Thème 1

Fiche 1

Nombres complexes
Activités préparatoires

D'après Terracher, 1992.
Une présentation « à la hache » des nombres complexes donnerait le scénario suivant :

1. Levons l'interdiction : « Un nombre négatif n 'a pas de racine carrée ».
2. Introduisons, résistant à l'horreur, « un nombre » noté i tel que $i^2 = -1$. Ce nombre fantôme ne pouvant pas être réel, disons qu'il est « imaginaire ».
3. Multiplions le nombre fantôme par un réel quelconque y et ajoutons un réel x. Notons le résultat $x + iy$: il vient de naître un nombre complexe.
4. Et parce que nous savons qu'aucun accident n'est à craindre, nous dirons que l'on peut appliquer à ces nombres, les méthodes et les règles usuelles du calcul. Ce qui veut dire par exemple que :
   — $(3+4i)+(2-i) = 5+3i$
   — $(3+4i)\times(2-i) = 6+8i-3i-4i^2$ soit, comme $i^2 = -1$, $(3+4i)\times(2-i) = 6+5i+4 = 10+5i$
5. Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble de tous ces nombres z qui s'écrivent $z = x+iy$, avec x et y réels (**écriture unique**). Nous admettrons que les propriétés familières de l'addition et de la multiplication persévèrent dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$: c'est fini.
   Ajoutons que $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes et notre scénario s'achève sur une note savante.

I. Familiarisation avec les calculs

Exercice 1. Calculer i^2, i^3,i^4 et i^n en fonction de l'entier n.

Exercice 2. Calculer et mettre sous la forme $a+ib$ avec a et b réels les sommes suivantes :

(a) $(1+i)+(-1+i)$

(b) $(3-i)-(5+3i)$

(c) $(1+i)+(1+2i)+\ldots+(1+2020i)$

(d) $(a+ib)+(a-ib)$

(e) $(a+ib)-(a-ib)$

Exercice 3. Mettre sous la forme $a+ib$ avec a et b réels les produits :

(a) $(2-5i)(4+i)$

(b) $(3+i)^2$

(c) $(1-i)^3$

(d) $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $iz = 3-i$

(b) $(1-3i)z = -2+5i$

Le symbole « i » est introduit par Euler pour la première fois en 1777 seulement en lieu et place de la notation plus qu'ambiguë « $\sqrt{-1}$ » utilisée depuis le milieu du XVI siècle par les algébristes et les géomètres, comme nous allons le voir dans la partie suivante.

II. Présentation historique

Au XVI siècle, en plein « Rinascimento », l'équation du troisième degré est résolue algébriquement, dans le cadre d'un concours de savants (Tartaglia et Cardan). Ce dernier expose une formule donnant une racine de l'équation $x^3 = px+q$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}}$$

Ars Magna, 1547.

Exercice 5. On considère l'équation $x^3 = 2x-5$ (E).

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^3-2x+5$ définie sur $\mathbb{R}$. Conjecturer grâce à cette étude le nombre de solution de cette l'équation (E). On admettra ensemble les limites aux bornes.

(b) Quelle valeur obtenez vous en utilisant la formule de Cardan ?

(c) Peut-on appliquer la formule de Cardan à l'équation $x^3 = 51x+104$?

L'exercice suivant propose de résoudre cette dernière équation à l'aide du nombre i.
En effet, $(47i)^2 = -2209$.

Exercice 6. Considérons l'équation $x^3 = 51x+104$ (E)

(a) Montrer que la formule de Cardan s'écrit « formellement »

$$x = \sqrt[3]{52+47i} + \sqrt[3]{52-47i}$$

(b) Calculer $(4+i)^3$ et $(4-i)^3$. En déduire une solution de (E).

(c) Factoriser $x^3-51x-104$ par $x-\alpha$ où α est la solution trouvée en b).

(d) Achever la résolution de (E).

Cette activité montre toute l'efficacité de l'ingénieuse invention du nombre i, due à Bombelli qui, dans son « Algèbre » en 1572 énonça les règles de multiplication dans la célèbre comptine :

Più via più di meno fa più di meno.
Meno via più di meno fa meno di meno.
Più via meno di meno fa meno di meno.
Meno via meno di meno fa più di meno.
Miù di meno via più di meno fa meno.
Più di meno via meno di meno fa più.
Meno di meno via più di meno fa più.
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Traductions : Più = +1 , Meno = -1, Più di meno = i, Meno di meno = -i
La reconnaissance de ces nombres imaginaires reste très controversée chez les mathématiciens jusqu'à leur représentation géométrique décrite par Gauss dans sa lettre à Bessel en 1811 : « ... on peut représenter toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini. » (Le complexe $z = a+ib$ est représenté par le point $M(a, b)$ du plan muni d'un repère orthonormal). L'invention de Bombelli accède au statut de « nombre ».

III. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont « définies » par :
Pour tout $z = a + ib$ et tout $z' = a' + ib'$,

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

et

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Exercice 7. Montrer que l'addition :

(a) est commutative : pour tous z et z', $z + z' = z' + z$.

(b) est associative : pour tous z , z' et z'' $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

(c) admet un élément neutre $0 = 0 + i0$: pour tout z

$$z + 0 = z$$

(d) vérifie : tout z admet un opposé z' :

$$z + z' = 0$$

($z' = -a - ib$ est noté $-z$).

Exercice 8. Montrer que la multiplication est commutative et associative et admet un élément neutre $1 = 1 + i.0$.

Exercice 9. Montrer que la multiplication est distributive sur l'addition :

$$(z + z')z_1 = zz_1 + z'z_1.$$

Exercice 10. Soit $z = a + ib$, fixé non nul (a et b réels).

(a) Résoudre le système $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

(b) En déduire qu'il existe un unique complexe $z' = x + iy$ vérifiant $z'z = -1$. (z', noté $\dfrac{1}{z}$ est l'inverse de z.)

