnons cependant un exemple de fonctions non continue**.

Exemple
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ n a pas de limite en n donc elle n'est pas continue en n.

Composition de fonctions continues

Théorème 18
Soit f une fonction définie sur un intervalle D et continue en a et une fonction g définie sur un intervalle contenant $f(D)$ et continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Théorème 19
Soit f une fonction continue sur un intervalle D et si g est une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Continuité et opérations

Théorème 20
Soit (f, g) un couple de fonctions définies sur un même intervalle et continues e a alors

— $f + g$ est continue en a

— fg est continue en a

— λf est continue en a où λ est un réel

— si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

Continuité des fonctions usuelles

Fonctions polynomiales

Théorème 21

— Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$

— Toute fonction quotient de deux fonctions polynomiales est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition

Fonctions trigonométriques usuelles

Théorème 22

— la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$

— la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$

— la fonction $\tan = \frac{\sin x}{\cos x}$ est continue sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions faisant intervenir des radicaux

Théorème 23
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Théorème 24
Pour toute fonction f continue et positive, la fonction $\sqrt{f}$ est continue.

Théorème 25
Pour toute fonction f continue, la fonction $|f|$ est continue.

Approfondissement : image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème 26
Soit f une fonction continue en a et une suite (u_n) convergeant vers a dont tous les termes appartiennent à l'ensemble de définition de f. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$

Conséquence pour l'étude des suites définies par récurrence :

Théorème 27
Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et admettant pour limite un réel ℓ en lequel f est continue. Alors $f(\ell) = \ell$.

En général, f est continue sur un intervalle I et la continuité de f en ℓ résulte de l'appartenance de ℓ à I. ce théorème montre que les valeurs possibles de la limite de (u_n) sont à chercher parmi les **points fixes** de f. Même si l'on dans un cas où un tel point fixe est unique, il ne permet pas d'affirmer que la suite converge effectivement vers ce point fixe. Mais si, par ailleurs, on sait que la suite est convergente, par exemple en utilisant le théorème de convergence monotone, il permet de déterminer la limite.

Exemple
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit f $x \mapsto \sqrt{x+2}$. Puisque $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, la suite est définie et à valeurs positives. Une récurrence immédiate montre de plus qu'elle est majorée par 2.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(2 - u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

Puisque $u_n \leqslant 2$, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est croissante. Majorée par 2, elle converge vers une limite ℓ qui est positive et f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on a donc $f(\ell) = \ell$. Cette égalité équivaut à $\ell \geqslant 0$ et $\ell^2 = \ell + 2$. Il n'a y a qu'une seule valeur possible et la suite converge vers 2.

II. Exercices

Exercice 81. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < -1 \\ f(x) = a(x+1)^2 \text{ si } -1 \leqslant x < 0 \\ f(x) = a^2 e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$ Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 82. Calculer les limites en n, pour tout n de $\mathbb{Z}$ de $x \mapsto \left| x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right|$. Cette fonction est elle continue sur $\mathbb{R}$?

Fiche 6

Analyse- Fonctions
Continuité d'une fonction sur un intervalle

Warusfel-Vuibert- 2002

I. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 28
Pour toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ et pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 29
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 30
Pour toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

II. Inversion d'une fonction continue strictement monotone

Si f est strictement monotone on peut préciser le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 31
Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a,b]$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Extensions au cas d'un intervalle quelconque

Théorème 32
- Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a,b]$ et pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in]a,b]$ tel que $f(c) = k$.
- Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b[$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, il existe un unique réel $c \in [a,b[$ tel que $f(c) = k$.

— Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a,b[$ et pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, il existe un unique réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=k$.

Définition 19
Soit f une fonction définie sur A à valeurs dans B, où A et B sont des ensembles quelconques.
On dit que f est une bijection de A sur B si, pour tout $y \in B$, il existe un élément unique $x \in A$ tel que $f(x)=y$.
La fonction qui à $y \in B$ associe son unique antécédente $x \in A$ est une bijection de B sur A appelée la bijection réciproque de f et notée f^{-1}. On dit parfois fonction $inverse$.

Exemples

— La fonction exp est continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, sa bijection réciproque est appelée fonction logarithme Népérien. Son étude sera faite en Terminale.

— La fonction cos est continue et strictement monotone de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. C'est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arcosinus. Son étude sera faite en L1.

— La fonction sin est continue et strictement monotone de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$. C'est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arcsinus. Son étude sera faite en L1.

— La fonction tan est continue et strictement monotone de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. C'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arctangente. Son étude sera faite en L1.

— si n est un entier naturel non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. C'est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, sa bijection réciproque est appelée fonction racine n-ième. Son étude sera faite en L1.

III. Fonction continue sur un intervalle [a,b]

Théorème 33
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Remarque
Ce théorème n'est pas explicitement au programme. Cependant sa démonstration sera proposée en approfondissement.

IV. Recherche de la solution de $f(x)=0$ par dichotomie

Une fois que l'on a prouvé que l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule α dans $[a,b]$, on peut rechercher des valeurs approchées de α grâce à un algorithme dit de dichotomie.
Le principe est le suivant : on calcule l'image du centre c de l'intervalle $[a,b]$ ($c=\frac{a+b}{2}$) par la fonction f. Si $f(c)\times f(a)>0$ alors α appartient à $[c,b]$ sinon, α appartient à $[a,c]$. Et on recommence le procédé jusqu'à obtenir la précision voulue.

V. Exercice

Exercice 83. Écrire en langage Python une fonction qui prend en argument le nom de la fonction f, les bornes de l'intervalle a et b et la précision souhaitée P, qui renvoie l'intervalle contenant la solution de l'équation $f(x) = 0$ contenue dans l'intervalle $[a, b]$ obtenue par l'algorithme de dichotomie et tel que cet intervalle soit le premier intervalle de la série dont la longueur est inférieure à la précision demandée.

Exercice 84. Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution α et la localiser entre deux entiers consécutifs. Appliquer en suite l'algorithme de dichotomie pour localiser avec une précision $0,01$.

1. $x^2 + 5x = 9$
2. $x^3 + x^2 = 7$
3. $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$
4. $\cos x - x = 0$

Exercice 85. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes. Donner pour chaque solution un encadrement d'amplitude $0,01$.

1. $5x^3 + 8x - 1 = 0$
2. $x^3 - 5x = 1$
3. $x^4 = 32x - 48$

Exercice 86. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $\alpha_n > 0$ racine du polynôme $X^n + X^{n-1} + \ldots - 1$; montrer que (α_n) est décroissante, convergente et trouver sa limite.

Fiche 7

Analyse- Fonctions
Fonction exponentielle et fonction logarithme Néperien

Terracher- 2002

I. La fonction exponentielle. Rappels de première

Généralités

Théorème 34
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la nomme fonction exponentielle, elle est notée exp.

Théorème 35
1. $\exp(0) = 1$
2. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
3. signe : pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
4. sens de variation : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
5. convexité : la fonction exp est convexes sur $\mathbb{R}$
6. Inégalité de convexité fondamentale : pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$.

Le nombre e

On pose $\exp(1) = e$. La calculatrice donne :

$$e \approx 2,718281828.$$

propriétés algébriques

Théorème 36
Pour tous réels a et b,

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Théorème 37
Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n

- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(\dfrac{a}{n}) = \sqrt[n]{\exp(a)}$ $(n \geqslant 1)$.

Application $\exp(n) = e^n$

La notation e^x

Par convention, on prolonge à $\mathbb{R}$ l'égalité précédente valable sur $\mathbb{Z}$ pour tout x réel, $\exp(x) = e^x$.

Propriétés asymptotiques

Théorème 38

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

II. La fonction logarithme Népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0+\infty[$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. Sa fonction réciproque, définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée logarithme Népérien, on note $\ln(x)$ le logarithme Népérien du nombre x.

Définition 20
La fonction logarithme Népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est notée ln.

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in]0;+\infty[\end{cases} \quad \text{est équivalent à} \begin{cases} x = e^y \\ y \text{ réel} \end{cases}$$

Théorème 39
- La fonction logarithme n'est définie que pour $x > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(\frac{1}{e} = -1$
- **Pour tout réel** x, $\ln(e^x) = x$
- **Pour tout réel strictement positif**,$e^{\ln(x)} = x$

Propriétés asymptotiques

Théorème 40

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

Propriétés algébriques

Théorème 41
Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Théorème 42
Pour tous réels strictement positifs a et b, et pour tout entier relatif n

- ⋆ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- ⋆ $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- ⋆ $\ln a^n = n \ln a$
- ⋆ $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$

Dérivation, Variations et signe

Théorème 43
La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifie :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Théorème 44
une limite à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Théorème 45
inégalité de convexité fondamentale :
Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\ln(x) \leqslant x - 1$$

Théorème 46
Dérivée d'une composée
Si u est une fonction dérivable sur un ensemble E et **à valeurs strictement positives** alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur E et on dispose de l'égalité :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

III. logarithme décimal

Définition

On note log la fonction définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Formules à connaître

$$\forall x > 0 \quad \log'(x) = \frac{1}{x \times \ln 10}$$
$$\forall a, b > 0 \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

IV. Exercices

Exercice 87. Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1. $\ln x$
2. $\ln(3 - x)$
3. $\ln(x + 2)$
4. $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 88. Simplifier.

1. $e^{\ln 3}$
2. $e^{-\ln 5}$
3. $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
4. $\ln(e^5)$
5. $\ln 1 + \ln e$
6. $\ln(e^{-2})$

Exercice 89. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = \ln 7 + \ln 8$
2. $B = \ln 20 - \ln 4$
3. $C = -\ln 4 + \ln 28$
4. $D = 3 \ln 2$
5. $E = -2 \ln 4$

Exercice 90. Dans chacun des cas, comparer les réels A et B.

1. $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$
2. $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$
3. $A = 3 \ln 2$ et $B = 2 \ln 3$
4. $A = \ln 25$ et $B = 2 \ln 5$

Exercice 91. Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 2$
2. $e^x = -5$
3. $e^x = \dfrac{1}{4}$

Exercice 92. Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
2. $\ln x = \dfrac{\ln 5}{2}$
3. $\ln x = -\ln 9$

Exercice 93. Résoudre les équations suivantes.

1. $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$
2. $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$
3. $(\ln x)(6 - 3 \ln x) = 0$

Exercice 94. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geqslant 1$
2. $\ln(x) > -2$
3. $\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
4. $\ln(x) < 3$

Fonction ln

Exercice 95. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1. 0 a un seul antécédent par f.
2. L'image de 1 par f est e.
3. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
4. L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
5. Il n'existe aucun réel x tel que $\ln x > 100$.

Propriétés algébriques

Exercice 96. Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5)+\ln 2$
2. $3\ln 2-\ln 4$
3. $(\ln(\mathrm{e}^3))^2$
4. $\mathrm{e}^{\ln 2+\ln 3}$

Exercice 97. Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1. $A=\mathrm{e}^{2\ln 3}$
2. $B=\mathrm{e}^{4\ln 2}$
3. $C=\mathrm{e}^{-\ln 4}$
4. $D=\mathrm{e}^{-5\ln 2}$

Exercice 98. Simplifier au maximum les expressions
suivantes :

1. $A=\mathrm{e}^{\ln 6-2\ln 3}$
2. $B=\mathrm{e}^{3\ln 2-\ln 4+1}$
3. $C=\dfrac{\mathrm{e}^{\ln 5-1}}{\mathrm{e}^{2+\ln 5}}$
4. $D=\dfrac{\mathrm{e}^{2\ln 3-\ln 2}}{\mathrm{e}^{-3\ln 2}}$

Exercice 99. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A=2\ln 5+\ln 3$
2. $B=3\ln 3-2\ln 2$
3. $C=-\ln 5+3\ln 2$
4. $D=3\ln 4-3\ln 2$

Exercice 100. Exprimer chacun des nombres suivants en
fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
4. $3\ln 2-\ln 16$

Exercice 101. Exprimer chacun des nombres suivants en
fonction de $\ln 3$.

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $\ln 24-\ln 8$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)+\ln 4$
4. $2\ln 3-\ln 27$
5. $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$

Exercice 102. Exprimer chacun des nombres suivants en
fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1. $\ln 20$
2. $\ln 100$
3. $\ln\left(\dfrac{4}{25}\right)$
4. $\ln\sqrt{10}$

Exercice 103. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$
2. $\ln 441$
3. $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$
4. $\ln\sqrt{21}$

Exercice 104. On donne les encadrements suivants :

$$0,69<\ln 2<0,70 \text{ et } 1,60<\ln 5<1,61.$$

En déduire, sans calculatrice, les encadrements des nombres suivants.

1. $\ln 4$
2. $\ln\left(2^5\right)$
3. $\ln\dfrac{5}{2}$
4. $\ln\dfrac{16}{25}$

Équations

Exercice 105. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln x=2$;
2. $\ln x=-1$;
3. $3\ln x-9=0$.

Exercice 106. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x+5)=\ln 3$;
2. $\ln(x^2)=\ln 9$;
3. $\ln(x^2+x)=\ln 6$.

Exercice 107. Résoudre les équations suivantes :

1. $2+3\ln x=14$;
2. $\ln(x^2)=\ln 9$;
3. $\mathrm{e}^{2-3x}=5$;
4. $2\mathrm{e}^{2x}-10=0$.

Exercice 108. Justifier les résultats suivants obtenus avec le
logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 resoudre(ln(x+3)=2)
        exp(2)-3
2 resoudre(ln(6-x)=ln(x-2))
        4
3 resoudre(ln(x-2)+ln(x-2)=0)
        3
```

Exercice 109. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2-x)+1=0$;
2. $\ln x+\ln(x-1)=\ln 5$;
3. $\ln(3x)-\ln(1-x)=\ln 2$.

Exercice 110.
1. Résoudre l'équation $X^2-2X-15=0$.
2. En déduire les solutions des équations suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}-15=0$;
   (b) $(\ln x)^2-2\ln x-15=0$.

Exercice 111. Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+3=0$ (on pourra poser $X=\mathrm{e}^{x}$).
2. $2(\ln x)^2+5\ln x-3=0$ (on pourra poser $X=\ln x$).

Inéquations

Exercice 112. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2-3x)\geqslant 0$;
2. $\ln(1-x)<1$;
3. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)>\ln 3$.

Exercice 113. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\ln(x)\geqslant\ln(2-x)$;
2. $\ln(x)+\ln(2x+5)\leqslant\ln 3$;
3. $\ln(4x)-\ln 2<2\ln 4$.

Exercice 114. Justifier les résultats suivants obtenus avec le
logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 resoudre(ln(3x)-2ln(x)>=0)
        (x>0)and (x<=3)
2 resoudre(ln(x*(x+1))<ln(6))
        ( (x>(-3))and (x<(-1)),  (x>0)and (x<2)  )
```

Exercice 115. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x}>3$
2. $\mathrm{e}^{x}\leqslant\dfrac{1}{2}$
3. $\mathrm{e}^{x}<-\mathrm{e}$

Exercice 116. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\mathrm{e}^{x}-3>9$
2. $4\mathrm{e}^{x}-1\geqslant\mathrm{e}^{x}+5$
3. $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}<0$

Exercice 117. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(-2x+1)\leqslant 0$
2. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)\geqslant 0$
3. $\ln(2x-1)+1>0$

Exercice 118. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction ln, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n\leqslant 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n>10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1}<0,6$.

Exercice 119. Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\dfrac{1}{5}$.
Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Limites

Exercice 120. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\ln x)^2-\ln x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^2\right)$

Exercice 121. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\left((\ln x)^2-3\ln x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to0}\left(-(\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

Étude de fonction

Exercice 122. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x>0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4. En déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ que l'on précisera.

Exercice 123. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur
l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. $f(x)=3x+5-\ln x$
2. $f(x)=\ln x+x^4$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}+4\ln x$
4. $f(x)=(\ln x)(x+1)$

Exercice 124. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur
l'intervalle I indiqué.

1. $f(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x-1}$ sur $I=]1;+\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$.
3. $f(x)=(\ln x)^3$ sur $I=]0;+\infty[$.
4. $f(x)=\sqrt{\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$.

Exercice 125. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur
l'intervalle I indiqué.

1. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ sur $I=]0;1[$
2. $f(x)=(\ln x)^2(3-\ln x)$ sur $I=]0;+\infty[$
3. $f(x)=(2-\ln x)(1-\ln x)$ sur $I=]0;+\infty[$
4. $f(x)=\mathrm{e}^{5\ln x+2}$ sur $I=]0;+\infty[$

Exercice 126. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$
2. $f(x)=5x-x\ln x$
3. $f(x)=\dfrac{3-\ln x}{x}$

Exercice 127. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I.

1. $f(x)=2-5(\ln x)^2$ sur $I=]0;+\infty[$
2. $f(x)=\dfrac{4}{\ln x}$ sur $I=]0;1[$
3. $f(x)=\mathrm{e}^{2\ln x-x}$ sur $I=]0;+\infty[$

Exercice 128. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln x+x^2.$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son
ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
5. À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Exercice 129. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère
orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.
2. (a) Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
3. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

4. Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Construire $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 130. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère
orthonormé.

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.

