Thème 3 : Matrices

Fiche 1

Matrices-Généralités

Cours et exercices Sesamaths.

I. Définitions et vocabulaire

Définition 6
Une **matrice** de $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{cc} & \overset{n \text{ colonnes}}{\longleftrightarrow} \\ m \text{ lignes} \updownarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) est situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne. Il est appelé un **coefficient** de la matrice.

Remarque
En général, on note une matrice avec une lettre majuscule ou avec le coefficient général entre parenthèses, par exemple (a_{ij}).
Si $i > 9$ ou $j > 9$, on écrira par exemple $a_{1,11}$ et pas a_{111} pour éviter la confusion avec $a_{11,1}$.

Remarque
Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.
Le coefficient a_{12} vaut 7. Le coefficient a_{21} vaut 3.

Définition 7 (Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée)
- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée **matrice ligne de taille** n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée **matrice colonne** de taille n.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée **matrice carrée** d'**ordre** n.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2 et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 8
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont la même taille $m \times n$ et si, pour tout couple $(i\,;\,j)$ tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition 9
Une **matrice diagonale**(a_{ij}) est une matrice carrée dont les coefficients à l'extérieur de la **diagonale principale** sont nuls, c'est-à-dire tels que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque
Une matrice diagonale se note aussi $\mathbf{diag}(\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n})$.
Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent être nuls.

Définition 10
La **matrice identité d'ordre $\boldsymbol{n}$** est la matrice diagonale d'ordre n, notée $\boldsymbol{I_n}$, dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple
L'identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi la noter $\text{diag}(1,1,1)$.

Remarque
S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition 11
La **matrice transposée** d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée $\boldsymbol{A^{\mathsf{T}}}$, de taille $n \times m$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

II. Exercices

Taille et coefficients d'une matrice

Exercice 197. Dans les matrices schématisées suivantes, chaque point représente un nombre.

$$A=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

1. Déterminer la taille de chaque matrice.
2. Schématiser les matrices étant données leurs tailles :

— $J : 4\times 7$ | — $K : 1\times 6$ | — $L : 5\times 1$

Exercice 198. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1. $a_{ij} = i + j$
2. $a_{ij} = 2i - j$
3. $a_{ij} = i^3 + 3j$
4. $a_{ij} = |i - 2j|$

Exercice 199. Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1. $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i+1 \text{ si } i < j \\ j-2 \text{ si } i > j \end{cases}$
2. $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 3 \text{ si } i < j \\ -2 \text{ si } i > j \end{cases}$

Exercice 200. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
Déterminer l'ensemble des coefficients vérifiant chaque égalité donnée.

1. $i = j$
2. $i = j - 1$
3. $i = j + 1$
4. $i + j = n$

Exercice 201. Trois dépôts (D_1, D_2, D_3) vendent des bouteilles de sirop aux mêmes prix : 1 € la grenadine (G), 1,50 € la menthe (M) et 2,2 € l'orgeat (O). Ci-après, les tableaux de gauche à droite rendent compte :

— des stocks au début de l'été ;

— des quantités commandées pour l'été ;

— des ventes pour la saison estivale.

	Stocks			Commandes			Ventes		
	G	M	O	G	M	O	G	M	O
D_1	75	45	45	165	85	40	185	95	80
D_2	85	20	25	120	70	85	165	55	95
D_3	50	45	35	60	25	60	65	60	40

1. Calculer le stock de chaque dépôt après commande.
2. Calculer la recette de la vente des sirops cet été.
3. Le gérant pense que ses ventes auraient augmenté de 20 % s'il avait diminué de 15 % les prix des sirops. La recette aurait-elle été meilleure dans ce cas ?

Transposée d'une matrice

Exercice 202. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.
Compléter A et écrire A^{T}, la transposée de A.

Exercice 203. Produit scalaire

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants :

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-4\\2\end{pmatrix}$

   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\sqrt{2}\\3\sqrt{4}\\5\sqrt{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\sqrt{1}\\2\sqrt{2}\\1\sqrt{3}\end{pmatrix}$

2. Soit U et V les matrices colonnes représentant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Exprimer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de U et V.

Exercice 204. Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^{\mathsf{T}}$ et **antisymétrique** si $M = -M^{\mathsf{T}}$.

1. Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^{\mathsf{T}}$ et $Y = 2K - X$.
   (a) Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.
   (b) Qu'ont en commun les trois matrices K, X et Y ?

2. Soit S, A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque. Montrer que :
   (a) Les éléments diagonaux de A sont nuls.
   (b) $Q + Q^{\mathsf{T}}$ est symétrique ; $Q - Q^{\mathsf{T}}$ antisymétrique.
   (c) S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fiche 2

Matrices-Opérations sur les matrices partie 1

Cours et exercices Sesamaths.