Les mathématiciens traduisent ainsi toutes les propriétés démontrées dans cette activité par $(\mathbb{C},+,\times)$ a une structure de corps commutatif.

Fiche 2

Nombres complexes
Généralités

D'après Terracher, 1992.

I. Présentation des nombres complexes

Nous admettons le résultat suivant qui fonde ce chapitre.

Théorème 1
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ où a et b sont des **réels**.

Vocabulaire

- $\mathbb{C}$ est appelé ensemble des nombres complexes
- si $z = a + ib$ et a, b réels alors
  - a est appelé partie réelle de z, notée $\mathfrak{Re}(z)$
  - b est appelé partie imaginaire de z, notée $\mathfrak{Im}(z)$
  - Si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, z est dit réel. On retrouve ainsi l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
    Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, z est dit imaginaire pur.

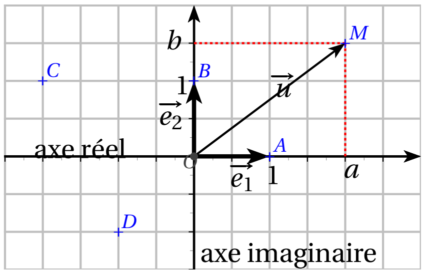
Égalité

La dernière phrase du théorème peut s'énoncer ainsi :« Si deux complexes sont égaux, alors ils ont même partie réelle et même partie imaginaire » :
Si $a + ib = x + iy$ et x, y, a, b réels alors $a = x$ et $b = y$.
En particulier, si $a + ib = 0$ alors $a = b = 0$.

II. Représentation graphique

- Le plan muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est appelé **plan complexe**.

- Le **nombre** $x+iy$ est représenté par le **point** $M(x,y)$ (ou le vecteur $\overrightarrow{u}(x,y)$)
- On dit que ***M* est l'image** de z (ou de $\overrightarrow{u}(x,y)$),
- On dit que ***z* est l'affixe** de M (ou de $\overrightarrow{u}(x,y)$).
- Conséquence :
  - deux points sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.
  - deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.



Sur la figure ci-dessus, les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $1, i, -2+i, -1-i$.

III. Opérations

Somme et produit

Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes.
Le théorème 1 permet de « calculer » $(a+ib)+(a'+ib')$ et $(a+ib)(a'+ib')$ en appliquant les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.
Il vient :

$$z+z' = (a+a')+i(b+b')$$

et, compte tenu que $i^2 = -1$

$$zz' = (aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

On en déduit, en posant $z' = -1$:

$$-z = -a-ib$$

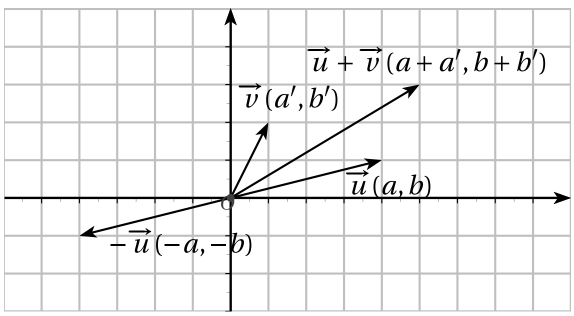
puis

$$z-z' = (a-a')+i(b-b')$$

Affixe de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, de $\overrightarrow{AB}$

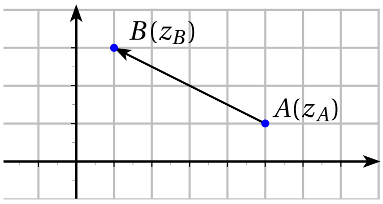
Des expressions de la somme et de l'opposé résultent les égalités :

- affixe $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$=affixe($\overrightarrow{u}$)+affixe($\overrightarrow{v}$).
- affixe(-$\overrightarrow{u}$)=-affixe($\overrightarrow{u}$).



De l'expression de la différence, il vient :

$$\text{affixe}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$



Interprétation de $z \mapsto z+\alpha$

Soit z et α deux nombres complexes, M et M' les points d'affixes respectives z et $z+\alpha$, et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe α. Puisque $(z+\alpha)-z=\alpha$ alors $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{u}$:
la transformation du plan complexe $M(z)\mapsto M'(z+\alpha)$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Inverse et quotient

Le théorème suivant a été prouvé en activité.

Théorème 2
Tout nombre complexe non nul $z=a+ib$ avec a et b réels admet un inverse z' (c'est à dire un nombre complexe z' vérifiant $zz'=1$). On a

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

z' est noté $\dfrac{1}{z}$

Nous pouvons alors définir le quotient $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ (si $z' \neq 0$). En pratique, pour le calcul de l'inverse du quotient et de l'inverse, on ne retient pas la formule, mais on fait intervenir « à propos »l'égalité $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

Exemple

Mettre sous forme $a+ib$ avec a et b réels les nombres complexes $\dfrac{1}{3-4i}$ et $\dfrac{1-i}{1+i}$.

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + i\frac{4}{25}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

IV. Propriétés algébriques

Structure de corps

Pour résumer les propriétés suivantes de l'addition et de la multiplication

- $+$ et $\times$ sont commutatives et associatives,

- $\times$ est distributive sur $+$
- tout élément de $\mathbb{C}$ admet un opposé
- tout élément de $\mathbb{C}^*$ admet un inverse,

Les mathématiciens disent que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Conséquences algébriques

1. Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$
2. On résout dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$, les équations du premier degré et les systèmes linéaires.
3. L'égalité $zz' = 0$ équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$
4. La formule du binôme de newton est valide :Pour tous a et b complexes, pour tout n entier naturel,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
5. L'égalité de Bernoulli est à connaître, pour tout entier naturel non nul n et tous nombres complexes a et b,
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

V. Conjugué d'un nombre complexe

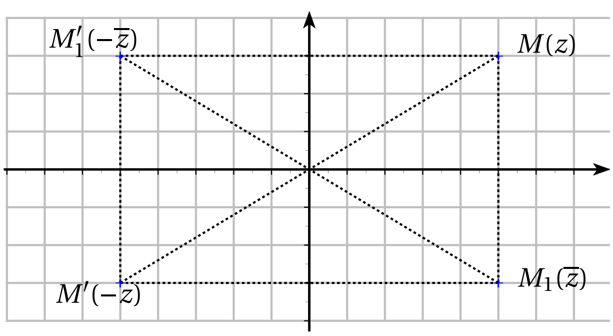
Définition 1
Soit z un nombre complexe, $z = a + ib$, a et b réels. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Ainsi, les conjugués respectifs de -3, i $1-5i$ sont -3, $-i$ et $1+5i$. Nous remarquons que :

- z est réel équivaut à $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur équivaut à $\overline{z} = -z$
- pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$

Schéma à retenir

Le schéma ci-dessous présente les images de z, $\overline{z}$,$-z$ et $-\overline{z}$.