Fonction $\ln(u)$

Exercice 131. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x-3)$
2. $g : x \mapsto \ln(-8x+4)$
3. $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

Exercice 132. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(5x-1)$, $I = \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$
2. $f(x) = \ln(9-x^2)$, $I =]-3;3[$
3. $f(x) = \ln(1+e^x)$, $I = \mathbb{R}$

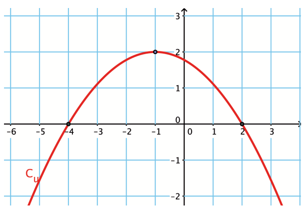
Exercice 133. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(3x^2-5x+7)$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln(9-3x)$, $I =]-\infty;3[$
3. $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$, $I =]-1;5[$

Exercice 134. Dans chaque cas, étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

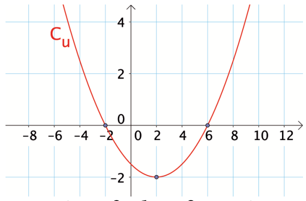
1. $f(x) = \ln(6-2x)$, $I =]-\infty;3[$
2. $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln(e^x-1)$, $I =]0;+\infty[$

Exercice 135. On donne ci-dessous la courbe représentative C_u d'une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u)$.
2. Étudier les limites de la fonction $\ln(u)$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $\ln(u)$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln(u)$.

Exercice 136. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la courbe suivante.

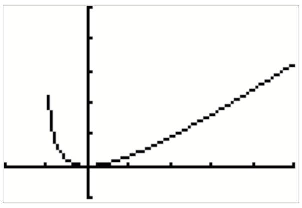


Exercice 137. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

On a représenté ci-dessous la fonction f à l'aide d'une calculatrice.

```
FENETRE
 Xmin=-2
 Xmax=5
 Xgrad=1
 Ymin=-1
 Ymax=5
 Ygrad=1
↓Xres=1
```



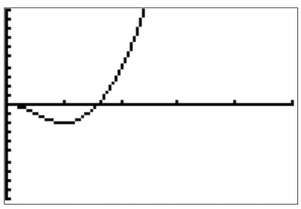
1. Conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudier la limite de f en -1. En donner une conséquence graphique.
   (b) Montrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
   (c) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Démontrer la conjecture établie au 1).

Exercice 138. Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln\left(x^2+1\right).$$

La courbe de f a été tracée à l'aide d'une calculatrice.

```
FENETRE
 Xmin=0
 Xmax=5
 Xgrad=1
 Ymin=-1
 Ymax=1
 Ygrad=.1
↓Xres=1
```



1. Conjecturer :

   (a) le sens de variation de f ;
   (b) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Pour tout réel $x \in [0;5]$, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0;5]$.
   (b) Donner un encadrement de la solution non entière α d'amplitude 10^{-2}.
   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

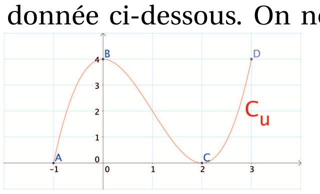
Exercice 139. Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,4[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel $x \in]-4\,;\,4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un élément de symétrie.
2. Étude de f sur $[0\,;\,4[$.
   (a) Déterminer la limite de f en 4. En donner une conséquence graphique
   (b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,4[$.
   (c) En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,4[$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
   (e) Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
3. Tracer précisément la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Exercice 140. Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1;\,3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ est donnée ci-dessous. On note f la



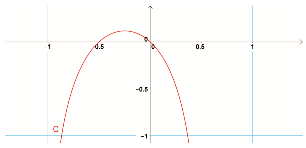
fonction $\ln(u)$.

1. Justifier que f est définie sur $]-1;2[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Étudier les limites de f en -1 et en 2.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Discuter selon les valeurs du réel k, le nombre de
   solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 141. Soit f la fonction définie sur $\left]-1\,;\frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
   Vérifier graphiquement le résultat.
2. (a) La courbe $\mathscr{C}$ semble-t-elle admettre une tangente horizontale ? Si oui, en quel point ?
   (b) Démontrer cette conjecture.

Logarithmes et suites

Exercice 142. En 2015, la population d'une ville compte
250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2 %. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Exercice 143. Placement Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

Exercice 144. Absorption d'un médicament Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h.
Combien de temps faut-il attendre pour que 99 % du médicament ait disparu de l'organisme ?

Exercice 145. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
$1+5+5^2+...+5^n \geqslant 10^9$.

Exercice 146. Comportement d'une suite **Étude d'une fonction**
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x.$$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire que, pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

Étude d'une suite récurrente
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

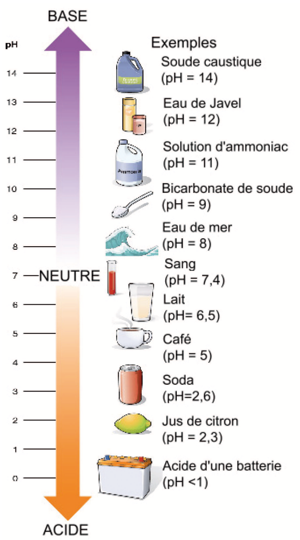
1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Logarithme décimal

Exercice 147. Résoudre les équations suivantes dans $]0;+\infty[$.

1. $\log(x) = 1$
2. $\log(x) = -3$
3. $\log(x) = 5$
4. $\log(x) = 0$

Exercice 148.



Le pH d'une solution en fonction de la concentration des ions oxonium est donné par la formule :
pH $= -\log\left[H_3O^+\right]$ où $\left[H_3O^+\right]$ est exprimée en moles par litres.

1. Calculer le pH d'une eau savonneuse dont la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ est de 5×10^{-10}.
   Cette solution est-elle acide ou basique ?
2. Calculer la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ des solutions suivantes :
   (a) eau pure de pH 7 ;
   (b) soda de pH 2,6 ;
   (c) eau de mer de pH 8.
3. Comment varie la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ quand le pH augmente ?

Exercice 149. Le niveau d'intensité sonore L (en décibels) d'un son est donnée par la formule : $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son (en W·m^{-2} et I_0 le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). On prendra $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}

1. Compléter le tableau suivant :

L (en dB)	I (en W·m^{-2})	Exemple
140		Avion au décollage
	1	Discothèque
100		Marteau piqueur
	10^{-4}	Restaurant scolaire
60		Salle de classe
	10^{-5}	Conversation normale
20		Vent léger

2. Lorsque l'intensité I double, de combien de décibels augmente L ?
3. Lorsque L augmente de 20 dB, par combien est multiplié I ?

Histoire : Le bel (B) et le décibel (dB) sont des unités acoustiques nommées ainsi en l'honneur du scientifique Alexander Graham Bell. Il est principalement connu pour l'invention du téléphone en 1876.

Problèmes

Exercice 150. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 1)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer des équations des tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement aux points A et B.

Exercice 151 — Carbone 14 À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années. Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique. L'âge de l'objet $A(x)$ en années est modélisé par $A(x) = -k\ln x$ où k est une constante et x est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.

1. La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5 730 ans. En déduire la valeur de k (arrondir à l'unité).
2. Dans la suite, on prendra $A(x) = -8267\ln x$.
   (a) Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?

Le pied de pélican (*Aporrhais pespelecani*)

(b) Quelle est la proportion en carbone 14, de la momie de Xin Zhui âgée de 2170 ans ?

Exercice 152 — Bactéries Le nombre de bactéries présentes dans une culture après t jours est donné par :
$N(t) = a\mathrm{e}^{bt}$, où a et b sont deux constantes réelles.

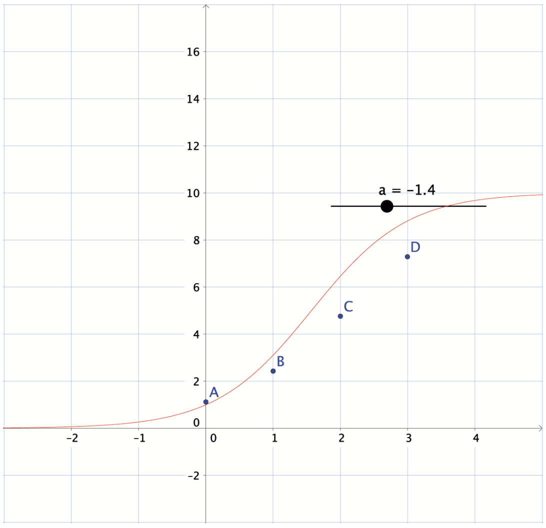
1. Calculer a et b sachant qu'initialement, il y a 10 000 bactéries et qu'au bout de deux jours, il y a 50 000
bactéries.
2. Quel sera le nombre de bactéries au bouts de 6 jours ? (arrondir à l'unité)
3. Au bout de combien de jours, la culture dépassera-t-elle 400 000 bactéries ?

Exercice 153 — Modélisation Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants équipés d'une tablette dans un pays de 60 millions d'habitants.

Année	2012	2013	2014	2015
Effectif (en millions)	1,12	2,43	4,76	7,29

On souhaite modéliser par une fonction cette situation. x désigne le temps, en années, écoulé depuis 2012.
On donne $f(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{ax}+1}$ où a est un réel. $f(x)$ désigne le nombre d'habitants équipés, en millions.

1. (a) À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C et D issus des données statistiques. Créer un curseur a variant entre -5 et 5 avec un incrément de $0,1$. Représenter la fonction f.



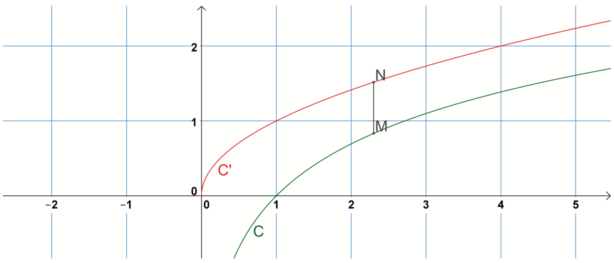
(b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, f semble-t-elle donner une modélisation satisfaisante de la situation ?

2. Dans la suite, on prend $a = -1,08$.

   (a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 9$. Interpréter ce résultat.

   (b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 154 — Limite d'une distance Dans un repère orthogonal, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction ln et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction racine carrée.
Soit x un réel strictement positif. On note respectivement M et N les points de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'abscisses x.



1. Construire cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Quelle semble être la limite de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
3. (a) Pour tout réel $x > 0$, montrer que :

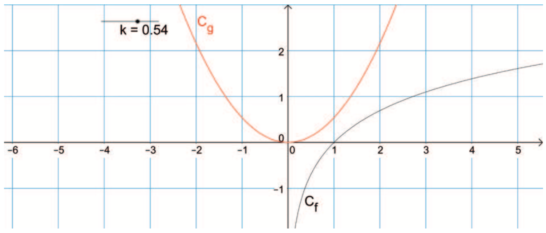
$$\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x}\left(1 - 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).$$

   (b) Démontrer la conjecture établie au 2.

Exercice 155 — Nombre de solutions d'une équation Soit k un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\ln x = kx^2 \text{ avec } x > 0.$$

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k variant de -2 à 2 avec un incrément de $0,01$.
   Représenter les fonctions ln et $x \mapsto kx^2$.



(b) On suppose $k > 0$. Trouver à l'aide du logiciel, une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) semble admettre une unique solution.

(c) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).

2. On suppose $k < 0$. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

D'après épreuve pratique 2007

Fiche 8

Analyse- Fonctions
Limites d'une fonction

I. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Nous considérons des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[M, +\infty[$, et nous adoptons une définition analogue à celle énoncée pour les suites.

Définition 21

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

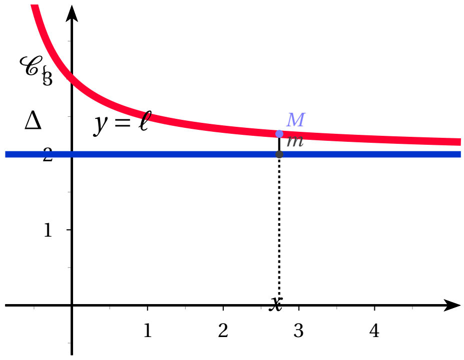
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique : asymptote horizontale

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) la distance Mm tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



limites en $+\infty$ des fonctions usuelles

Le théorème ci-dessous nous livre les limites en $+\infty$ pour un grand nombre de fonctions usuelles.

Théorème 47

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

Démonstration : Admis. □

Remarque
Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en $+\infty$. C'est le cas de la fonction sin par exemple. Résultat admis.

II. Limite en un réel a

On considère une fonction définie sur un intervalle contenant a ou sur un intervalle de borne a du type $]..., a[$ ou $]a, ...[$.

Définition 22

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a . Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a. Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a. Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Limite à gauche et à droite en un réel a

Définition 23

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a à gauche, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur à a . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a à gauche, si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur à a. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a à gauche si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a à droite, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a à droite, si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a. Nous noterons

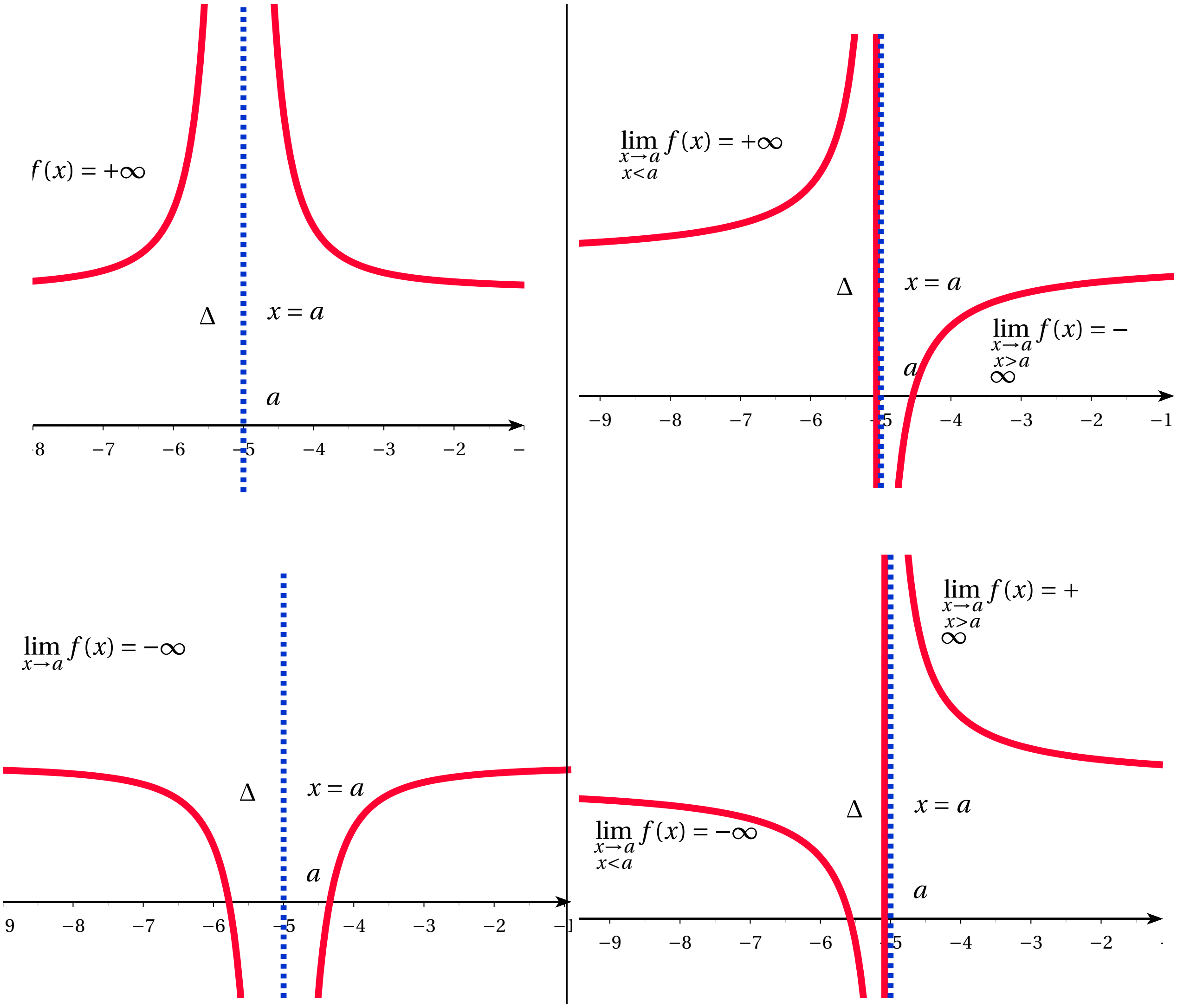
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a à droite si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Asymptote parallèle à (Oy)

Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $+\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Cette définition se généralise aux limites à gauche et limites à droites.



Limites des fonctions usuelles en a

Théorème 48

— **Fonction usuelle définie en a**

Lorsque la fonction f est une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions :

si f est définie en a alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

— **Fonction non définie en a**

— exemples fondamentaux :

— $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$

— $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$

— $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$

— Si pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ et si g est une fonction usuelle définie en a alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$

— On rappelle que dire que f est dérivable en a signifie que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Application : $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Exemple : limite de $f : x \mapsto \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}$ en 3. Soit x un nombre différent de 3, $x^2 + 7x - 30 = (x - 3)(x + 10)$ donc $f(x)$ se simplifie en $f(x) = x + 10$. Nommons g la fonction $x \mapsto x + 10$, $\lim_{x \to 3} f(x) = g(3) = 13$.

III. Opérations sur les limites

Dans chaque cas, il s'agit de limites au même « point a », a réel ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$:

III.1. Limite d'une somme

Théorème 49
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $f(x) + g(x)$.)

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

III.2. Limite d'un produit

Théorème 50
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $f(x) \times g(x)$.)

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' = 0$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	?	?
$\ell \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	?	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

III.3. Limite d'un quotient

Théorème 51
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $\frac{f(x)}{g(x)}$.)

$\lim f$ \ $\lim g$	0	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	?	0	0	0
$\ell \neq 0$	?	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	?	$\pm\infty$	?	?
$-\infty$	?	$\pm\infty$	?	?