La transformation du plan complexe qui à z associe $\overline{z}$ est la représentation complexe de la symétrie d'axe (Ox).
La transformation du plan complexe qui à z associe $-z$ est la représentation complexe de la symétrie de centre O.

Compatibilité de la conjugaison par rapport aux opérations

Théorème 3
Pour tous nombres complexes z et z', et tout entier naturel n, (lorsque ces égalités ont un sens) :

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$$
$$\overline{-z}=-\overline{z}$$
$$\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$$

$$\overline{z^n}=\overline{z}^n$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

On notera aussi la relation $z\overline{z}=a^2+b^2$, déjà utilisée dans la recherche de $\dfrac{1}{z}$.

VI. Exercices

Calculs dans $\mathbb{C}$

Dans les exercices suivants mettre z sous la forme $a+ib$ avec a et b réels.

Exercice 11. (a) $(2+7i)^2$
(b) $(2-7i)^2$
(c) $(2+7i)(2-7i)$

Exercice 12. (a) $(1+i)^3$
(b) $(1-i)^3$
(c) $(5+2i)^3$

Exercice 13. (a) $\dfrac{1}{i}$
(b) $\dfrac{1}{1+i}$
(c) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 14. (a) $\dfrac{2-2i}{i}$
(b) $\dfrac{3-5i}{2-i}$

Exercice 15. (a) $\dfrac{-5+i}{3+11i}$
(b) $\dfrac{i-1}{i+1}$

Exercice 16. Calculer $1+i+i^2+...+i^{2021}$

Exercice 17. On pose $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calculer j^2.
En déduire les relations suivantes :

$$1+j+j^2=0 \text{ et } j^3=1 \text{ et } \frac{1}{j}=j^2=\overline{j}$$

Exercice 18. Calculer $(1+i)^2$ en déduire $(1+i)^{100}$

Exercice 19. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z'=z^2$.

1. si $z=x+iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 20. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z'=\dfrac{1}{z}$ ($z\neq 0$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 21. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{z+1}{z-i}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Conjugué

Exercice 22. Démontrer le théorème de compatibilité de la conjugaison avec les opérations.

Exercice 23. Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. En déduire que si z est une racine de P, $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Exercice 24. Dans chaque cas exprimer en fonction du nombre complexe $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe Z :

1. $Z = 2z^2 - 3z + 1$
2. $Z = (z - 2i)(3 - 2z)$
3. $Z = iz - (z-2)^2$
4. $Z = z^3 + (1-i)z + i - 3$

Exercice 25. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{1}{z}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 26. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{\overline{z}}{3-\overline{z}}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 27. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul

$$\overline{z + \frac{1}{z}} - \overline{\frac{1+z}{\overline{z}}} = \overline{z} - 1$$

Formule du binôme de Newton

Exercice 28. Démontrer la formule du Binôme de newton.

Exercice 29. Développer avec la formule du binôme et le triangle de Pascal.

1. $(z+2)^3$
2. $(z-1)^4$
3. $(2z-1)^5$
4. $(z+1)^6$
5. $(\frac{z}{2}+2)^4$
6. $(z-3)^8$
7. $(1+i)^5$
8. $(1-i)^4$

Exercice 30. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

Exercice 31. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$

Exercice 32. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p}$

Equations-système

Exercice 33. Justifier que le couple $(8+i; -1+6i)$ est solution du système $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1 + 4i \end{cases}$

Exercice 34. Est-il vrai que $1,3 + 0,1i$ est solution de l'équation $(1+i)z + (3+i)\overline{z} = \dfrac{26}{5} + \dfrac{12}{5}i$?

Exercice 35.

1. $(2-i)z + 3i = 5 - 2i$
2. $2iz + 3 = 5i$
3. $z - 2\overline{z} = 9 + 2i$
4. $-3iz + 3\overline{z} = 18 - 2i$

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}(1+i)z - iz' = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i\end{cases}$
2. $\begin{cases}-2(2+i)z + 7z' = 1+2i \\ (1-i)\overline{z} - \overline{z'} = 4-i\end{cases}$

VI.1. Équations polynomiales

Exercice 37. Résoudre dans C l'équation
$x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 38.

1. Démontrer l'identité de Bernoulli.
2. Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, si P admet le nombre α comme racine, démontrer qu'alors il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$
3. Vérifier que 4 est une solution de $x^3 - 15x - 4 = 0$. Puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
4. Déterminer une racine évidente, puis résoudre dans C l'équation
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Fiche 3

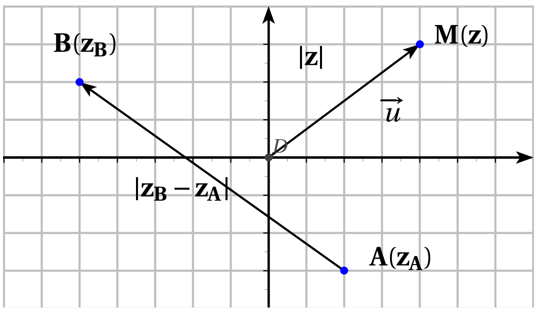
Nombres complexes
Module d'un nombre complexe

D'après Terracher, 1992.

I. Définition

Définition 2
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (a et b réels).
On appelle module de z le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Interprétation géométrique :
Si $M(a, b)$ est l'image de z dans le plan complexe d'origine O, il est clair que $|z| = OM = \|\overrightarrow{u}\|$ où $\overrightarrow{u}(a, b)$.
En outre, nous avons vu que $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, il en résulte que $|z_B - z_A| = AB$ et ce pour tous complexes z_A et z_B, affixes des points A et B.



Exemple

1. Calculer le module de $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 1 + i$, et $z_3 = -3i$.

   $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
   $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
   $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

2. Déterminer l'ensemble E des points M dont l'affixe z vérifie $|z - 2i| = 3$.

Soit A le point d'affixe $2i$, la condition s'écrit aussi $|z_M - z_A| = 3$, ce qui équivaut à $AM = 3$. E est le cercle de centre A de rayon 3.

II. Propriétés des modules

Théorème 4
Pour tous nombres complexes z et z'

- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- si n est un entier naturel, $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$.

Exemple

Puisque $|1-i| = \sqrt{2}$ et $|2+3i| = \sqrt{13}$, le module de $\dfrac{(2+3i)^2}{(1-i)^5}$ est $\dfrac{13}{4\sqrt{2}}$

Ensemble $\mathbb{U}$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$.

Propriété 1
Pour tous complexes z et z' de l'ensemble $\mathbb{U}$,

1. $zz' \in \mathbb{U}$
2. $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$
3. $\overline{z} \in \mathbb{U}$

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse et à la conjugaison.

III. Exercices

Exercice 39. Calculer le module de

(a) $1 - i\sqrt{3}$

(a) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

(a) $(3+2i)^5$

(a) $(-1+i)(-3+i)(-5+i)$

(a) $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où θ est un réel.

(a) $\dfrac{7}{(2-i)^2}$

(a) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$

Exercice 40. Démontrer les propriétés du cours

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. si n est un entier naturel, $|z^n| = |z|^n$
3. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.

Exercice 41. Démontrer les propriétés du cours concernant $\mathbb{U}$.

Exercice 42. Soit $z = x + iy$ (x et y réels) exprimer en fonction de x et y, le module des nombres complexes

1. $z+1$
2. $1-\frac{1}{z}$
3. z^2-1

Exercice 43. Déterminer z pour que z, $1-z$ et z^2 aient le même module.

Exercice 44. Déterminer z pour que z, $1-z$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 45. Démontrer que pour tous nombres complexes z et z', on a $|z-z'|^2 \leqslant (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$. pour quels nombres z et z' a-t-on l'égalité ?

Exercice 46. Soit A un point d'affixe α, du plan complexe. déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, vérifiant :

$$|z|^2 = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$$

Exercice 47. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = (1+i)z - 1 + 3i$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.

Exercice 48. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \frac{z-i}{z+1}$ ($z \neq 1$). Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.

Exercice 49. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1, tels que $zz' \neq -1$. démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 50. Démontrer que quels que soient les réels a, b, c et d

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

En déduire une écriture de 101×26 sous la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 51. Démontrer que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Exercice 52. Soit $z \in \mathbb{U} - 1$, démontrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Fiche 4

Nombres complexes
Trigonométrie- Formules d'addition

I. Activité

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Notons I le point de coordonnées $(1,0)$.
Rappelons que chaque point du cercle est l'image de nombres de la droite des réelles enroulée sur le cercle trigonométrique. Si M est le point image par enroulement de la droite du nombre réel θ alors le point M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Considérons deux nombres réels θ et θ', et M et M' les images de ces nombres par enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique.

1. Exprimer à l'aide de θ et θ' les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$.
2. Exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.
3. En déduire l'expression de $\cos(\theta - \theta')$ en fonction de θ et θ'.
4. Rappeler les formules trigonométriques des angles associées.
5. En déduire les expressions de $\cos(\theta + \theta')$, $\sin(\theta - \theta')$, $\sin(\theta + \theta')$
6. Déduire des questions précédentes les formules dites de duplication :$\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$.
7. Faire un tableau résumé et l'apprendre !

II. Exercices

D'après 1S- Fractales-1995

Exercice 53. Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$ les nombres suivants :

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos(x + 3\pi)$
3. $\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
5. $\sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$
6. $\sin(5\pi + x)$
7. $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$
8. $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 54. Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$ les nombres suivants :

1. $2\cos x+3\cos(x+\pi)+5\sin(\frac{\pi}{2}+x)$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-5\cos\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)+4\sin(\pi-x)$
3. $\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-2\sin(3\pi-x)+4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
4. $3\cos(-x+\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Exercice 55. Calculez les deux sommes suivantes :

1. $\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 56.

1. Calculez $\sin x$ sachant que $\cos x=\frac{2}{5}$ et $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculez $\cos x$ sachant que $\sin x=\frac{3}{5}$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
3. Calculez x sachant que $\sin x=\frac{1}{2}$ et $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Calculez x sachant que $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x\in[0,\pi]$.

Exercice 57.

1. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x+\sin x=1$.
2. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$.
3. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x-\sin x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
4. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x+\sin x=\frac{1}{2}$.

Exercice 58. Démontrer les égalités suivantes, valables quel que soit le nombre réels x.

1. $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$
2. $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$
3. $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos 2x$
4. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$
5. $\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x=1$
6. $\cos^4 x+\sin^4 x=1-\frac{1}{2}(\sin 2x)^2$

Exercice 59. Démontrer les égalités suivantes, valables quel que soit le nombre réels x.

1. $(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\sin^3 x+\cos^3 x$.
2. $\sin 2x+\cos 2x=1+2\sin x(\cos x-\sin x)$.
3. $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=\cos 2x(\sin x+\cos x)$

Exercice 60.

1. Ecrivez $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ sous la forme $\frac{\pi}{a}$.
2. Déduisez en le sinus et le cosinus des nombres suivants : $\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12},\frac{19\pi}{12}$.