Remarque si $\ell' = 0$ on peut conclure lorsque g garde un signe constant au voisinage de a. Si besoin, on peut séparer en une étude à gauche et droite de a lorsque cela a un sens.
Exemple : $\lim\limits_{x\to 3} 1 - x = -2$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^3 = 0$ et le nombre $(x-3)^2$ est positif au voisinage de 3, donc $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1-x}{(x-3)^2} = -\infty$

IV. Exercices

Exercice 156. Démontrer les résultats énoncés dans le théorème donnant les limites des fonctions usuelles en $+\infty$.

Exercice 157. Est-il vrai qu 'il existe A strictement positif tel que pour tout x supérieur à A, $-1 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$?

Exercice 158. Est-il vrai qu 'il existe r strictement positif tel que pour tout x strictement positif et strictement inférieur à r, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 100$?

Exercice 159. Est-il vrai qu 'il existe r strictement positif tel que pour tout x strictement inférieur à r, $\frac{1}{x} > 100$?

Exercice 160. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ au point a après avoir éventuellement simplifié :

1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x^3}{x^2}$ avec $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}$ avec $a = -2$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$ avec $a = 0$
4. $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ avec $a = 3$

Exercice 161. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ en $+\infty$ à l'aide des opérations sur les limites :

1. $f(x) = 3x^3 + \sqrt{x}$
2. $f(x) = -x - \sqrt{x}$
3. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = -x(x+1)$
5. $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{X}$
6. $f(x) = -5x\sqrt{x}$
7. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x}}$
8. $f(x) = (1-x)(2-x)(3-x)$
9. $f(x) = 3x^2 - x + 1$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}$

Exercice 162. « Tout polynôme a la même limite en $+\infty$ que son terme de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

Exercice 163. « Toute fraction rationnelle a la même limite en $+\infty$ que le quotient simplifié des termes de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

Fiche 9

Analyse- Fonctions
Limites d'une fonction- Théorèmes de comparaison

I. Théorèmes de comparaisons

Les résultats ci-dessous permettent dans certains cas, de déterminer la limite lorsque x tend vers a (a fini ou infini) d'une fonction f, par comparaison à d'autres fonctions u, v... dont le comportement est connu.

Théorème 52

— **Théorème des « gendarmes »** : Si, pour tout x « assez voisin de a » , on a l'encadrement $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, et si u et v ont la même limite ℓ en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

— **Cas d'une limite infinie** : si pour tout x « assez voisin de a », $f(x) \geqslant u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

— **Cas d'une limite infinie** : si pour tout x « assez voisin de a », $f(x) \leqslant u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

II. Application à connaître absolument

On démontre grâce à ce théorème le résultat suivant :

Theorem 1. — *Inégalité : pour tout x réel,* $\exp(x) \geqslant x + 1$

— *Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

— *Croissances comparées :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

— *Encore plus fort : Pour tout n entier naturel,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Démonstration :
- Obtention de l'inégalité : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(x) - (x+1)$. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi'(x) = \exp(x) - 1$ et sa dérivée seconde est $\varphi''(x) = \exp(x)$. Ainsi, la fonction φ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On peut donc conclure que φ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi'(0) = 0$, donc φ' est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$. Le minimum de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ est donc atteint lorsque $x = 0$. Or la valeur de φ en 0 est 0. Ainsi, pour tout x réel, $\varphi(x) \geqslant 0$. Ce qui se traduit encore par, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$.
- Détermination de la limite de exp en $+\infty$. On vient de démontrer que, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$. En utilisant, le théorème de comparaison précédent, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
- Détermination de la limite de $\dfrac{\exp(x)}{x}$ en $+\infty$. On sait que, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$. Or, pour tout x réel, $x+1 > x$. Donc, pour tout x réel, $\exp(x) > x$. En particulier, pour tout x réel strictement **positif**, $\exp(x) > x$. Soit x un réel positif, en remplaçant x par $\dfrac{x}{2}$ dans l'inégalité précédente, on obtient, $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) > \dfrac{x}{2}$. Appliquons la fonction carrée aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient, $\left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, $\exp(x) > \dfrac{x^2}{4}$. Divisons enfin par x qui est strictement positif, $\dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{4}$. Il ne reste plus qu'à observer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$. Fin.
- Reprenons chaque point précédent en adaptant : soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul, en remplaçant x par $\dfrac{x}{n+1}$ dans l'inégalité $\exp(x) > x$, on obtient, $\exp\left(\dfrac{x}{n+1}\right) > \dfrac{x}{n+1}$. Appliquons la fonction puissance $n+1$ aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient, $\left(\exp\left(\dfrac{x}{n+1}\right)\right)^{n+1} > \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, $\exp(x) > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Divisons enfin par x^n qui est strictement positif, $\dfrac{\exp(x)}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$. Il ne reste plus qu'à observer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$. Fin. $\square$

III. Exercices

Exercice 164. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \cos x - 3x$

Exercice 165. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 166. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x c'est à dire l'unique entier p vérifiant $p \leqslant x < p+1$.

Exercice 167. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{5\lfloor x \rfloor}{x}$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x c'est à dire l'unique entier p vérifiant $p \leqslant x < p+1$.

Exercice 168. Représenter la fonction $x \mapsto x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur l'écran de votre calculatrice. Montrer cette fonction admet une limite en 0.

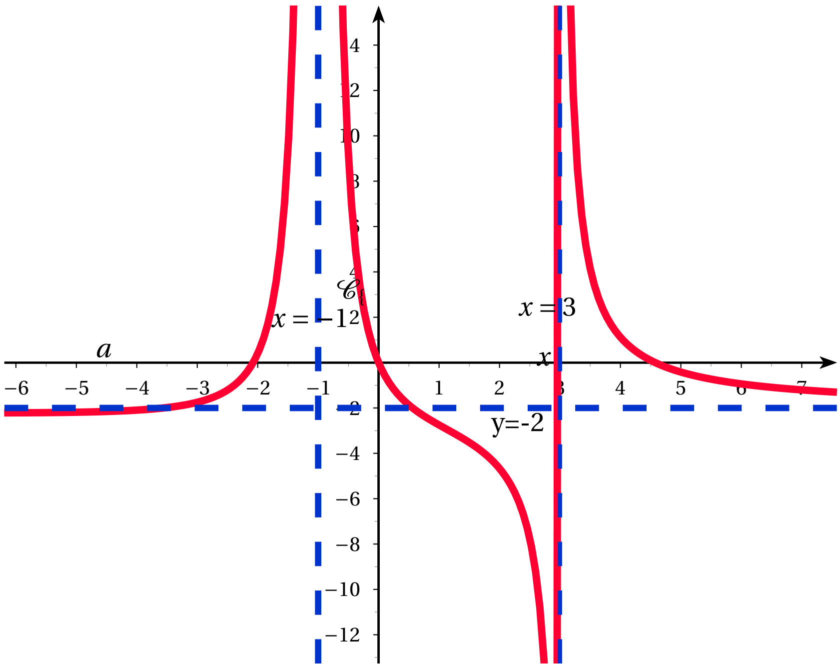
III.1. avec l'exponentielle

Exercice 169. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{-x} + e^x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{3}{6+2e^{-x}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$
4. $k : x \mapsto e^x - x$

III.2. Asymptotes

Exercice 170. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1;3\}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.



Exercice 171. Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

III.3. Asymptote oblique

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. De même, On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Exercice 172. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique et étudier sa position relative par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = -dfrac1x^2 - 1 - x$
3. $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{x}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}x - x^{-n}\ (n \geqslant 1)$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{8x^2 - 4x + 1}{2x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{3x^2}{2-x}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
9. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Fiche 10

Analyse- Fonctions Limites d'une fonction- Limite d'une fonction composée

Théorème 53
a, b et ℓ sont chacun des réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$,
si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

Exemple
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^2+1} = 2$ et $\lim\limits_{y\to 2}\sqrt{y} = \sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2+1}} = \sqrt{2}$

.1. Application importante : limite en $-\infty$ de l'exponentielle

Théorème 54
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x) = 0$ où $n \geqslant 1$

Exercice 173. Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

1. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ en 0
4. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$ en 0
5. $f(x) = \dfrac{\exp(x^2)}{x^6}$ en $+\infty$
6. $f(x) = \exp(-x^2)x^{100}$ en $+\infty$
7. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0

.2. limites en vrac

Exercice 174. Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

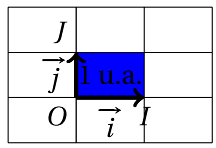
1. $f(x) = \dfrac{-8x^2+1}{5x^2+x+1}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \dfrac{x(5-2x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{x^n}{2x^2+1}$ en $-\infty$. discuter selon les valeurs de n
4. $f(x) = x\sqrt{x} - 5x^2$ en $+\infty$
5. $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ en 9
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ en 0
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ en 2
9. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2}$ en 0
10. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x$ en $+\infty$
11. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x$ en $-\infty$
12. $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$
13. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ en $-\infty$

Thème : Intégrale

Fiche 1

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

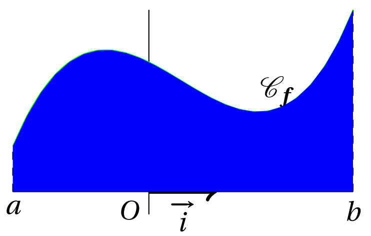
Sesamaths



Définition 24
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
L'unité d'aire , que l'on note u.a. est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 25
Notion d'intégrale Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
L'intégrale de a à b de f est la mesure de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cette aire se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Remarques

— a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.

— La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

— Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.

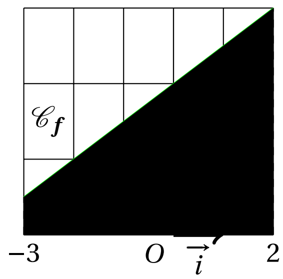
— Le symbole $\int$ est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3;2]$.

Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{0,5+3}{2} \times 5 = 8,75$$



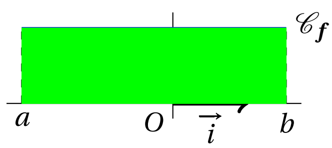
Les unités graphiques étant 0,6 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente 0,6 cm^2 et donc l'aire coloriée représente 5,25 cm^2.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 1$ définie sur $[a;b]$.

Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur 1. Ainsi :

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

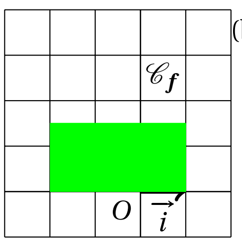


II. Exercices

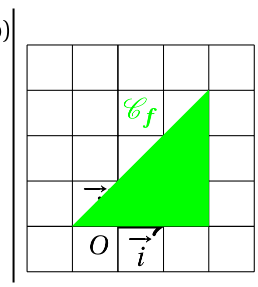
Exercice 175. Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1. l'expression de la fonction f représentée en rouge ;
2. la description du domaine coloré ;
3. l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;
4. l'aire de ce domaine, en u.a.

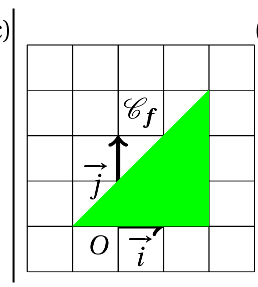
(a)



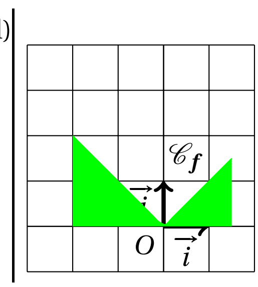
(b)



(c)



(d)

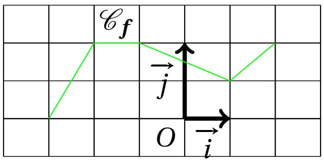


Exercice 176. Dans chacun des cas suivants :

1. représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée ;
2. décrire ce domaine ;
3. donner la valeur de son aire, en u.a.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$ | (b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x$ | (c) $\displaystyle\int_{0}^{3,5} x\,\mathrm{d}x$ | (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} (4-x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 177. Soit f une fonction continue sur $[-3\,;2]$ représentée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ ci-dessous :



Dans chacun des cas suivants, calculer :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ | 2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ | 3. $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Fiche 2

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 55
Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a;b]$ et on a $F' = f$.

Démonstration : On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.
Pour tout $x \in [a;b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;x]$.
Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a;b]$. On considère alors, pour tous $x \in [a;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a;b]$:

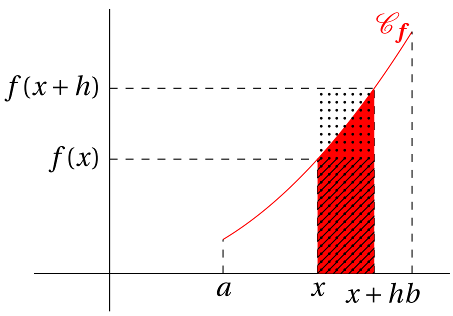
$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

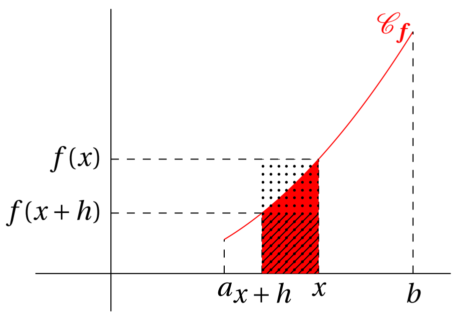
Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h)-F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x;x+h]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$f(x)h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant f(x+h)h \quad \iff \quad f(x) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x+h).$$

Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x)-F(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x+h;x]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$f(x+h)(-h) \leqslant F(x)-F(x+h) \leqslant f(x)(-h) \quad \iff \quad f(x+h) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x).$$





□

f étant une fonction continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas, d'après le théorème des gendarmes , on conclut que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x}(x) = f(x)$.

II. Exercices

Exercice 178. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie aussi sur $[a;b]$.

1. Déterminer $F'(x)$.
2. Étudier les variations de F sur $[a;b]$.

Exercice 179. Dans chacun des cas suivants :

1. donner un intervalle I sur lequel on peut appliquer le théorème ;
2. déterminer $F'(x)$, pour tout $x \in I$.

(a) $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t$

(b) $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(c) $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-5}^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(d) $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x |1-t|\,\mathrm{d}t$

(e) $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^x \ln|t|\,\mathrm{d}t$

Fiche 3

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Primitives d'une fonction continue

Définition 26
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque
On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple
Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F_1' = F_2' = f$.

Théorème 56 (Existence de primitives)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration : On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Soit f une fonction continue sur I et notons m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. D'après le théorème précédent, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.
Étant donné que l'on cherche une fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. □

Théorème 57 (Lien entre les primitives)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : — Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.

La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

— Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I. □

Propriété 4
Condition d'unicité de la primitive Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration : — **Existence :** soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

— **Unicité :** notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I. □

Remarque
Pour tout $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc *la* primitive de f sur I s'annulant en x_0. En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

Exercice 180. **Utiliser les propriétés élémentaires des primitives** Soient φ et ψ les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{x^3}{3}.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $[1\,;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 3$.

correction

1. (a) $f : t \mapsto t^2$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ donc d'après le théorème , φ est définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a $\varphi' = f$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$, $\psi'(x) = x^2$.
   (b) ψ est une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$ donc φ est de la forme $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ pour tout $x \geqslant 1$. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1) + k$ et donc $0 = \dfrac{1}{3} + k$, c'est-à-dire $k = -\dfrac{1}{3}$. On en déduit alors que pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \psi(x) - \dfrac{1}{3}$.
2. Les primitives de f sur $[1\,;+\infty[$ sont donc de la forme $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

   $F(1) = 3$ donc $\dfrac{1}{3} + k = 3$ donc $k = \dfrac{8}{3}$ et ainsi $F(x) = \dfrac{x^3 + 8}{3}$ pour tout réel $x \geqslant 1$.

Propriété 5
Calcul pratique d'une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

Démonstration : Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.
Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$.
Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$ et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

Exemple
On souhaite calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0;1]$.
En remarquant que $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0;1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

II. Exercices

Exercice 181. Soient φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que :
   (a) $F(0) = 0$
   (b) $F(1) = 0$

Exercice 182. Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les fonctions φ et ψ définies sur $[1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \psi(x) = x\ln(x) - x.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 0$ et $F(\mathrm{e}) = 0$.

Exercice 183. Même consigne qu'à l'exercice avec les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 1$ et $F(2) = 0$.

Exercice 184. Dans l'exercice précédent, la relation entre φ et ψ a été établie pour tout réel x strictement positif.

1. Pourquoi n'a-t-on pas pu établir la relation pour $x = 0$ alors que φ et ψ sont bien définies en 0 ?
2. Étudier le cas particulier $x = 0$.

Exercice 185. Soient $F : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x + 1}$ définies sur $I =]-\infty; -1[$.

1. Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur I ?
2. Si oui, laquelle ?

Exercice 186. Même consigne avec les fonctions $F : x \mapsto \ln(7x)$ et $G : x \mapsto -\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$ définies sur $I =]0; +\infty[$.

Exercice 187. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1. En reconnaissant une forme connue de dérivée, déterminer une primitive H_1 de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout réel t, écrire $h(t)$ à l'aide d'un sinus.
   (b) À partir de cette forme, en déduire une primitive H_2 de h sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Représenter graphiquement H_1 et H_2. Ces deux fonctions sont-elles égales ?
   (b) Quelle est la constante qui les différencie ?
4. Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 188. Dans chacun des cas suivants :

1. déterminer les primitives de chacune des fonctions sur l'intervalle donné ;
2. déterminer la primitive F vérifiant la condition donnée.
   (a) $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 1$.
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$ sur $]1; +\infty[$ avec $F(2) = 0$.
   (c) $f : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
   (d) $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = \ln(2)$.