Exercice 61. Un nombre θ est tel que $\cos\theta=\frac{3}{5}$ et $\sin\theta>0$. Calculez $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.

Exercice 62. Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\frac{\sin 2a}{\sin a}-\frac{\cos 2a}{\cos a}$

2. $\dfrac{\cos 6a}{\cos 3a} - \dfrac{\sin 6a}{\sin 3a}$
3. $\dfrac{\sin 9a}{\sin 3a} - \dfrac{\cos 9a}{\cos 3a}$

Exercice 63. Démontrez que les expressions suivantes sont vraies quels que soient les réels a, b et c :

1. $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$
2. $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$

Exercice 64. Démontrez que les expressions suivantes sont vraies quels que soient les réels a, b et c :

1. $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$
2. $2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$
3. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$
4. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$

Exercice 65.

1. Exprimez $\cos(a+b+c)$ et $\sin(a+b+c)$ à l'aide des sinus et cosinus des nombres a, b et c.
2. Déduisez des résultats de la question 1, une expression de $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$. Comparez avec les résultats de l'exercice 29 – (12).
3. Déduisez des résultats de la question 1, une expression de $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$.
4. Démontrez que, quel que soit le nombre réel a, on a

$$\cos^2 a - \sin^2(2a) = \cos a \cos 3a$$

.

Fiche 5

Nombres complexes
Arguments d'un nombre complexe non nul

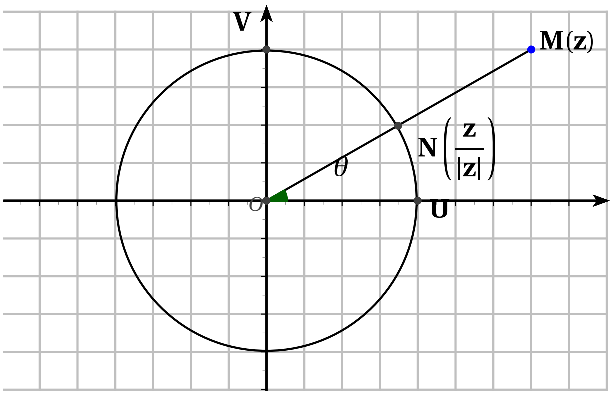
D'après Terracher, 1992.
$(O;\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OV})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

I. Définition

Définition 3
Soit z un nombre complexe non nul de point image M dans le plan complexe, notons N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$. On appelle argument de z et on note $arg(z)$ tout nombre réel θ qui a pour image N sur $\mathscr{C}$ lors de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle.

Remarques

1. Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments. En effet si θ est un argument de z, les autres s'écrivent de la forme $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On note $\arg(z)=\theta$ ou encore $\arg(z)=0[2\pi]$, ou encore $\arg(z)=0$ modulo 2π.
2. On dit aussi qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM})$ est θ.



II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture $x+iy$ avec x et y réels, notons θ un argument de z, alors
$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta \\ y=|z|\sin\theta \end{cases}$$

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété 2
Tout nombre complexe non nul z de module $|z|$ et d'argument θ peut s'écrire :
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
Cette écriture de z est appelée **forme trigonométrique** de z tandis que l'écriture $z = x + iy$ avec x réel et y réel est appelée **forme algébrique** de z.

Exemples

1. $|1+i| = \sqrt{2}$ donc $1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. $|-1+i\sqrt{3}| = 2$ donc $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

On dispose par ailleurs de la propriété suivante

Propriété 3
Si z est un nombre complexe s'écrivant sous la forme :
$$z' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } r \text{ réel et } r > 0$$
alors z est non nul, r est le module de z et θ un argument de z.

III. Forme trigonométrique d'un produit-Formule de MOIVRE

Forme trigonométrique d'un produit

Soit z un nombre complexe non nul de forme trigonométrique :
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
et z' un nombre complexe non nul de forme trigonométrique :
$$z' = |z'|\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$
Alors
$$zz' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$
donc
$$zz' = |z||z'|\left(\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right)\right)$$
d'où en utilisant les formules de la fiche précédente :
$$zz' = |z||z'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$$
Ainsi $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ d'où la propriété suivante :

Propriété 4
Le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leurs modules.
Un argument du produit de deux nombres complexes non nuls est la somme de leurs arguments.

Remarques

1. Si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ alors $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ implique $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ et $\arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$.

   On obtient $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{r}$ et $\arg(z) = -\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$
2. De plus , si Si $|z'| = r'$ et $\arg(z') = \theta'$, en combinant acec la propriété précédente :
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} \text{ et } arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta'.$$

Formule de Moivre

Soit n un entier naturel non nul,. Du paragraphe précédent on déduit que si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ alors $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. En particulier, si $r = 1$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Cette formule qui a de nombreuses application en trigonométrie a été découverte par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1722 alors qu'il essayait de factoriser des polynômes du type $z^{2n} + 2z\cos(n\theta) + 1$.

Propriété 5
Pour tout nombre entier naturel non nul$n$ et tout nombre réel θ

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemple

- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(\frac{2020\pi}{4}) + i\sin(\frac{2020\pi}{4})$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(505\pi) + i\sin(505\pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(504\pi + \pi) + i\sin(504\pi + \pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = -1$

IV. Exercices

Exercice 67. Déterminez module et arguments des nombres complexes suivants, les écrire sous forme trigonométrique.

1. $z = i$
2. $z = -i$
3. $z = 1$
4. $z = -1$
5. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $z = -1 + i\sqrt{3}$
7. $z = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
8. $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-1-i}{i}\right)$
9. $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
10. $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}i\right)^3$
11. $z = 2i$
12. $z = -2i$
13. $z = -5\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $z = \sqrt{2}$
15. $z = 1 + i$
16. $z = 1 - i$
17. $z = -1 - i$
18. $z = 1 - \sqrt{3}$
19. $z = 2\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$
20. $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)$
21. $z = \left(\dfrac{i}{1-i}\right)^4$
22. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{12}$
23. $z = (1+i)^{2020}$
24. $z = (\sqrt{3}-i)^{2021}$
25. $z = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$
26. $z = \sin\theta + 2i\sin^2\theta$
27. $z = \cos\theta + i(1 + \sin\theta)$.