Exercice 189. Un mobile M se déplace de façon rectiligne sur un axe $(O; \vec{i})$, gradué en cm. Son abscisse (en cm) et sa vitesse (en cm·s^{-1}) en fonction du temps $t \geqslant 0$ sont données par les fonctions $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ et $\vec{v} : t \mapsto v(t)$.

1. Rappeler le lien qu'il existe entre $\vec{v}$ et $\vec{x}$.
2. On sait que $\vec{v}(t)$ est donné par $\vec{v}(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t + 1\right)\vec{i}$ et qu'à l'instant $t = 1$ s, le mobile est à 2 cm de l'origine.
   (a) Déterminer $\vec{x}(t)$.
   (b) Quelle est alors sa position à $t = 0$ s ?
   (c) Quand le mobile repasse-t-il par l'origine ? Quelle est alors sa vitesse ?

Fiche 4

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I.

Propriété 6
Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$	$F(x)=-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 190. Déterminer des primitives simples sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x)=x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x)=\dfrac{6}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$
3. $h(x)=\dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

correction

1. f est une fonction de degré 2, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 3.
   Or $(x^3)' = 3x^2$.
   On écrit alors $f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
   $$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
2. g est du type $\frac{1}{x^3}$, continue sur $]-\infty;0[$, une primitive sera donc du type $\frac{1}{x^2}$.
   Or, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.
   On écrit alors $g(x) = (-3) \times \frac{-2}{x^3}$ et les primitives de g sur $]-\infty;0[$ sont définies par :
   $$G(x) = -\frac{3}{x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
3. h est du type $\frac{1}{x}$, continue sur $]0;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.
   Or, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
   On écrit alors $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ et les primitives de h sur $]0;+\infty[$ sont définies par :
   $$H(x) = \frac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Propriété 7 (Primitives et opérations sur les fonctions)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

Exercice 191. Déterminer des primitives sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de f, la fonction u, ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

correction

1. f est du type $u'u^3$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type u^4.
   Or, $\left((2x-1)^4\right)' = 4\times 2\times(2x-1)^3 = 8(2x-1)^3$.
   On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{8}\times 8(2x-1)^3$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
   $$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + k, k \in \mathbb{R}.$$
2. g est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-1$, $u(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.
   Or, $\left(\ln(x^2-1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2-1}$. On écrit alors $g(x) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}$ et les primitives de g sur $]1;+\infty[$ sont définies par :
   $$G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + k, k \in \mathbb{R}.$$
3. h est du type $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, $u(x) \neq 0$ sur I, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{u}$.
   Or, $\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)' = -\dfrac{2}{(2x-1)^2}$. On écrit alors $h(x) = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ et les primitives de h sur I sont définies par :
   $$H(x) = -\frac{1}{2(2x-1)} + k, k \in \mathbb{R}.$$

II. Exercices

Exercice 192. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ sur $]0;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 193. Même consigne qu'à l'exercice précédent

1. $f : x \mapsto x^5 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{4x}$ sur $]0;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 194. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{7}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto x^{-4} + 8x^4$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 195. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty\,;0[$

Exercice 196. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 197. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
3. $f : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ sur $]1\,;+\infty[$

Exercice 198. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Fiche 5

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

I. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu dans les fiches précédentes que, pour une fonction continue et positive sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$. On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a;b]$ avec la définition ci-dessous.

Définition 27
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a;b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple
On souhaite calculer $\int_{-1}^{2}(x^2-2)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur $I = [-1;2]$. Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^{2}(x^2-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\right) = -3.$$

Remarques
- Pour toute fonction f continue en a, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 199. Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère l'intégrale $I = \int_\alpha^\beta \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire une valeur de I.
3. En particularisant α et β, vérifier le résultat obtenu à la question 2) l'exercice

Exercice 200. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2} \, \mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2-1}{x} \, \mathrm{d}x$

Exercice 201. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2 \, \mathrm{d}u$
3. $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 202. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$

Exercice 203. Après avoir rappelé la formule de duplication donnant $\sin(2t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 204. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x+5} \, \mathrm{d}x.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ?
2. Démontrer que pour tout $x \neq -5$, $\dfrac{2x-1}{x+5}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x+5}$, où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 205. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1} \, \mathrm{d}x.$$

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$
où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 206. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas la calculer directement ?
2. Première méthode.
   (a) En remarquant que $1 = e^x + 1 - e^x$, décomposer I en deux intégrales calculables.
   (b) Calculer chacune des deux intégrales et en déduire que $I = -\ln(e+1) + \ln(2) + 1$.
3. Seconde méthode.
   (a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{e^x+1}$ par e^{-x} puis calculer I.
   (b) Vérifier que les résultats, malgré leur forme apparemment différentes, sont bien égaux.

Exercice 207. En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,dt.$$

Exercice 208. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,du.$$

Exercice 209. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt.$$

On pose $f : t \mapsto t\cos(t)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout réel t :
$$f(t) = -2\sin(t) - f''(t).$$
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 210. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-5}^1 xe^x\,dx.$$

On pose $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(x)$.
2. En déduire la valeur de I.

Fiche 6

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

Propriété 8
Linéarité de l'intégrale Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel. Alors :

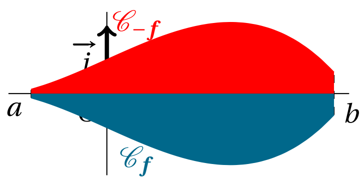
— $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$ | — $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$

Démonstration : Voir exercice. □

Propriété 9 (Fonction négative et aire)
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$ est $-\int_a^b f(x)\,dx$.

Démonstration : On note $\mathscr{D}$ le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[a;b]$.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{E}$, compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$. Ainsi :

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \int_a^b (-f)(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$



□

Exemple
Utiliser la linéarité de l'intégrale Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$.

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?
2. Calculer $I+J$ et $I-J$.
3. En déduire les valeurs respectives de I et J.

correction

1. Aucune des deux fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.

2. Par linéarité de l'intégrale, on a :
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$
De même :
$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$
On reconnaît ici une dérivée de la forme $\frac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$. Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a :
$$I-J=-\Big[\ln(\sin(x)+\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$
3. On doit résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} I+J & = & \frac{\pi}{2} \\ I-J & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2I & = & \frac{\pi}{2} \\ I & = & J \end{array}\right. \iff I=J=\frac{\pi}{4}$$

I. Exercices

Exercice 211. On note F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a;b]$.

1. Démonstration du premier point.
   (a) Donner une primitive de la fonction $f+g$ sur $[a;b]$.
   (b) En utilisant la définition, en déduire une expression de $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de F et G.
   (c) Faire de même avec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   (d) Comparer les résultats.
2. Démonstration du second point.
   (a) Pour tout réel λ, donner une primitive de la fonction λf sur $[a;b]$.
   (b) Démontrer l'égalité.

Exercice 212. On considère les deux intégrales :
$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x \qquad I=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$
1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 213. Même consigne avec les intégrales :
$$I=\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad J=\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 214. On considère les deux intégrales suivantes :
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$
1. De ces deux intégrales, l'une est calculable facilement : la calculer.
2. Calculer $I+J$.
3. En déduire la valeur de l'autre intégrale.

Fiche 7

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- relation de Chasles

Propriété 10
Relation de Chasles Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle. Notons F une primitive de f sur I.
Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

— $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$ par définition.

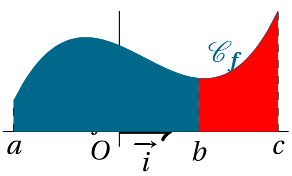
— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie. □

Remarque

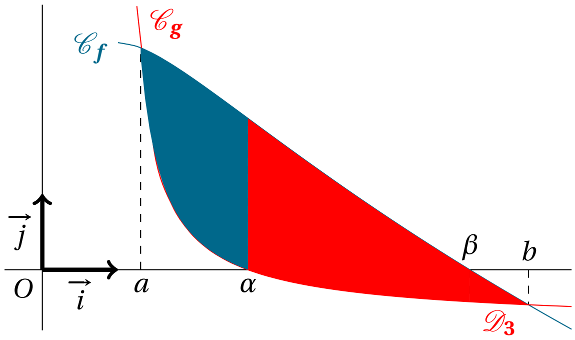
Lorsque f est positive et continue sur $[a;c]$ et que $b \in [a;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} = \mathcal{A}_{\text{totale}}.$$



Propriété 11
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On distingue trois cas, selon que les fonctions sont toutes les deux positives, de signes contraires ou toutes les deux négatives :



— Premier cas.
L'aire de $\mathscr{D}_1$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;\alpha]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Deuxième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_2$ est la somme de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Troisième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_3$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta;b]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_3} = \int_\beta^b (-g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_\beta^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines. □

Exemple
Calculer une aire entre deux courbes

1. Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2. Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

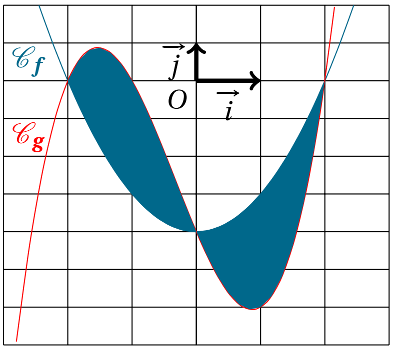
Exercice 215. Soient $f : x \mapsto x^2-4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2;2]$.

correction

1. On calcule la différence $f(x)-g(x) = x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a :

$f(x)-g(x)=(x^2-4)(1-x-1)=-x(x^2-4)$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $I=[-2;2]$ en deux sous-intervalles $I_1=[-2;0]$ et $I_2=[0;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

2. Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=\displaystyle\int_{-2}^{0}x(x^2-4)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}-x(x^2-4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.
D'une part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}=\dfrac{(-4)^2}{4}-\dfrac{0^2}{4}=4$.
D'autre part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}=\dfrac{0^2}{4}-\dfrac{(-4)^2}{4}=-4$.
Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=8$ u.a.

I. Exercices

Exercice 216. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,;b]$ et soit c, un réel appartenant à $[a,;b]$.
Énoncer la relation de Chasles puis la démontrer.

Exercice 217. Soit f définie sur $I=[-1;1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur I.

Exercice 218. Même consigne avec f définie sur $I=[0;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1\leqslant x\leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{2} & \text{si} \quad 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

Fiche 8

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue-
Intégrales et inégalités

Propriété 12
Intégrales et inégalités Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

- Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Démonstration : Voir exercice □

Remarques

Les réciproques de chacun des points de cette propriétés sont fausses.

- Par exemple $\displaystyle\int_0^2 (x^2-1)\,dx = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction $x \mapsto x^2-1$ n'est pas positive sur $[0;2]$: l'image de 0 est -1.
- De même, $\displaystyle\int_0^2 1\,dx \leqslant \int_0^2 x^2\,dx$ puisque $2 \leqslant \frac{8}{3}$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0;2]$.

Exemple

Encadrer une intégrale Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geqslant 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \displaystyle\int_1^a f(x)\,dx$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.
2. En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $0 \leqslant F(a) \leqslant e^{-1}$.

correction

1. Une exponentielle étant toujours positive, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$. De plus, si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$, c'est-à-dire $-x \geqslant -x^2$ et donc $e^{-x} \geqslant f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
   On en déduit donc que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.
2. À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1;a]$ et ainsi :
$$\int_1^a 0\,dx \leqslant \int_1^a f(x)\,dx \leqslant \int_1^a e^{-x}\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant F(a) \leqslant \left[-e^{-x}\right]_1^a.$$
   Cette dernière quantité est égale à $-e^{-a}+e^{-1} \leqslant e^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

I. Exercices

Exercice 219. 1. Le premier point provient de la définition de l'intégrale. Expliquer pourquoi.

2. Pour démontrer le second point, on considère la fonction $h = g - f$ définie sur $[a;b]$. Appliquer le premier point à h puis conclure.

Exercice 220. On considère $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer un encadrement de la fonction à intégrer, sur $[0;\pi]$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale I.

Exercice 221. On considère $I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:
$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$
2. En déduire un encadrement de I.

Exercice 222. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{x\mathrm{e}^x}$ sur $[1;+\infty[$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[n;n+1]$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de u_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 223. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 224. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent , déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par :
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 225. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante.

2. (a) Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$
   (c) Expliquer les égalités suivantes :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_{n+1} - 1.$$
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 226. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que (I_n) est décroissante.
2. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, démontrer que :
$$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{x+1} \leqslant x^n.$$
   (b) Pour tout $n \geqslant 0$, en déduire un encadrement de I_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (I_n).

Exercice 227. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.
   (c) Que peut-on en déduire sur (I_n).
2. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire le signe de $f(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
   (c) En déduire la limite de (I_n).

Fiche 9

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- Valeur Moyenne d'une fonction

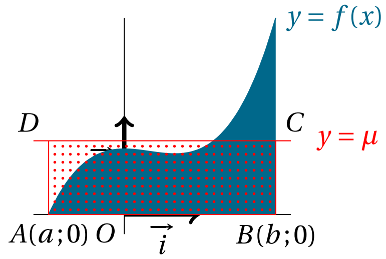
Définition 28
Valeur moyenne Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a; b]$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Exemple
Pour connaître la valeur moyenne de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0; \pi]$, on calcule :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^\pi = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Remarques

— En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a; b]$.

— En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2.

I. Exercices

Exercice 228. Valeur moyenne d'un signal On souhaite calculer la valeur moyenne sur une période de deux types de signaux périodiques.

1. On considère un signal purement sinusoïdal. La fonction le représentant peut se mettre sous la forme $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où u_0 est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ la phase à l'origine.
   (a) Rappeler la plus petite période de la fonction cos.
   (b) Soit T la plus petite période de u. En écrivant que pour tout réel t, $u(t+T) = u(t)$, en déduire une expression de T en fonction de ω.
   (c) Déterminer une primitive de u sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire la valeur moyenne du signal v sur l'intervalle $[a ; a+T]$.
2. On considère la fonction v suivante, représentant un signal triangulaire de période T, où a est un réel :
$$v(t) = \begin{cases} -a\left(\dfrac{4t}{T}+1\right) & \text{si} \quad -\dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant 0 \\ a\left(\dfrac{4t}{T}-1\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \end{cases}.$$
   (a) Représenter graphiquement v pour $a = 1$ et $T = \pi$.
   (b) Quelle semble être la valeur de l'intégrale de v sur l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2} ; \dfrac{T}{2}\right]$?
   (c) Le démontrer dans le cas général.

Exercice 229. **Valeur efficace d'un signal** Si f représente un signal, la valeur efficace f_{eff} de f est par définition la racine carrée de la moyenne sur une période de f^2. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de f.

1. Traduire par une formule la phrase décrivant le calcul de f_{eff}.
2. On reprend les fonctions de l'exo
   (a) Démontrer que la valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal est $u_{\text{eff}} = \dfrac{u_0}{\sqrt{2}}$.
   On pourra utiliser une formule de réduction de $\cos^2(x)$ pour la détermination d'une primitive.
   (b) Démontrer que la valeur efficace du signal triangulaire est $v_{\text{eff}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Remarque
Physiquement, l'intensité efficace d'un courant alternatif i est égale à l'intensité du courant continu dissipant la même énergie que i à travers une résistance sur une période T.

Fiche 10

Analyse-Intégrale
Intégrale d'un produit de fonctions à dérivées continues - Intégration par parties

I. Intégration par parties

Théorème 58
Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur $[a,b]$ et à dérivées continues u' et v' sur $[a,b]$

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple

$$\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 1\times\ln(x)\mathrm{d}x = [x\times\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\mathrm{d}x = 2\ln(2)-1$$

Exercice 230. On admet que la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\arctan(x)$ est $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Soit pour $n\in\mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Soit n un entier naturel, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_2 et I_3.

correction

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^0}\mathrm{d}x = 1$ et $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^1}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
2. Posons pour n entier non nul, $\begin{cases} u'(x)=1 & u(x)=1 \\ v(x)=(x^2+1)^{-n} & v'(x)=-n\times 2x(x^2+1)^{-n-1}\end{cases}$

   Alors
$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$I_n - 2nI_n = \frac{1}{2^n} - 2nI_{n+1}$$

$$(1-2n)I_n - \frac{1}{2^n} = -2nI_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

3. $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

II. Exercices

Exercice 231. Calculer les intégrales $A = \int_0^4 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 232. Calculer les intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t^2)\sin t\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e (3x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 233. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t$

Exercice 234. Calculer $A = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

Exercice 235. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(3x)\mathrm{d}x$

Exercice 236. Calculer $A = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 237. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\mathrm{d}x$

Exercice 238. Calculer $A = \int_0^2 (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Exercice 239. Calculer $A = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 240. Calculer $A = \int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x$

Fiche 11

Analyse-Intégrale
Intégrale -Exercices de synthèse

Exercice 241. **Partie I**

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :
$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,
$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$
   (b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
   Quelle est alors la fonction g ?
2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :
$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$
   (b) Résoudre (F).
   (c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).
   (d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,
$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

(b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

(a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0;1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

(b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

(c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

(d) En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 242. On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0;1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \leqslant x$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R}$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   (a) On pose $I_n = \int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

   (b) Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n+1}$.

   (e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 243. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le sens de variations de cette suite.

   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

   (c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Étudier le sens de variations et le signe de f.

   (b) En déduire le sens de variations de g sur $[0\,;\,1]$.

   (c) Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

   (d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

   (e) Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

   (f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Thème : probabilités Lois discrètes

Fiche 1

Probabilité- Révision sur les variables aléatoires de lois discrètes

Exercice 244. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$,$P(1,3<X<3,5)$.
3. Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.
4. On appelle Fonction de répartition de la variable X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
5. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 245. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
0.92	0.06	0.016	0.004

   Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.
3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 246. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité uniforme sur $\{1,2,3,4,5\}$.

1. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$,$P(1,3<X<3,5)$.
2. Représenter cette loi par un diagramme en bâtons.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Fiche 2

Lois de probabilités discrètes- Loi Uniforme sur $\{1,2,3,\ldots n\}$

I. Introduction

La loi uniforme sur $\{1,2,3,\ldots n\}$ est un exemple de loi de probabilité discrète, c'est à dire une loi de probabilité sur un ensemble fini ou infini "dénombrable" de nombres réels. On s'intéressera à d"autres lois de ce type dans ce chapitre. Pour chacune d'elles, on préciser :

- la loi de probabilité sur l'ensemble des valeurs
- la représentation graphique en bâtons
- La représentation de la fonction de répartition associée
- l'espérance, la variance et l'écart type

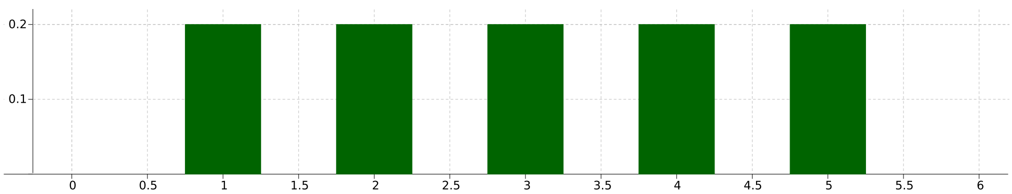
II. La loi uniforme sur $\{1,2,3,\ldots n\}$

Définition 29
Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite suivre la loi uniforme sur $\{1,2,3,\ldots n\}$ si

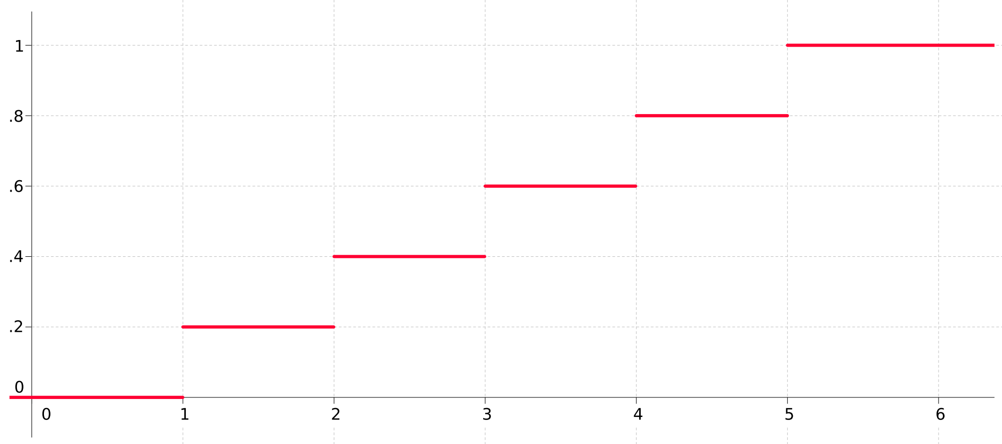
- elle prend pour valeurs possibles les entiers de 1 à n
- la probabilité de prendre chacune de ces valeurs est la même :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ P(X=k)=\frac{1}{n}$$

Propriété 13
Le diagramme en barres de la loi uniforme sur $\{1,2,3,\ldots n\}$ est donné par



Propriété 14
La fonction de répartition de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ est donné par



Propriété 15
Si X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots n\}$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$$

III. Exercices

Exercice 247. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D - E(D)| < \sigma(D))$.

Exercice 248. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X = 3D + 10$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X - E(X)| < \sigma(X))$.

Exercice 249. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X = D^2$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X - E(X)| < \sigma(X))$.

Exercice 250. On lance un dé équilibré et on note D la valeur obtenue. On note $X = \mathrm{e}^D$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|X - E(X)| < \sigma(X))$.

Exercice 251. Prouver la formule donnant l'espérance de X lorsque X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Fiche 3

Lois de probabilités discrètes- Loi de Bernoulli de paramètre p

I. Épreuve de Bernoulli de paramètre

Définition 30
Une épreuve à deux issues l'une appelée **succès** de probabilité p et l'autre appelée **échec**, de probabilité $q = 1 - p$, est appelée épreuve de **Bernoulli**.

Exemples

— lors du lancer d'un dé équilibré, en notant succès "obtenir un 6" et échec " ne pas obtenir un 6", on définit ainsi une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

— lors du lancer d'un dé équilibré, en notant succès "ne pas obtenir un 6" et échec " obtenir un 6", on définit ainsi une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{5}{6}$.

— plus généralement si A désigne un évènement de probabilité p, en notant "succès" la réalisation de cet évènement et échec sa non réalisation, on définit une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

II. Loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 31
Une variable aléatoire X à valeurs réelles est dite suivre la loi de Bernoulli de paramètre p si

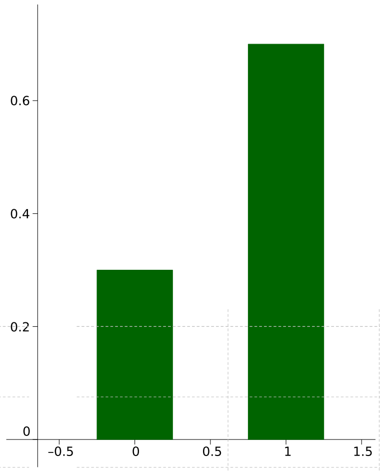
— elle prend pour valeurs possibles les entiers 0 et 1

— la probabilité de prendre chacune de ces valeurs est donnée par :

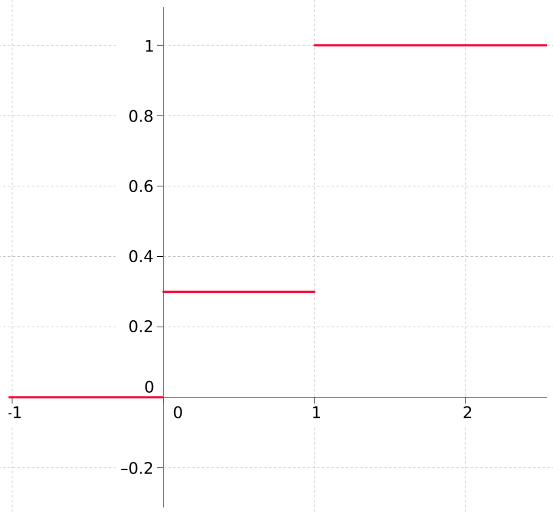
x	0	1
$P(X=x)$	q	p

où $q = 1 - p$

Propriété 16
Le diagramme en barres de la loi de Bernoulli de paramètre p est donné par



Propriété 17
La fonction de répartition de la loi de Bernoulli de paramètre p est représentée ci dessous pour $p = 0.7$



Propriété 18
de la loi de Bernoulli de paramètre p

$E(X) = p$	$V(X) = pq$	$\sigma(X) = \sqrt{pq}$

III. Exercices

Exercice 252. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D - E(D)| < \sigma(D))$.

Exercice 253. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 0 si 6 est sorti 1 sinon.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?
3. Calculer $P(|D - E(D)| < \sigma(D))$.

Exercice 254. On suppose que la variable X suit la loi de Bernoulli de variance $0,21$. On suppose que l'espérance de X est supérieure à $0,5$. Quelle est le paramètre de la loi de X ?

Exercice 255. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon. On note $X = D^2$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?

Exercice 256. On lance un dé équilibré et on note D la variable aléatoire prenant la valeur 1 si 6 est sorti 0 sinon. On note $X = \mathrm{e}^D$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?
2. Quelle est son espérance et sa variance ?

Exercice 257. Existe-t-il une loi de Bernoulli de variance 0,26 ?

Fiche 4

Lois de probabilités discrètes- Schéma de Bernoulli- Coefficients binomiaux

I. Schéma de Bernoulli

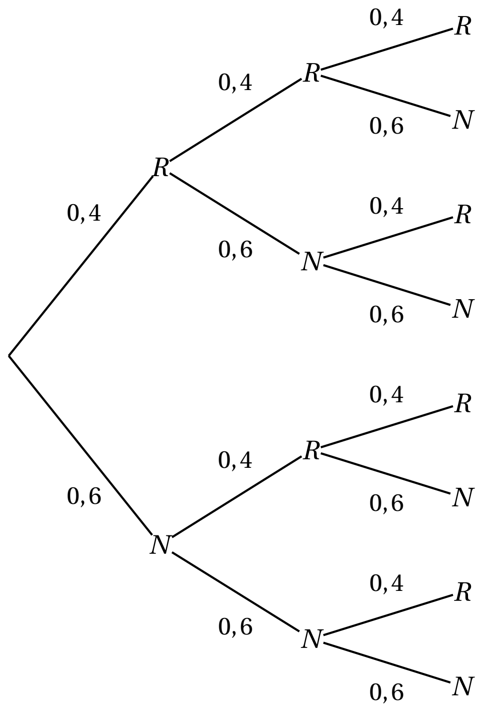
On considère le cadre suivant : on répète n fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire.

Exemple
On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges et 60 boules noires.

On effectue trois tirages successifs avec remise dans cette urne en notant à chaque fois la couleur de la boule obtenue.
Comme ce sont des tirages avec remise :

- à chaque tirage, les conditions sont identiques (il y a 100 boules dans l'urne : 40 boules rouges et 60 boules noires) ;
- les tirages sont indépendants (le résultat d'un tirage n'influence pas le suivant).

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\dfrac{40}{100} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{60}{100} = 0,6$ donc on peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.



Propriété 19
Les règles d'utilisation principales des arbres pondérés sont :

- chaque chemin de l'arbre correspond à un résultat dont la probabilité est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent le chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser l'événement.

Exemple
En utilisant l'arbre précédent, déterminer :

1. La probabilité d'obtenir trois boules rouges.
2. La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire.
3. La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire.

correction

1. La probabilité d'obtenir trois boules rouges est de $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$.
2. La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire, est de $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$.
3. La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire est $0,4 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$.

II. Coefficients binomiaux

Définition 32
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
L'entier $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant « k parmi n », désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Exemple
Dans l'exemple introductif, on a un schéma de Bernoulli avec $n = 3$: comme il y a 3 chemins qui mènent à 1 succès (c'est-à-dire « obtenir une boule rouge »), on a $\binom{3}{1} = 3$.

Remarque
Par convention, on pose $\binom{0}{0} = 1$.

Propriété 20
Soit n et k des entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

— $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

— $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration : — — Il n'y a qu'un chemin qui mène à 0 succès donc $\binom{n}{0} = 1$.

— Obtenir exactement un succès lors de n épreuves se fait avec un succès (lors de la première, la deuxième, ...ou de la n^e^épreuve) et que des échecs lors des autres épreuves : on a donc $\binom{n}{1} = n$. □

— Par symétrie, il y a autant de chemins qui mènent à k succès que de chemins qui mènent à k échecs. Or, s'il y a k échecs, il y a $n-k$ succès. Il y a donc autant de chemins qui mènent à k succès que de chemins qui mènent à $n-k$ succès et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

— On peut obtenir $k+1$ succès au bout de $n+1$ épreuves de deux façons :
  — soit on a déjà obtenu $k+1$ succès au bout de n épreuves, et on obtient un échec lors de la dernière épreuve : cela fait en tout $\binom{n}{k+1}$ chemins ;
  — soit on a obtenu k succès au bout de n épréeuves, et on obtient un succès lors de la dernière épreuve : cela fait en tout $\binom{n}{k}$ chemins.

En tout, on dénombre ainsi $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ chemins menant à $k+1$ succès après $n+1$ épreuves.

On a donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Remarque
Le tableau suivant donnant tous les coefficients binomiaux est appelé « **Triangle de Pascal** ». Cette égalité se traduit par une triangle, dit de Pascal, qui permet de retrouver tous les coefficients binomiaux d'une ligne à l'autre.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

— Comme $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$, il y a des 1 dans la première colonne et la diagonale.

— Comme $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, on peut remplir chaque ligne à partir de la précédente, par exemple, on a $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ d'où $6 + 4 = 10$.

— On observe sur ce triangle que $\binom{n}{1} = n$.

III. Exercices

Exercice 258. Chaque matin, Alain passe à la boulangerie.
Une fois sur cinq, il prend deux pains au chocolat et, le reste du temps, il en prend un seul.

1. On étudie le nombre de viennoiseries qu'Alain a pris ce matin. Expliquer pourquoi on est dans la situation d'une épreuve de Bernoulli.
2. Alain paie toujours avec une pièce de 2 euros.
   On note X la variable aléatoire donnant la somme d'argent qui lui est rendue ce matin.
   Quelle loi suit X sachant qu'un pain au chocolat coûte 1 euros ?

Exercice 259. Victor joue au jeu suivant : on tire une lettre au hasard dans le mot « Mathématiques ».

— Si la lettre obtenue est une voyelle, il gagne 9 euros.

— Sinon, il perd 8 euros.

Partie 1
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Victor après une partie.

1. Expliquer pourquoi X ne suit pas la loi de Bernoulli.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Faut-il conseiller à Victor de jouer à ce jeu ?

Partie 1
Victor décide de jouer quatre parties successives.

1. Expliquer pourquoi cette expérience est un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.
2. Faire un arbre représentant la situation.
3. Déterminer la probabilité que Victor gagne les quatre parties.
4. On note Y son gain algébrique après quatre parties.
   (a) Déterminer l'espérance de Y.
   (b) Victor a-t-il intérêt à multiplier le nombre de parties ?

Exercice 260. Un élève joue aux fléchettes sur une cible du foyer de son lycée et il ne rate sa cible qu'une fois sur 25.
On suppose que tous ses tirs sont indépendants les uns des autres.

1. Déterminer la probabilité qu'il rate la cible quatre fois de suite.
2. Déterminer au bout de combien de tirs la probabilité qu'il rate au moins une fois la cible sera supérieure à $0,5$.

Exercice 261. Répondre aux questions sans calculatrice.

1. Donner $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$.
2. On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{2} = 36$.
   Donner $\binom{9}{6}$ et $\binom{9}{7}$ puis déterminer $\binom{10}{7}$.

Exercice 262. Déterminer les coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{13}{0}$
2. $\binom{15}{6}$
3. $\binom{15}{9}$
4. $\binom{18}{1}$

Fiche 5

Lois de probabilités discrètes- Loi binomiale de paramètres n et p

Définition 33
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exemple
Dans l'exemple introductif de la **partie** , on note X le nombre de boules rouges obtenues après les trois tirages.
Comme on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$ (puisque « Rouge » correspond à un succès), X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.

.1. Loi de probabilité :

Propriété 21
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. On a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration : Quand on considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on trouve sur chaque chemin qui correspond à k succès :

— la probabilité p sur k branches — la probabilité $1-p$ sur $n-k$ branches

donc la probabilité correspondant à chacun de ces chemins est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
Comme il y $\binom{n}{k}$ chemins, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Exemple
Soit X suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0{,}3)$.
On a $P(X = 3) = \binom{4}{3} 0{,}3^3 (1-0{,}3)^{4-3} = 4 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7 = 0,0756$.

Exercice 263 — Déterminer une probabilité $P(X=k)$ à l'aide de la calculatrice La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X=k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

énoncé :

X suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,2$.

Déterminer $P(X=1)$ à l'aide de la calculatrice.

correction :

Calculatrice TI

— On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var

— On choisit `0:binomFdp(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFdp(6,0.2,1
)
             .393216
```

Calculatrice Casio

— Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bpd**.

— On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalPD(1,6,0.2)
            0.393216
```

On trouve ainsi $P(X=1)\approx 0,393$.

Exercice 264 — Déterminer une probabilité $P(X\leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X\leqslant k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Énoncé

X suit la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=0,6$.

Déterminer $P(X\leqslant 5)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

— On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var

— On choisit `A:binomFRép(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFRép(7,0.6,
5)
           .8413696
```

Calculatrice Casio

— Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bcd**.

— On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalCD(5,7,0.6)
           0.8413696
```

On trouve ainsi $P(X\leqslant 5)\approx 0,841$.

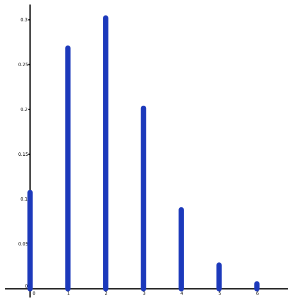
Remarque

La première propriété se « devine » de la façon suivante : pour une épreuve de Bernoulli, l'espérance d'un succès est p.

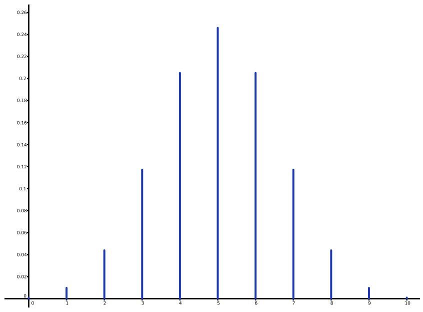
Pour une répétition de n épreuves de Bernoulli, l'espérance du nombre de succès est $n\times p$.