Exercice 68.

1. Calculez $(1+i)^n$ à l'aide du binôme de Newton.
2. Calculez $(1+i)^n$ à l'aide de la formule de Moivre.
3. En déduire deux égalités.

Fiche 6

Nombres complexes
Notation $re^{i\theta}$. Formules d'Euler

D'après Fractales.1992.

I. Notation $re^{i\theta}$

Dans la formule de Moivre, on remarque que l'argument θ se comporte comme un exposant. On convient de noter :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Ainsi, tout nombre z appartenant à $\mathbb{U}$ peut s'écrire $z = e^{i\theta}$. Cette notation sera justifiée dans les années ultérieures. En terminale, nous utilisons pour sa commodité d'écriture.
La formule de Moivre devient :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

De même, tout nombre complexe z de module r et d'argument θ se note

$$z = re^{i\theta}.$$

Exemples

- $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $-1 = e^{i\pi}$

La proposition relative au produit de deux nombres complexes, écrits, sous forme trigonométrique nous fournit, dans le cas où $r = r' = 1$, la relation suivante :

Propriété 6
Pour tous nombres réels θ et θ',

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

II. Formules d'Euler

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\overline{z}$ son conjugué.On a :

$$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$z + \overline{z} = 2\cos\theta$ et $z - \overline{z} = 2i\sin\theta$.
On obtient donc,
$\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
Or, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et $\overline{z} = e^{-i\theta}$.
Donc, on en déduit donc les formules suivantes dues à Euler (inventeur de la notation $e^{i\theta}$ en 1746), appelées **formules d'Euler** :

Propriété 7
Pour tout nombre réel θ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

.

Exemple

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}.$$

Exercices

Exercice 69. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, placez les points images de $e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 70. Exprimez sous forme trigonométrique les nombres complexes $\sqrt{3} - i$, $5(1+i)$, $2\sqrt{3}(i-\sqrt{3})$.

Exercice 71. Exprimez sous forme exponentielle le nombre complexe $1 + e^{i\theta}$

Exercice 72. Exprimez sous forme exponentielle le nombre complexe $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, où θ est un réel de $]-\pi, \pi[$, non nul.

Exercice 73. Soit $z = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$, où θ est un réel de $]-\pi,\pi[$.

1. Montrez que z est un imaginaire pur ou nul.
2. Exprimez $|z|$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice 74. Soit $z = re^{i\theta}$, Montrez que

$$(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\ldots(z^n+\overline{z}^n)$$

est un nombre réel que vous exprimerez en focntion de r et de θ.

Exercice 75. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $Z = z + |z|$.

1. Exprimez $|Z|$ et $arg(Z)$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.
2. On se situe dans unplan muni d'un repère orthonormal direct. M a pour affixe Z, m a pour affixe z . Quel est le lieu décrit par M lorsque m décrit un cercle de centre l'origine ?

Fiche 7

Nombres complexes
Transformation de $a\cos x + b\sin x$

D'après Fractales.1992.

Le but de cette fiche est de factoriser toute expression du type $a\cos x + b\sin x$, où a et b sont deux nombres réels non simultanément nuls, sous la forme $r\cos(x-\theta)$. Cette seconde écriture est plus pratique pour des résolutions d'équations, recherches de signes, etc.

I. Approche géométrique du problème

1. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et, dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, les points $M(z)$ et $M'(z')$. Vérifiez que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = Re(z\overline{z'}$.
2. Soit $M(a,b)$. Déterminez les coordonnées d'un point N tel que $a\cos x + b\sin x$ s'interprète comme $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.
3. M a pour affixe $a+ib$ et N a pour affixe e^{ix}. Il existe un nombre r ($r>0$) et un nombre θ tels que $a+ib = re^{i\theta}$.
   En utilisant le 1) et le 2), exprimez $a\cos x + b\sin x$ en fonction de r, θ et x. Que représentent r et θ pour le nombre complexe $a+ib$?

II. Exemple de factorisation

Appliquons la méthode précédente à l'expression : $\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

1. Écrivez sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en que $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

III. Résolution d'équations

1. En utilisant la méthode précédente de factorisation, résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :
   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x + \sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
   b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$
2. Une équation du type $a\cos x + b\sin x = c$ admet -elle toujours des solutions ?
   Discutez selon les valeurs de c.

IV. Méthode

Pour factoriser une expression du type $a\cos x + b\sin x$

1. on écrit le nombre complexe $a + ib$ sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$
2. On a alors $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \theta)$

Fiche 8

Nombres complexes trigonométrie

D'après Fractales.1992.
Le but de cette fiche est de transformer une somme trigonométrique en un produit (et réciproquement).
L'intérêt d'une telle transformation est clair, par exemple pour résoudre une équation du type $\cos 3x + \cos 5x = 0$.

I. Transformation d'une somme en un produit

1. **Factorisation de $\cos a + \cos b$**
   Le nombre $\cos a + \cos b$ est la partie réelle du nombre complexe $e^{ia} + e^{ib}$.
   (a) On peut écrire : $\left|e^{ia} + e^{ib}\right|^2 = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$.
   Montrez que $\left|e^{ia} + e^{ib}\right|^2 = 2(1 + \cos(a - b)) = 4\cos^2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
   (b) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos\dfrac{a-b}{2}$, montrez que
   $$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$
   (c) En égalant les parties réelles, montrez que
   $$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
2. **Autres factorisations**
   (a) En égalant les parties imaginaires des deux écritures de $e^{ia} + e^{ib}$, montrez que :
   $$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
   (b) En procédant comme au 1) avec le nombre $e^{ia} - e^{ib}$, montrez successivement que :
   - ⋆ $\left|e^{ia} - e^{ib}\right|^2 = 4\sin^2\dfrac{a-b}{2}$
   - ⋆ $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\dfrac{a-b}{2}e^{i\frac{a+b}{2}}$
   - ⋆ $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