I. Représentation graphique de la loi binomiale

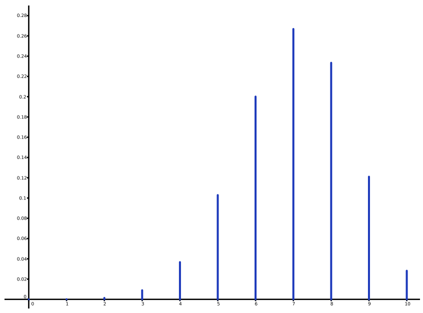
Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.2



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.5

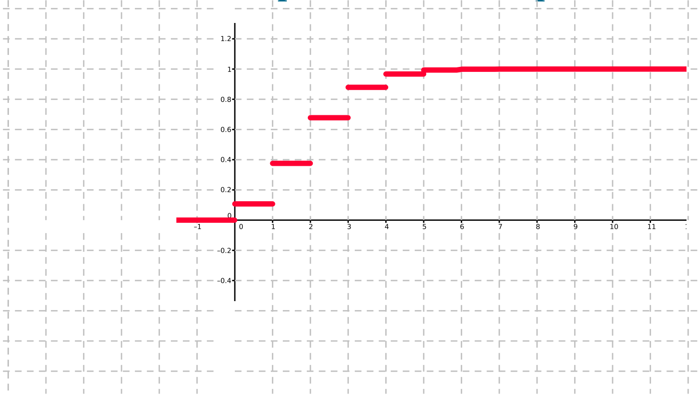


Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.7

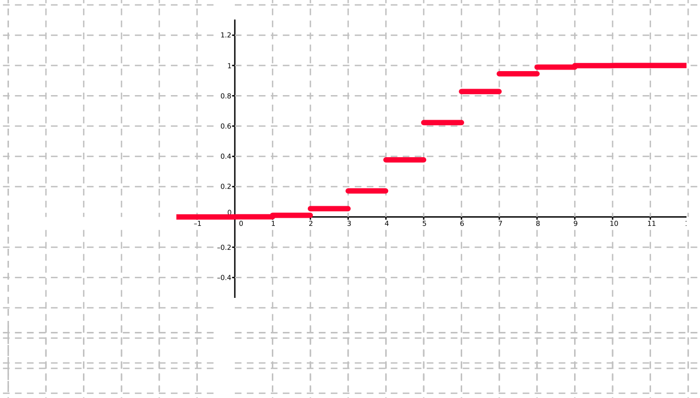


II. Représentation graphique de la fonction de répartition associée à un loi binomiale

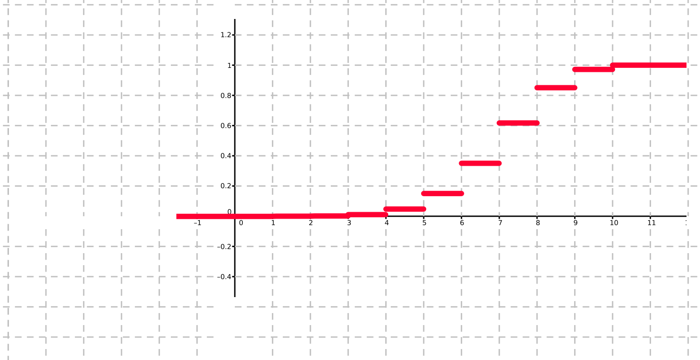
Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.2



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.5



Exemple de la la loi binomiale de paramètre n=10 et p=0.7



III. Espérance, Variance et écart type

> **Propriété 22**
> Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.
>
> — $E(X) = np$
>
> — $V(X) = np(1-p)$
>
> — $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

IV. Exercices

Exercice 265. X suit $\mathscr{B}(6\ ;\ 0{,}4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1. $P(X=2)$
2. $P(X=0)$
3. $P(X \leqslant 4)$
4. $P(X \leqslant 6)$
5. $P(X>3)$
6. $P(X \geqslant 5)$

Exercice 266. Y suit une loi binomiale avec $P(Y \leqslant 15) = 0{,}65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0{,}875$. Déterminer :

1. $P(Y > 15)$
2. $P(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

Exercice 267. Z suit la loi $\mathscr{B}(150\ ;\ 0{,}35)$. Déterminer :

1. $P(X=50)$
2. $P(30 \leqslant X \leqslant 50)$
3. $P(X>40)$
4. $P(X \leqslant 50)$

Exercice 268 — Représentation graphique d'une loi binomiale
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0{,}3)$.

   (a) Tabuler $k \mapsto P(Z = k)$ sur la calculatrice.

   (b) Construire un diagramme en bâtons représentant la loi de probabilité de Z.

2. Représenter graphiquement la loi $\mathscr{B}(6\,;\,0{,}7)$.

Exercice 269. Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur.
On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

   (b) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?

   (c) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?

2. Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient $0,05$.

   Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

Exercice 270. D'après des études statistiques, il naît plus de garçons que de filles en France.
Lors d'une naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de $0,51$.
Pour une famille de six enfants (on suppose qu'il n'y a pas de jumeaux), on note X la variable aléatoire donnant le nombre de filles.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la probabilité que cette famille n'ait que des garçons.
3. Déterminer la probabilité que cette famille ait autant de garçons que de filles.

Exercice 271. Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$.

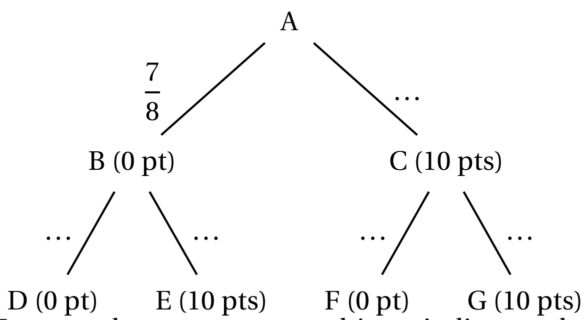
On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.
On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.
Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?
4. (a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

   (b) Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

Exercice 272 — D'après BAC Un joueur dispose d'une table inclinée où une bille, lancée d'un point A, peut suivre différents chemins. Elle rencontre plusieurs nœuds sur son chemin. À chaque fois, la probabilité qu'elle prenne le chemin de gauche est de $\frac{7}{8}$.
Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme de fraction.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. Arrondir au millième.
   (b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. Arrondir au millième.

Exercice 273. Une tombola est organisée dans une école.
La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1. Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.
   On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.
   (a) Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.
   (b) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.
2. Combien de parties peut-il espérer gagner ?

Exercice 274. Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de $0,015$ chaque jour et une réparation coûte 500 euros.
On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1. Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?
2. En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

Exercice 275. Chaque semaine, Fabienne boit un certain nombre de cafés selon ses envies.
Elle a remarqué que le nombre hebdomadaire X de cafés pris au distributeur de sa gare RER suivait une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,2$.

1. Chaque café coûte 35 centimes.
   Combien doit-elle prévoir de dépenser en moyenne chaque semaine ?
2. Cette semaine, elle décide de ne pas dépenser plus de 5 euros.
   Quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas boire autant de cafés qu'elle le souhaite ?
3. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer quel montant d'argent elle doit au minimum prévoir pour être certaine, dans 90% des cas, de pouvoir se payer tous ses cafés.

Fiche 6

Lois de probabilités discrètes-Intervalles de fluctuation d'une loi binomiale de paramètres n et p

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et a et b deux réels.

Définition 34
On dit que $[a\,;\,b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) du nombre de succès si $P(X \in [a\,;\,b]) \geqslant 1-\alpha$.

Remarques

— Cela veut dire que si l'on réalise l'expérience, il y a une probabilité supérieure à $1-\alpha$ que le nombre de succès soit dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

— en pratique on utilisera le plus souvent les seuils 95 % et 99 %.

— Pour un seuil donné, il existe plusieurs et même une infinité d'intervalles de fluctuation.

Propriété 23
L'intervalle $[a\,;\,b]$ où :

— a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$

— b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 1-\dfrac{\alpha}{2}$

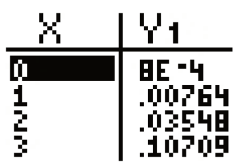
est un intervalle de fluctuation dit « centré » au seuil $1-\alpha$.

Exercice 276 — Déterminer un intervalle de fluctuation Tabuler la loi binomiale avec la calculatrice permet de déterminer a et b.
énoncé
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}3)$.
Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
correction

Calculatrice TI

— Appuyer sur  puis sur  et  pour accéder au menu **distrib** et saisir `Y1=binomFRép(20,0.3,X)`.

— Tabuler la fonction :



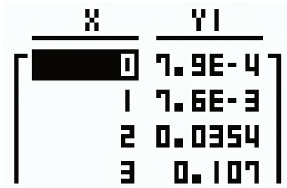
— Déterminer les valeurs de X pour lesquelles

`Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

Calculatrice CASIO

— Dans le menu **TABLE**, appuyer sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** et saisir `Y1=BinomialCD(X,20,0.3)`.

— Tabuler la fonction :



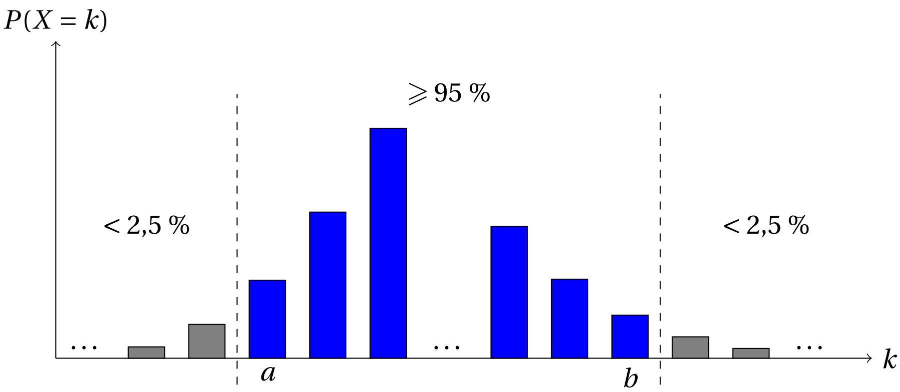
— Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

L'intervalle $[2\,;\,10]$ est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.

Remarques

Dans la propriété précédente :

— on peut représenter la situation par le graphique suivant où le diagramme en bâtons représente la loi binomiale :



— c'est cet intervalle que l'on donnera généralement quand on demandera de déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, même s'il en existe d'autres.

Dans la suite, l'intervalle $[a\,;\,b]$ désigne l'intervalle de la propriété précédente.

Propriété 24
On considère la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{n}$ donnant la fréquence de succès.
L'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}\,;\,\dfrac{b}{n}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence.

Démonstration : On a $\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n} \Leftrightarrow a \leqslant X \leqslant b$ donc $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{X}{n} \leqslant \dfrac{b}{n}\right) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.
Comme $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$, on en déduit que $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0{,}95$.

Propriété 25
On considère une population dans laquelle la proportion d'un certain caractère est p.
Si la population est suffisamment grande, quand on prélève un échantillon de n individus, on peut considérer que le nombre d'individus ayant le caractère suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

— du nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon est $[a\,;\,b]$;
— de la fréquence du caractère dans l'échantillon est $\left[\dfrac{a}{n}\,;\,\dfrac{b}{n}\right]$.

Remarques

— Le fait que la population soit suffisamment grande permet d'assimiler le prélèvement d'un échantillon de taille à n à des tirages avec remise donc indépendants.

— Si, après prélèvement de l'échantillon, on observe que la fréquence est bien dans l'intervalle de fluctuation, on dit que cet échantillon est représentatif de la population, sinon, on dit qu'il ne l'est pas, au seuil de 95 %.

Exemple

Dans la population française, il y a 24,4 % de « moins de 20 ans » (source : *ined*).

1. On prélève au hasard un échantillon de 250 personnes dans la population française.
   Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des « moins de 20 ans » dans cet échantillon.
2. Dans un village de 250 habitants, la proportion de « moins de 20 ans » est 28,5 %.
   Ce village est-il représentatif de la population française sur ce critère ?

Correction

1. Comme la population française est suffisamment grande pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise, le nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $\dfrac{24,4}{100} = 0,244$ d'après la propriété précédente.
   — En tabulant cette loi avec la calculatrice, on obtient qu'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est $[48\,;\,75]$.
   — Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de « moins de 20 ans » dans cet échantillon est donc $\left[\dfrac{48}{250}\,;\,\dfrac{75}{250}\right]$ soit $[0,192\,;\,0,3]$.
2. Comme $\dfrac{28,5}{100} = 0,285 \in [0,192\,;\,0,3]$, ce village est représentatif de la population française.

Remarque

Si l'on avait utilisé la formule de l'intervalle de fluctuation vue en seconde, on aurait obtenu
$\left[0,0244 - \dfrac{1}{\sqrt{250}}\,;\,0,0244 + \dfrac{1}{\sqrt{250}}\right]$ soit approximativement $[0,18\,;\,0,31]$.
Ce résultat est proche de $[0,192\,;\,0,3]$ obtenu avec la loi binomiale : ce sera toujours le cas dans les conditions d'application de cette formule ($0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ et $n \geqslant 25$).

Exercice 277 — Rejeter ou non une hypothèse Dans une population, on peut faire l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est p puis, à l'aide d'un intervalle de fluctuation et de l'effectif ou de la fréquence dans un échantillon prélevé, choisir de rejeter ou non cette hypothèse.
énonce :
Un candidat à l'élection présidentielle affirme que 54 % de la population lui est favorable.
Lors d'un sondage réalisé sur 1 000 personnes, 523 personnes se sont déclarées favorables à ce candidat.
Peut-on rejeter ou non la proportion de 54 % donnée par le candidat, au seuil de 95 % ?
correction :

— Sous l'hypothèse que la proportion de personnes favorables au candidat est bien de 54 %, en tabulant la loi $\mathscr{B}(1000\ ;\ 0{,}54)$ avec la calculatrice, on obtient que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % dans un échantillon de taille 1000 est $[509\ ;\ 571]$.

— Le nombre de personnes favorables dans l'échantillon est 523 qui appartient bien à $[509\ ;\ 571]$ donc, au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion est de 54 %.

Remarques

— Par abus de langage, on dit parfois que l'on « accepte l'hypothèse » plutôt que l'on « ne rejette pas l'hypothèse ».

— Plutôt que dire que l'on rejette ou non une hypothèse « au seuil de 95 % », on peut aussi dire qu'on la rejette ou non « au risque d'erreur de 5 % ».

I. Exercices

Exercice 278. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,4)$.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
2. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de succès.

Exercice 279. Même exercice avec Y suivant la loi $\mathscr{B}(11\ ;\ 0,65)$.

Exercice 280. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(5\,000\ ;\ 0{,}8)$.

1. On cherche à déterminer l'intervalle $[a\ ;\ b]$ où :
   — a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$;
   — b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
   (a) Sur la calculatrice, tabuler $k \longmapsto P(X \leqslant k)$ avec un pas de $1\,000$.
   (b) En déduire un encadrement de a d'amplitude $1\,000$.
   (c) Faire de même pour b.
   (d) Affiner ces encadrements et en déduire a et b.
   (e) En déduire l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 95 %.
2. Déterminer de même l'intervalle de fluctuation de la fréquence de succès au seuil de 99 %.

Exercice 281. Même exercice que le précédent avec Y suivant le loi $\mathscr{B}(12\,487\ ;\ 0{,}71)$.

Exercice 282. 70 % des Français portent des lunettes (source : *ifop*).

1. (a) On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de porteurs de lunettes dans un échantillon de 200 Français pris au hasard.
   Quelle loi suit X ? Justifier.
   (b) En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de porteurs de lunettes dans cet échantillon puis de la fréquence correspondante.
   (c) Déterminer l'intervalle de fluctuation de cette fréquence vu en seconde et le comparer avec le précédent.
2. On se place dans une rue piétonne dans laquelle, sur 200 passants, 146 portent des lunettes.
   Cette rue est-elle représentative de la population sur ce critère ?

Exercice 283. En 2012, 43 % des Français n'ont lu aucun livre.

1. En utilisant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des personnes n'ayant pas lu de livre en 2012, dans un échantillon de taille 853.
2. Dans un lycée de 853 élèves, 23 élèves ont déclaré ne pas avoir lu de livre en 2012.
   Ce lycée est-il représentatif de la population ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 284. Dans une promotion de 123 étudiants en mathématiques, 7 ont déclaré ne pas pratiquer d'activité sportive régulière.
Cette promotion est-elle représentative de la population globale des étudiants dans laquelle 22 % des individus ont une activité sportive régulière ?

Exercice 285. Au poker Texas Hold'em, au début de chaque main, chaque joueur reçoit deux cartes.
La probabilité d'obtenir une « paire servie », c'est-à-dire deux as, deux rois, deux dames, etc., est de 5,88 %.
Lors d'une partie, Bertrand, qui a joué 120 mains et a obtenu 4 paires servies, se plaint d'avoir été particulièrement malchanceux.
Que peut-on en penser ?

Exercice 286. Dans la population brésilienne, la proportion de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux est d'environ 1 %.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de grossesses donnant lieu à la naissance de jumeaux, au Brésil, dans un échantillon de taille 6 170 (arrondir les bornes à 10^{-4} près).
2. Une étude portant sur la ville de Cândido Godói entre 1959 et 2008 montre que, sur 6 170 grossesses, 92 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
   La ville de Cândido Godói est-elle représentative de la population brésilienne sur ce critère ?
3. Dans cette même étude, on observe que dans le quartier de Linha Natal, sur 333 grossesses, 5 ont donné lieu à la naissance de jumeaux.
   Ce quartier est-il représentatif de la ville sur ce critère ? Pour répondre, on admettra que le nombre de grossesses à Cândido Godói entre 1959 et 2008 est suffisamment grand pour assimiler ces 333 grossesses à des tirages identiques avec remise.

Exercice 287. Sur un flacon de shampooing, on peut lire : « 97 % de taux de satisfaction ».

1. Sous cette hypothèse, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des clients satisfaits dans un échantillon de 200 clients.
2. Un supermarché mène une étude sur 200 clients et obtient 190 clients satisfaits par le shampooing.
   (a) Quel est la fréquence des clients satisfaits dans cet échantillon ?
   (b) Doit-on rejeter ou non l'affirmation du fabricant de shampooing au seuil de 95 % ?

Exercice 288. Un habitant du sud de la France affirme que dans sa ville, il y a du soleil « 90 % du temps ».

k	$P(X \leqslant k)$
315	0,014
316	0,021
317	0,031
318	0,044
319	0,062
…	…
338	0,964
339	0,977
340	0,986
341	0,991
342	0,995

1. On considère le tableau ci-contre où X suit la loi $\mathscr{B}(365\,;\,0{,}9)$.
   En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jours de soleil dans cette ville, sous l'hypothèse qu'il y ait du soleil 90 % du temps.
2. L'année dernière, il y a eu du soleil 325 jours.
   Doit-on rejeter ou non l'affirmation de cet habitant au seuil de 95 % ?

Exercice 289. Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :

— l'entreprise Savamal dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;

— l'entreprise Cébon dans laquelle 459 des 1027 employés sont des femmes.

Cette association peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 % que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ? Argumenter.

Exercice 290. En 2012, 29 % des français possédaient un smartphone.
D'après une étude réalisée en 2013 par le Credoc, et portant sur 2 215 personnes, ce nombre est passé à 39 %.

Peut-on affirmer au seuil de 99 % que le pourcentage de français équipés d'un smartphone n'est plus de 29 % ?

Exercice 291. Dans une imprimerie, la proportion des journaux imprimés qui présentent un défaut est de 1,2 %.
L'imprimeur décide de changer ses presses puis prélève 900 journaux dont 6 présentent un défaut.
Peut-on affirmer au seuil de confiance de 95% que la proportion de journaux présentant des défauts a changé ?

Exercice 292. Un fabricant de tickets de jeux à gratter affirme que 40 % de ses tickets sont gagnants.
Djanany achète 10 de ces tickets.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de tickets gagnants dans cet échantillon sous l'hypothèse que le fabricant dise la vérité.
2. Parmi les 10 tickets, 1 seul est gagnant. Djanany peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 %, que le fabricant ment sur la proportion de tickets gagnants.
3. (a) Même question si elle avait obtenu 8 tickets gagnants.
   (b) En quoi la situation serait-elle alors paradoxale ?
4. (a) Donner le meilleur (c'est-à-dire le plus petit) intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la forme $[a\,;\,10]$.
   (b) Reprendre la question 2 avec cet intervalle et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 293 — Discrimination ? Dans le système judiciaire américain, lors de la constitution d'un jury, les procureurs ont le droit d'exclure des jurés potentiels sans justification.
De 1973 à 1990, dans le district judiciaire de Chattahoochee en Géorgie, les procureurs de l'État ont utilisé 83 % de ces droits d'exclusion contre des jurés afro-américains bien que ceux-ci constituent 34 % de la population locale.

En conséquence, sur 10 jurys jugeant des afro-américains risquant la peine de mort, 6 n'en contenaient aucun (source : *The associated press-Stephen B. Bright*).

1. Sachant qu'un jury est constitué de 12 jurés, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de jurés afro-américains dans un jury.
2. (a) Plus précisément, quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun juré afro-américain dans un jury ?
   (b) Quelle est la probabilité que, sur 10 jurys choisis en toute indépendance, au moins la moitié ne contiennent pas de juré afro-américain ? Conclure.

Exercice 294 — D'après BAC 39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1. (a) Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
   (b) Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
   (c) On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.
2. On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34 % sont du groupe A+.
   Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

Exercice 295 — D'après BAC En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que 10 % de la population française présente à la naissance une malformation cardiaque de type anévrisme.
Elle décide alors de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème d'anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. (a) Définir la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer $P(X = 35)$.

(c) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

2. (a) On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

(b) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Que peut-on en penser ?

Fiche 7

Lois de probabilités discrètes-Loi géométrique

I. Définition

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est notée p. On choisit comme univers l'ensemble Ω des suites infinies de termes choisis dans $\{"S", "E"\}$. On remarque que Ω est un ensemble infini. On définit sur Ω la fonction X (dont on admettra qu'il s'agit d'une variable aléatoire) qui à chaque suite associe le rang du premier succès.

Définition 35
La loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier succès lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli dans des conditions indépendantes est appelée loi géométrique de paramètre p. Elle est notée $\mathscr{G}(p)$.

Exemples

— La loi du rang du premier lancer donnant un 6, lors de lancers successifs d'un dé équilibré suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

— La loi du rang du premier lancer donnant PILE, lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

II. Loi de probabilité

Propriété 26
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et k un entier non nul,

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$$

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

$$P(X \leqslant k) = 1-(1-p)^k$$

Démonstration : En classe. □

III. Espérance et variance

Propriété 27
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et k un entier non nul,

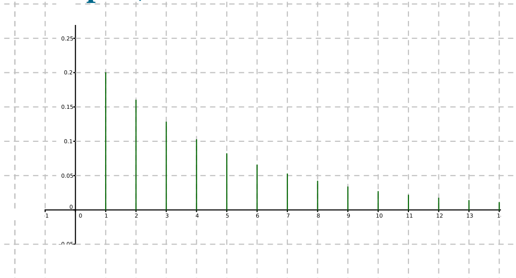
$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

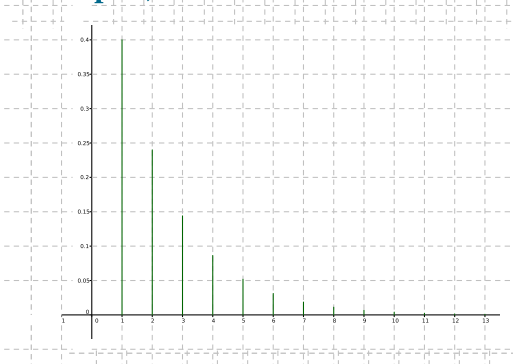
Démonstration : En classe. □

IV. Représentation graphique de la loi de probabilité d'une loi géométrique

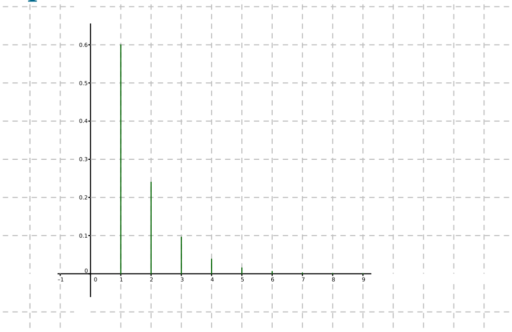
Loi géométrique de paramètre p=0,2



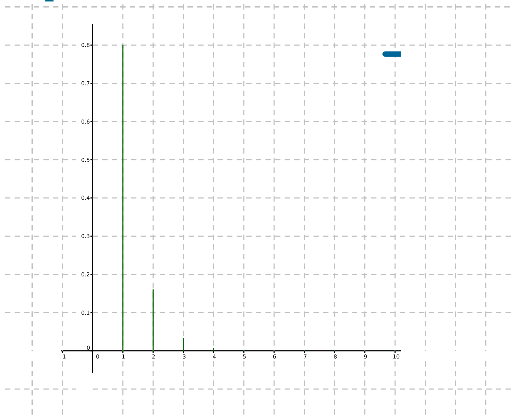
Loi géométrique de paramètre p=0,4



Loi géométrique de paramètre p=0,6

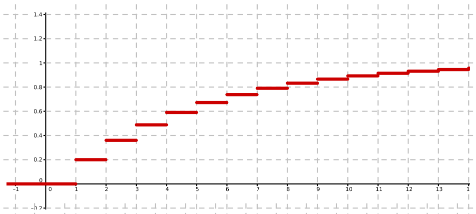


Loi géométrique de paramètre p=0,8

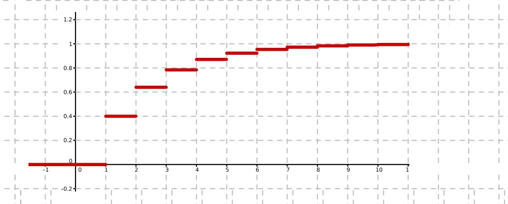


V. Représentation graphique de la fonction de répartition d'une loi géométrique

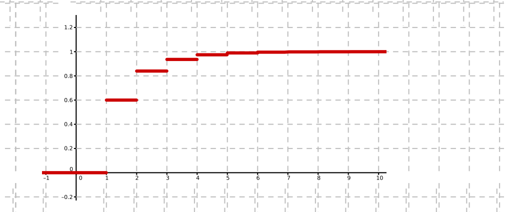
Loi géométrique de paramètre p=0,2



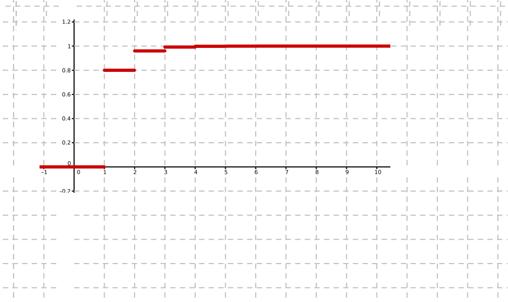
Loi géométrique de paramètre p=0,4



Loi géométrique de paramètre p=0,6



Loi géométrique de paramètre p=0,8



VI. Non vieillissement d'une loi géométrique

Propriété 28
Si X suit une loi géométrique, on a $P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{N}^*$ $P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$ alors la variable X suit une loi géométrique

Démonstration : Ensemble. □

Exemple
Sachant qu'au lancer 10, Pile n'est pas sorti, quelle est la probabilité que Pile ne sorte pas avant le 15-ième lancer ? En utilisant la propriété de non vieillissement, cette probabilité est également la probabilité que Pile ne sorte pas avant le 5-ième lancer,ou encore que le rang du premier pile est au moins 5, donc strictement supérieur à 4, soit $(1-p)^4$ soit $1/16$.

VII. Exercices

Exercice 296. On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est 0,2 et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir Face pour la première fois.

1. Justifier que F suit la loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir Face.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir Face.
4. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais au moins pour obtenir Face.
5. Combien de lancers en moyenne pour obtenir face ?

Exercice 297. On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est p et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir Face pour la première fois.

1. Justifier que F suit la loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir Face.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir Face.
4. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais au moins pour obtenir Face.
5. Combien de lancers en moyenne pour obtenir face ?

D'autres viendront...

Thème : probabilités Lois à densité

Fiche 1

Lois de probabilités à densité-Activité

I. [Vers la loi uniforme

[Avec une calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\,;\,1[$:

Calculatrice TI	Calculatrice Casio
On appuie sur la touche math puis on choisit **PRB** et **NbrAléat**.	On appuie sur OPTN puis on choisit **PROB**, **Rand** et **Ran#**.

1. Combien y a-t-il de nombres avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\,;\,1[$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0,123 456 789 0 ?

[Avec le tableur

On utilise le tableur et la commande « =ALEA() » qui donne un nombre aléatoire (avec 15 décimales) pour réaliser une simulation de 5 000 nombres dans $[0\,;\,1[$.
Dans la copie d'écran ci-dessous, on présente des relevés de cette simulation.

E3 =NB.SI($A1:$A5000;"<0,2")-NB.SI($A1:$A5000;"<0,1")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,502668082421260										
2	0,366299904640073		Classe	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,4[	[0,4;0,6[	[0,6;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[	Total
3	0,803212003060794		Effectif	512	493	982	1025	969	528	491	5000
4	0,540163650044041		fréquence	0,1024	0,0986	0,1964	0,2050	0,1938	0,1056	0,0982	1
5	0,769655100151884										
6	0,005502001771556										

1. Comment semblent être les fréquences observées pour des classes de même amplitude ?
2. Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0,1\,;\,0,2[$?
3. Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0,6\,;\,0,9[$?

Un peu de réflexion

On choisit un nombre réel au hasard dans $[0\,;\,1]$ (sans se préoccuper du nombre de décimales).

1. Que peut-on penser de la probabilité de tomber exactement sur 0,4 ?
2. Que peut-on penser de la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 0,5 ?

UAvec une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1$.

1. Montrer que cette fonction est une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f.
   (a) Déterminer $P(X = 0{,}4)$.
   (b) Déterminer $P(X > 0{,}5)$.

On admet que le choix d'un nombre au hasard dans $[0\,;\,1]$ peut-être modélisé par une variable aléatoire suivant la loi de densité f définie dans la partie D de l'activité.
On dit que la variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

Entre deux et 5

On considère une variable aléatoire Y donnant un nombre aléatoire sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.

1. Déterminer $P(2{,}5 \leqslant Y \leqslant 4)$ puis $P(c \leqslant Y \leqslant d)$ pour $c \leqslant d$ dans $[2\,;\,5]$.
2. En déduire la fonction de densité de Y.

Fiche 2

Lois de probabilités à densité

I. Variables aléatoires à densité

Exemple

Dans une bouteille vide de contenance 1,5 litres, on verse une quantité au hasard d'eau. On considère la variable aléatoire X égale à ce volume d'eau en litres. Cette quantité peut être égale à n'importe quel nombre de l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.
Cela signifie que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.

Remarque

Jusqu'à présent on a travaillé avec des variables aléatoires **discrètes** qui prennent un nombre fini de valeurs et leur loi est soit connue (binomiale ou Bernoulli), soit présentable sous la forme d'un tableau. Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire prend une infinité de valeurs et toutes ces valeurs sont dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

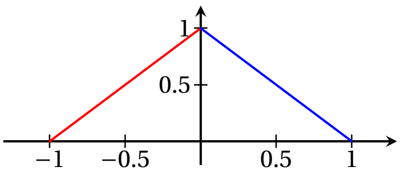
Définition 36

Si une fonction f définie sur un intervalle I est continue et positive sur I et si l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1 (unité d'aire) alors on dit que f est une **fonction de densité**(ou une **densité de probabilité**).

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in [-1;0[\\ -x+1 \text{ si } x \in [0;1] \end{cases}.$$

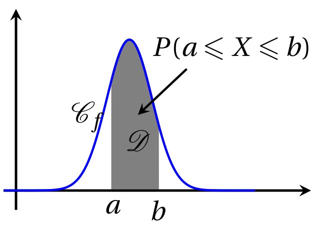


La fonction f est positive et continue sur $[-1;1]$. De plus, le domaine entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-1;1]$ est un triangle d'aire $\dfrac{2\times 1}{2} = 1$: la fonction f est donc une fonction de densité.

Définition 37

Soit f une fonction de densité sur un intervalle I.

Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie que pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans I on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = \text{aire}(\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques

— On dit alors que X est une **variable aléatoire à densité**.

— La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car $P(X = c) = \int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilités : par exemple $P(1 < X \leqslant 3) = P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

— La fonction de répartition F $x \mapsto P(X \leqslant x)$ d'une variable aléatoire dont la loi est à densité est une fonction continue, croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est f.

II. exercices

Exercice 298. Parmi les exemples, donner ceux que l'on peut modéliser à l'aide d'une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle et, le cas échéant, indiquer cet intervalle.

1. On étudie le temps d'attente à l'accueil d'un standard téléphonique.
2. On lance un dé à 12 faces et on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 10, on perd 2 euros sinon.
   On étudie le gain obtenu.
3. En Europe, on estime qu'il y a 30 % de personnes myopes. On choisit au hasard un groupe de 50 personnes au hasard.
   On étudie le nombre de personnes myopes dans ce groupe.
4. On étudie la taille des élèves d'un collège.
5. On étudie le temps avant qu'une voiture rouge passe à un carrefour.

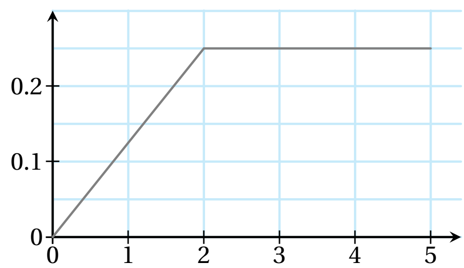
Exercice 299. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$.

1. Montrer que f est une fonction de densité sur $[0\,;\,2]$.
2. Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$
   (b) $P(X \leqslant 1)$
   (c) $P(X > 1)$
   (d) $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$
3. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
4. Calculer $F(1,5) - F(0,5)$ et interpréter en terme de probabilités.

Exercice 300. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = ax^2$.

1. Déterminer la valeur de a telle que f soit une fonction de densité sur $[0\,;\,1]$.
2. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f pour la valeur de a trouvée à la question précédente. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$
   (b) $P(X \leqslant 0{,}1)$
   (c) $P(X < 0{,}5)$
   (d) $P_{(X \geqslant 0{,}5)}(X \geqslant 0{,}1)$
3. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
4. Calculer $F(0)$ et interpréter en terme de probabilités.
5. Calculer $F(1,5) - F(0,5)$ et interpréter en terme de probabilités.

Exercice 301. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0\,;\,5]$ est représentée
ci-dessous :

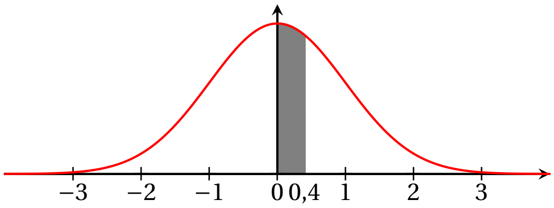


Déterminer :

1. $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$
2. $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$
3. $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$
4. $P(X < 3)$

Tracer l'allure de la fonction de répartition.

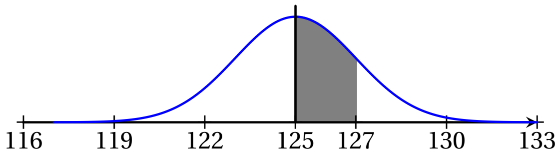
Exercice 302. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.
Donner une valeur approchée de :

1. $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0)$
2. $P(X > 0{,}4)$
3. $P(X \leqslant 0{,}4)$
4. $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

Exercice 303. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0{,}341$.
Donner une valeur approchée de :

1. $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$
2. $P(X > 125)$
3. $P(X \leqslant 123)$
4. $P(127 \leqslant X)$

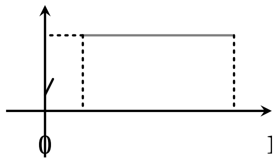
Tracer l'allure de la fonction de répartition.