- ⋆ $\sin a - \sin b = -2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

(c) **Exemples** En utilisant les formules trouvées précédemment, factorisez les expressions suivantes :

i. $\cos 2x + \cos 6x$

ii. $\sin x + \sin 5x$

iii. $\cos 3x - \cos x$

iv. $\sin 2x - \sin 3x$

II. Transformation d'un produit en somme

1. On pose $p\dfrac{a+b}{2}$ et $q = \dfrac{a-b}{2}$.
   (a) Exprimez a et b en fonction de p et q.
   (b) Déduisez des formules trouvées précédemment que :
   $$\cos p\cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\big)$$
   (c) Déduisez en de même les produits $\sin p\sin q$ et $\sin p\cos q$.
2. Application. En utilisant les formules précédentes, écrivez sous forme de sommes les produits suivants :
   (a) $\sin 2x\cos 6x$
   (b) $\cos x\cos 5x$
   (c) $\sin 3x\sin 2x$

III. Exemples d'utilisation

1. Résolution d'une équation trigonométrique : Soit l'équation $\sin 5x + \sin 7x = 0$.
   (a) Grâce aux formules vues plus haut, factorisez $\sin 5x + \sin 7x$.
   (b) Résolvez $\sin 6x = 0$ et $\cos x = 0$.
   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation initiale.
2. Recherche d'une primitive Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 3x\cos 5x$.
   (a) Transformez $f(x)$ en une somme trigonométrique
   (b) Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

IV. Bilan des formules à retenir

1. $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
2. $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
3. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
4. $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
5. $\cos p\cos q = \dfrac{1}{2}\big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\big)$
6. $\sin p\sin q = \dfrac{1}{2}\big(\cos(p-q)-\cos(p+q)\big)$
7. $\sin p\cos q = \dfrac{1}{2}\big(\sin(p+q)+\sin(p-q)\big)$

Fiche 9

Nombres complexes
Exemples d'utilisation des formules de Moivre et d'Euler

D'après Fractales.1992.

I. Exemple d'utilisation de la formule de Moivre

1. Écrivez $1+i$ sous forme trigonométrique.
2. Déduisez-en l'expression de $(1+i)^{13}$ par la formule de Moivre.
3. Déduisez-en que :

$$1-\binom{13}{2}+\binom{13}{4}-\binom{13}{6}+\binom{13}{8}-\binom{13}{10}+\binom{13}{12}=-64$$

$$\binom{13}{1}-\binom{13}{3}+\binom{13}{5}-\binom{13}{7}+\binom{13}{9}-\binom{13}{11}+\binom{13}{13}=-64$$

II. Linéarisation de polynômes trigonométriques

1. **Linéarisation de $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$**.
   (a) Soit un réel x. Développez $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$.
   (b) En déduire l'expression de $\cos^3 x$ en somme de termes du type $\cos kx$. Utilisez la formule d'Euler en regroupant les termes d'exposants opposés.) On dit alors qu'on a **linéarisé** $\cos^3 x$.
   (c) Procéder de la même manière pour linéariser $\sin^3 x$.
2. En utilisant une démarche analogue, linéarisez l'expression :

$$\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$$

3. **Recherche d'une primitive d'un polynôme trigonométrique**.
   (a) Linéarisez $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.
   (b) Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

III. Opération inverse de la linéarisation

1. **Écriture de $\cos 4x$ en fonction des puissances de $\cos x$.**
   (a) Développez $(\cos x + i\sin x)^4$.
   (b) Appliquez la formule de Moivre à $\cos 4x + i\sin 4x$.
   (c) En égalant les parties réelles, concluez.
   (d) Exprimez $\sin 4x$ à partir des puissances de $\sin x$
2. **Applications**
   (a) Montrez que $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$
   (b) Soit k un entier naturel. Exprimez $\sin\frac{x}{3^k}$ en fonction de $\sin\frac{x}{3^{k+1}}$.
   (c) Montrez que :

$$\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{x}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n} = \frac{3^n}{4}\sin\frac{x}{3^n} - \frac{1}{4}\sin x$$

IV. Exercices

Exercice 76. Linéarisez a) $\sin^6 x$; b) $\cos^4 x\sin^3 x$

Exercice 77. Linéarisez a) $\cos^5 x$; b) $\sin^4 x\cos^3 x$

Exercice 78. Soit θ un nombre réel de $]-\pi,\pi[$. Soit

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

Calculez $\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}$ en fonction des lignes trigonométriques de θ.

Exercice 79. Calculez les sommes suivantes

$$A = \cos x + \cos(x+\theta) + \cos(x+2\theta) + \cos(x+3\theta) + \ldots + \cos(x+(n-1)\theta)$$

et

$$B = \sin x + \sin(x+\theta) + \sin(x+2\theta) + \sin(x+3\theta) + \ldots + \sin(x+(n-1)\theta)$$

Fiche 10

Nombres complexes
Racines n-ièmes complexes de 1

D'après Fractales.1992.
Le but de cette fiche est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$ et certaines équations du type $z^n = a$. Dans tout cette fiche on appellera « racine nième du nombre complexe a » tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Ne confondez pas avec la racine niéme d'un nombre réel positif.

I. Racines n-ièmes de 1

1. **Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ (n entier naturel non nul.**
   (a) Montrez que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1$.
   (b) Montrez que l'équation $z^n = 1$ équivaut à l'équation d'inconnue θ :$e^{in\theta} = 1$.
   (c) Déduisez de ce qui précède que l'équation $z^n = 1$ a n solutions complexes :
   $$1, \qquad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \qquad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$$
2. **Ensemble des racines n-ièmes de 1** Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   (a) Exprimez les racines n-ièmes de 1 (autres que 1) en fonction de ω. Écrivez ainsi la liste des racines n-ièmes de 1.
   (b) Soit M_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Déduisez de a) que $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$. Quelle est la figure géométrique inscrite dans le cercle trigonométrique déterminée par les points M_0, M_1, ...,M_{n-1}.
   (c) Calculez la somme des racines n-ièmes de 1.
3. **Étude des cas $n = 3$ et $n = 4$**
   (a) Déterminez les racines troisièmes de l'unité. Exprimez les sous forme algébrique et trigonométrique.
   (b) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifiez que le sracines troisièmes de 1 sont $1, j$ et j^2. Remarquez que $j^2 = \overline{j}$. Faire une figure.
   (c) Déterminez de même les racines quatrièmes de 1 et placez les sur une figure.

II. Exercices

Exercice 80. Résoudre $z^5 - 1 = 0$

Exercice 81. Résoudre $z^5+1=0$

Exercice 82. Résoudre $z^5+i=0$

Exercice 83. Résoudre $z^6=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 84. Résoudre $z^4=2(1+i\sqrt{3})$

Exercice 85. Résoudre le système suivant, d'inconnues z_1 et z_2 complexes $\begin{cases} z_1 = z_2^2 \\ z_2 = z_1^2 \end{cases}$

Exercice 86. Résoudre $z^6=8i$. en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 87. Résoudre $z^6=8i$. en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 88. Soit $P(z)=1+2z+2z^2+2z^3+2z^4+z^5$

1. Calculez $P(-1)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

III. Bilan

Fiche 11

Nombres complexes
Problème de Noël

Partie 1

A_1 et A_2 désignent deux nombres réels strictement positifs.
φ_1 et φ_2 désignent deux réels.
Posons $Z = A_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}$

1. Calculer en fonction de A_1, A_2, φ_1 et φ_2 le module de Z. On le notera A.
2. A_1 et A_2 étant donnés, quelle condition portant sur φ_1 et φ_2 doit être réalisée pour que A soit le plus petit possible ?
3. A_1 et A_2 étant donnés, quelle condition portant sur φ_1 et φ_2 doit être réalisée pour que A soit le plus grand possible ?
4. Si $A_1 = A_2$ quelles sont les valeurs minimales et maximales de A ?

Partie 2

Dans cette partie on suppose que A, T, φ, λ, r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs. On note S_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S_1(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}r_1\right)$$

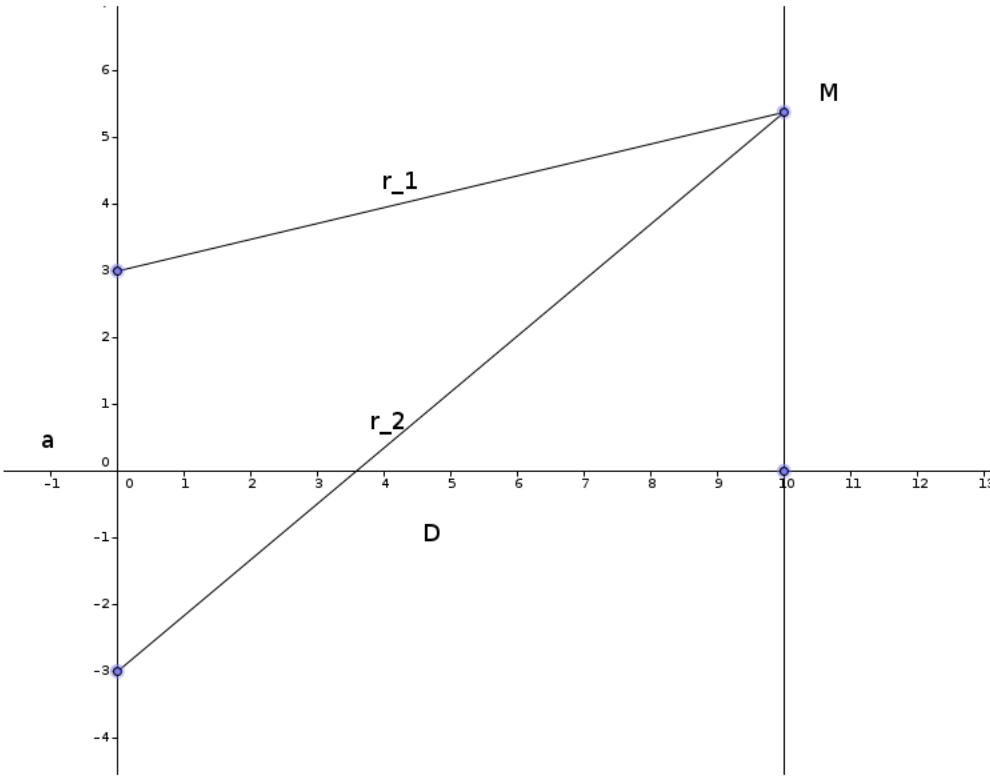
et S_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S_2(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right)$$

1. Quelle est la nature de la fonction S définie par $S_1 + S_2$?
2. Exprimer l'amplitude de S_1 et S_2 en fonction de r_1 et r_2.
3. Quelle condition sur r_1 et r_2 doit être vérifiée pour que la fonction S soit la fonction nulle ?
4. Quelle condition sur r_1 et r_2 pour que S soit une fonction sinusoïdale d'amplitude maximale ?

Partie 3

On considère la figure ci-dessous :



On suppose que le repère est orthonormé.
On suppose que r_1 désigne la longueur du segment joignant le point de coordonnées $(0, \frac{a}{2})$ au point de coordonnées (D, y).
On suppose que r_2 désigne la longueur du segment joignant le point de coordonnées $(0, -\frac{a}{2})$ au point de coordonnées (D, y).

1. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de D et a et y.
2. Donner l'expression de l'approximation affine de la fonction $\sqrt{1+X}$ au voisinage de 0.
3. Utiliser cette expression pour donner une expression simple de $r_2 - r_1$.
4. Retrouver l'expression de l'interfrange du cours de physique.