Fiche 3

Lois de probabilités à densité

I. Loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$

Définition 38
Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur [0 ; 1]** si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur par $f(x) = 1$ si $x \in [0\ ;\ 1]$, 0 sinon.



« X suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{U}([0\ ;\ 1])$ ».

Propriété 29
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ et $[c\ ;\ d]$ un intervalle inclus dans $[0\ ;\ 1]$. Alors on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = d - c$.

Démonstration : X admet pour densité $f : t \mapsto 1$ sur $[0\ ;\ 1]$.
Donc on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = [1]_c^d = d - c$. □

II. Fonction de répartition

Propriété 30
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ alors la fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 0$ si $x < 0$, x si $x \in [0\ ;\ 1]$, et 1 si $x > 1$.

III. Espérance et Variance

Propriété 31
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors $E(X) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration : On a $E(X) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2 - 0^2}{2}$
$= \frac{1}{2}$. □

Propriété 32
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$ de densité f et on appelle variance mathématique de X le nombre $V(X) = \int_0^1 (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a alors $V(X) = \frac{1}{12}$.

IV. Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

Définition 40
Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur [*a* ; *b*]** si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur par $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a\,;\,b]$, 0 sinon.

Propriété 33
- Si X est une variable aléatoire X suivant **la loi uniforme sur [*a* ; *b*]** alors la variable $U = \frac{X-a}{b-a}$ suit la loi uniforme $[0\,;\,1]$.
- Si U suit la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$ alors si a et b sont des réels avec $a < b$ la variable $X = a + (b-a)U$ suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

Propriété 34
On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$
On a alors
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$,
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exemple (Calculer une probabilité et une espérance pour une loi uniforme)
On utilise les différentes formules des propriétés ou on calcule à l'aide de la fonction de densité et des intégrales.

Enoncé Armand et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[17\,;\,18]$.

1. Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?

2. À quelle heure leurs parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

Correction

1. Sous forme décimale, 17h15= 17,25h puis $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \dfrac{17{,}25-17}{18-17} = 0{,}25$.
2. On a $E(X) = \dfrac{17+18}{2} = 17{,}5$ donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

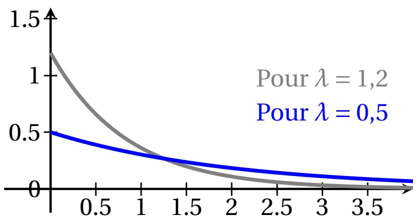
Remarque
Pour la question de l'exemple, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{18-17} = 1$ sur $[17\,;\,18]$ est la fonction de densité de X, on aurait aussi pu calculer $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \displaystyle\int_{17}^{17{,}25} 1\,\mathrm{d}t = [t]_{17}^{17{,}25} = 17{,}25-17 = 0{,}25$.

Fiche 4

Lois de probabilités à densité -Loi exponentielle

I. Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

Définition 41
Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.



« X suit la loi exponentielle de paramètre λ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ ».

Propriété 35
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs. On a alors :
— $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ — $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$ — $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$

Démonstration : — Pour tous réels c et d positifs, on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d$
$= -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

— En prenant $c = 0$ et $d = a$ dans le résultat précédent, on trouve
$P(X \leqslant a) = P(0 \leqslant X \leqslant a) = e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$.

— On a $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$. □

Propriété 36
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,dt$.

On a alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration : La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
Posons alors pour tout réel t positif $g(t) = t f(t) = t\lambda e^{-\lambda t}$: il s'agit alors de connaître une primitive de g pour calculer l'intégrale. On va utiliser la technique de l'équation différentielle. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sa dérivée vérifie : $g'(t) = f(t) + t \times f'(t)$.
Or $f'(t) = -\lambda f(t)$ donc $g'(t) = f(t) - t \times \lambda f(t)$. Ainsi : $g'(t) = f(t) - \lambda g(t)$.Soit x un réel positif, en intégrant sur $[0, x]$, on obtient : $\displaystyle\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \lambda \int_0^x g(t)dt$. Ainsi $g(x) - g(0) = (1 - e^{-\lambda x}) -$

$\lambda\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ donc $\lambda\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = -g(x)+g(0)+1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ Donc $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x}+\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}$ On a donc $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\dfrac{1}{\lambda} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\dfrac{1}{\lambda}$.
Comme $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$:

- par composition, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.
- par composition et croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$. □

Finalement, on obtient bien $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple (Calculer avec une loi exponentielle)
exo On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.
2. Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.
3. Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

correction

1. On calcule $P(0 \leqslant T \leqslant 5) = 1-\mathrm{e}^{-0,2\times 5} = 1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$.
2. On calcule $P(T \geqslant 10) = \mathrm{e}^{-0,2\times 10} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0,135$.
3. $E(T) = \dfrac{1}{0,2} = 5$ donc le client peut espérer attendre 5 minutes.

Remarque
Dans le cas de la première probabilité, un calcul d'intégrale était envisageable : la fonction de densité de T est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$.
La probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes est donc :
$P(0 \leqslant T \leqslant 5) = \int_0^5 0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^5 = -\mathrm{e}^{-0,2\times 5} - \left(-\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\right) = 1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$.

Exemple (Déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle)
Dans les cas où une information (probabilité ou espérance) peut être exploitée, on pose l'équation issue des formules du cours et on résout cette équation pour déterminer λ.
exo
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $P(X \leqslant 5) = 0,2$. Déterminer λ.
correction
D'après l'énoncé, on a $P(X \leqslant 5) = 0,2$ donc $1-\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,2$.
Résolvons donc cette équation : $1-\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \ln(0,8)$
$\Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,8)$ donc $\lambda = \dfrac{\ln(0,8)}{-5} \approx 0,045$.

Propriété 37
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.
La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t+h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.
On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

Démonstration : Par définition, on a : $P_{(X>t)}(X > t+h) = \dfrac{P((X>t)\cap(X>t+h))}{P(X>t)}$
$= \dfrac{P(X>t+h)}{P(X>t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(X>h)$. □

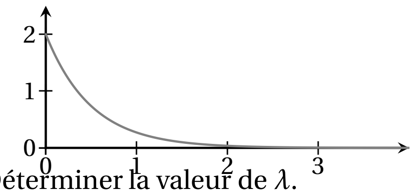
Exemple
On considère un appareil dont la durée de vie en années suit la loi exponentielle de paramètre 0,05 : d'après la propriété, $P_{(X>4)}(X>9) = P_{(X>4)}(X>4+5) = P(X>5)$.
Concrètement, si l'appareil a déjà fonctionné 4 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans de plus est égale à la probabilité (non conditionnelle) qu'il fonctionne plus de 5 ans.

II. Exercices

Exercice 304. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calculer :

1. $P(X\in[0\,;\,2])$
2. $P(X\in[1\,;\,+\infty[)$
3. $P(5<X<10)$
4. $P(X\in[5\,;\,10])$

Exercice 305. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\,;\,2)$ appartient à cette courbe.



1. Déterminer la valeur de λ.
2. L'égalité $P(X<0{,}5) = P(X\geqslant 0{,}5)$ est-elle vraie ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X<t) = P(X\geqslant t)$.

Exercice 306. Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(Y>30)=0{,}2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère maintenant $\lambda=0{,}05$. Calculer :
   (a) $P(Y\geqslant 15)$
   (b) $P(Y\geqslant 5)$
   (c) $P_{(Y\geqslant 15)}(Y\geqslant 20)$
   (d) $E(Y)$

Exercice 307. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X)=45$.

1. Déterminer la valeur de λ arrondie au millième.
2. A-t-on $P(X\geqslant 45)=0{,}5$?

Exercice 308. Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes. On sait que la durée d'attente en minute peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Tessa vient retirer un colis. Calculer la probabilité :
   (a) que Tessa attende moins de 2 minutes ;
   (b) que Tessa attende plus de 5 minutes.
3. Tessa a déjà attendu 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende au moins 2 minutes de plus ?

Exercice 309 — Durée de vie d'un composant
Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Une étude statistique a permis d'établir que $P(T<5)=0{,}1$.
On arrondira tous les résultats au millième.

1. Déterminer la valeur de λ.

   Dans la suite, on prendra $\lambda=0{,}02$.

2. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3. Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4. Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?
5. Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

Exercice 310 — Carbone 14 La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5.
Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.

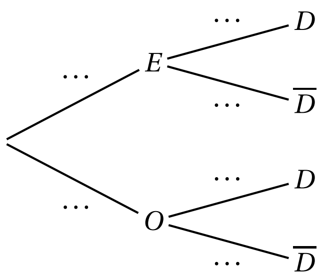
1. Calculer le paramètre λ dans le cas du carbone 14.
2. Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :
   (a) avant 1 000 ans ;
   (b) après 10 000 ans.
3. Déterminer la valeur de a telle que $P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 311. Un magasin vend des jeux électroniques.
On admet que ces jeux ont une durée de vie en heure modélisée par la variable aléatoire D suivant la loi exponentielle de paramètre 0,000 1.

1. Calculer la probabilité que le jeu ait une durée de vie inférieure ou égale à 5 000 heures.
2. Sachant que le jeu a déjà fonctionné 1 000 heures, quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 8 000 heures ?

Exercice 312. Dans un lycée, les oscilloscopes utilisés en physique-chimie ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,383.

1. Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4}.
   Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}12$.
2. Interpréter et déterminer la probabilité $P(X \geqslant 3)$.
3. Interpréter et déterminer la probabilité $P_{X>2}(X > 10)$.
4. Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.
5. Désirant changer son parc de matériel, le lycée achète 40 % d'oscilloscopes auprès du fournisseur Oscillo' et le reste auprès du magasin Electro'. Les deux fabricants ayant des productions différentes, les durées de vie moyenne des oscilloscopes qu'ils fournissent sont de 8 ans pour Oscillo' et de 5 ans pour Electro'. On admet toujours que les durées de vie des oscilloscopes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois exponentielles.
   Un professeur de physique-chimie prend au hasard un oscilloscope.
   On note E, O et D les événements respectifs « l'appareil vient du fournisseur Electro' », « l'appareil vient du fournisseur Oscillo' » et « l'appareil fonctionne plus de dix ans »
   (a) Quelle est la probabilité que l'oscilloscope choisi fonctionne plus de 10 ans sachant qu'il vient du fournisseur Oscillo' ?
   (b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (c) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'oscilloscope choisi soit supérieure ou égale à 10 ans ?

(d) Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise Electro' sachant que sa durée de vie est supérieure ou égale à 10 ans ?

Exercice 313. D'après Bac (Centres Étrangers - 2003). Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   (a) comprise entre 50 et 100 ;
   (b) supérieure à 300.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas au cours des 25 prochains kilomètres ?

Exercice 314. Dans un circuit imprimé, un composant électronique a une durée de vie en années qui peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,125.

1. Un fabricant de circuit imprimé achète 1 000 composants électroniques et on suppose que les durées de vie des composants sont indépendantes.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants électroniques qui auront une durée de vie inférieure ou égale à 1 an.
   (a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres (si nécessaire, on arrondira à 10^{-2} près).
   (b) Calculer $P(X \leqslant 100)$.
2. Ce composant électronique est vendu 10 euros. Le fabricant propose aux clients la grille de remboursement suivante en cas de problème avec un composant :

Durée de vie	jusqu'à 2 ans	entre 2 et 4 ans	plus de 4 ans
Remboursement	5 euros	3 euros	0 euros

   Calculer une estimation de la recette moyenne (qui tient compte du prix de vente et du remboursement) d'un composant si le fabricant en vend une grande quantité.

Thème : Annexes

Fiche 1

Équations et inéquations du second degré Résolution d'équations et factorisation

I. Définition

Définition 42
Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ le réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque
Δ est appelé discriminant du trinôme car son signe permet de faire une discrimination entre les équations selon leur nombre de solutions.

II. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Notons (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a vu chapitre 3 - Fiche 1 que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (E) &\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

On raisonne par disjonction des cas :

1^er^ cas : $\Delta < 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Par conséquent l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E) n'a pas de solution.
De plus, $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ ne peut pas se factoriser (s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré). (Sinon, l'équation aurait au moins une solution.)

2^e^ cas : $\Delta = 0$

On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ et donc

$(E) \iff \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc l'équation (E) a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

De plus, $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_0)^2$

3^e^ cas : $\Delta > 0$

On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

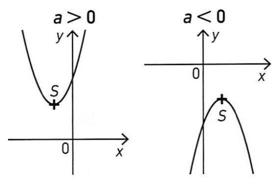
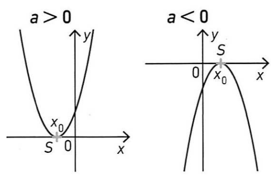
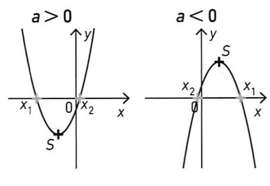
Donc l'équation (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x-x_1)(x-x_2)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 38

Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. Le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ :

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de l'équation	pas de solution réelle	une solution « double » $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Représentation graphique	 la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses	 la parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point	 la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points
Forme factorisée du trinôme	pas de factorisation en produit de facteurs de degré 1	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

Démonstration : Voir ci-dessus □

III. Exemples

Résoudre les équations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 = 0$ (1)
   On calcule le discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28$
   $\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$
   et
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$
   Remarque : Penser à diviser les membres de l'équation si possible pour simplifier les calculs.
   Ici, (1) $\iff x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0$
   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times \dfrac{3}{2} = 7$
   $\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$
   et
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} = 0$ (2)
   On calcule le discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 6 \times \dfrac{2}{3} = 16 - 16 = 0$
   $\Delta = 0$, donc l'équation (2) a une solution :
   $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

c. $x + 3x^2 = -1$ (3)
   On a :
   (3) $\iff 3x^2 + x + 1 = 0$
   On calcule le discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 = 1 - 12 = -11$
   $\Delta = 0$, donc l'équation (3) n'a pas de solution.

d. $2x^2 - 5x = 0$ (4)
   Il n'y a pas de terme constant : inutile de calculer le discriminant : on factorise !
   On a :
   $$\begin{aligned}(4) &\iff x(2x-5) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Donc l'équation (4) a deux solutions : 0 et $\frac{5}{2}$.

e. $x^2 + 3 = 0$ (5)
Il n'y a pas de terme de degré 1 : inutile de calculer le discriminant !
On a :
(5) $\iff x^2 = -3$
Donc l'équation (5) a n'a pas de solution.

On déduit des calculs précédents les factorisations suivantes :
$2x^2 - 2x - 3 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)\left(1 + \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$
$6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = a(x - x_0)^2 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$
$2x^2 - 5x = a(x - x_1)(x - x_2) = 2x\left(x - \frac{5}{2}\right)$

IV. Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est appelée racine ou zéro du trinôme.
- Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
- Si l'équation s'écrit $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$, il est inutile de calculer le discriminant (voir exemples d) et e).
- On peut bien sûr contrôler graphiquement les solutions trouvées avec la calculatrice ou un logiciel comme Geogebra.

Fiche 2

Équations et inéquations du second degré Signe du trinôme - Résolution d'inéquations

I. Signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$,

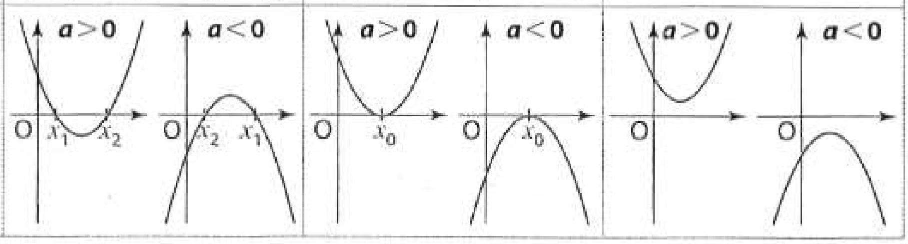
- Si $\Delta < 0$,
  on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

  L'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme.
  Ainsi, si $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Ainsi, en supposant que $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$		signe de a	

D'où la propriété suivante :

Propriété 39
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le signe de f est donné par les tableaux suivants :

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: signe de a 0 signe de a	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: signe de a
Courbe représentative de f			

Démonstration : Voir ci-dessus. □

On peut retenir cette propriété en disant que :
« $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ **est toujours du signe de $\boldsymbol{a}$,sauf entre les racines,s'il y en a ».**

II. Exemples

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ (1)

On a démontré que le trinôme $2x^2 - 2x - 3$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $]-\infty\,;\,x_1] \cup [x_2\,;\,+\infty[$.

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} \leqslant 0$ (2)

On a démontré que le trinôme $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$ a une racine : $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$		$+$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

c. $3x^2+x+1>0$ (3)
On a démontré que le trinôme $3x^2+x+1$ n'a pas de racine.
De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $3x^2+x+1>0$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est $\mathbb{R}$.

d. $-6x^2-10x+3<-4+x$ (4)
Soit $x\in\mathbb{R}$,
(4) $\iff -6x^2-11x+7<0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta=121+4\times6\times7=121+168=289=17^2$.
On a $\Delta>0$, donc le trinôme a deux racines :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a}=\dfrac{11-17}{-12}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$,
et
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a}=\dfrac{11+17}{-12}=-\dfrac{28}{12}=-\dfrac{7}{3}$.
De plus le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2-11x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\left]-\infty\,;\,-\frac{7}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.