I. Somme de deux matrices

Définition 12
Somme de deux matrices
Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La **somme** des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par :
$A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout couple $(i\ ;\ j)$ tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} -3+2 & 5-5 \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 13
Matrice opposée.
La **matrice opposée** d'une matrice A est la matrice notée $-A$ dont les coefficients sont les opposés des coefficients de A.

Propriété 13
Soit A, B, C trois matrices de même taille.

— $A + B = B + A$ (commutativité)

— $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité)

Définition 14
Différence de deux matrices.
Soit A et B deux matrices de même taille.
La **différence** des matrices A et B est la matrice notée $A - B$ égale à la somme $A + (-B)$ où $-B$ est la matrice **opposée** de B dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & 5+5 \\ -1-4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

II. Produit d'une matrice par un réel

Définition 15
Produit d'une matrice par un réel.
Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit** de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 3,5 & -5 & 2,5 \\ -1 & 0,5 & -5,5 \end{pmatrix}$.

Alors, $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times 3,5 & -2 \times (-5) & -2 \times 2,5 \\ -2 \times (-1) & -2 \times 0,5 & -2 \times (-5,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Propriété 14
Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k'.

— $0A = 0$ et $1A = A$

— $k(A+B) = kA + kB$

— $(k+k')A = kA + k'A$

— $(kk')A = k(k'A)$

Remarque
Dans l'égalité $0A = 0$, le 0 de gauche est un réel mais celui de droite désigne la **matrice nulle**, matrice ayant la même taille que A et dont tous les coefficients sont nuls.

III. Produit de deux matrices

Définition 16
Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Le **produit**de la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. $AB = 3 \times (-1) + 0 \times (-4) - 2 \times (-2) = 1$.

> **Définition 17**
> Produit de deux matrices.
> Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.
> Le **produit** de A par B, noté AB, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que c_{ij} est égal au produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

Remarques

— Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

— Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, en général, il n'est pas commutatif : en premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

Exercice 205. Multiplier deux matrices
Pour calculer la matrice C égale à AB, on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, puis on dispose les matrices suivant le schéma $\begin{array}{r|l} & B \\ \hline A & C \end{array}$ de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i-ème ligne de A et de la j-ième colonne de B.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

correction

A est de taille 2×4 et B de taille 4×3.
A a autant de colonnes que B a de lignes, donc $C = AB$ existe et sa taille est 2×3.
On dispose les matrices comme ci-contre.
On calcule alors, par exemple :
$c_{11} = \mathbf{1 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 0 - 2 \times 2 = 7}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -3 \\ \mathbf{3} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & 2 \\ \mathbf{2} & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -6 & 15 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque
Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que $AB = 0$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 15
Soit A, B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.

- $(AB)C = A(BC) = ABC$ (associativité)
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$ (distributivité)
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $AI = IA = A$ et $A0 = 0A = 0$

IV. Exercices

Combinaison linéaire de matrices

Exercice 206. Calculer $A+B$ en écrivant ses coefficients sous la forme la plus simple possible.

1. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 8 \\ 1/4 & 1/10 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 3 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{50} & \sqrt{20} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} & \sqrt{18} \\ -\sqrt{75} & \sqrt{45} \end{pmatrix}$

Exercice 207. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 2 & -4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer :

1. $A+B$
2. $3A$
3. $-5B$
4. $2A-3B$

Exercice 208. Déterminer la valeur de a telle que :

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -19 & 18 \end{pmatrix}$$

Exercice 209. Soit $A = \begin{pmatrix} \ln 3 & \ln 5 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \ln 6 & \ln 30 \\ 3\sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice B telle que $A+B=C$.

Exercice 210. Déterminer les réels x et y tels que :

$$x\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 211. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

Exercice 212. Déterminer les réels α, β et γ tels que :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 3 \\ \alpha+\beta & 10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & \gamma \\ 1,5\alpha - 0,5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 213. Écrire un algorithme calculant la somme de deux matrices. Il testera d'abord si la somme est possible, si ce n'est pas le cas, il enverra un message d'erreur.

Produit de matrices

Exercice 214. Dans les matrices schématisées suivantes, chaque point représente un nombre.

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

1. Quels produits peut-on effectuer avec :
   (a) deux matrices ?
   (b) trois matrices ?
2. Quel produit peut-on effectuer en utilisant le plus grand nombre de matrices distinctes ?

Exercice 215. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$.
Déterminer à quelle condition chacun des produits suivants existe et donner sa taille si c'est le cas.

1. AB
2. BA
3. $BABA$
4. A^3

Exercice 216. Effectuer les produits des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 217. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA.

Exercice 218. Dans chaque cas, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 219. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer AB et BA.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

Exercice 220. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et M la matrice carrée d'ordre 3 telle que $a_{12} = 2$, $a_{22} = -3$, $a_{32} = 1$ et $a_{ij} = 0$ partout ailleurs.

1. Calculer MA et MB.
2. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 221. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A et B commutent-elles ?

2. (a) Montrer que A et M commutent si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{lll} y & = & -2z \\ t & = & x+z \end{array}\right.$.

   (b) Montrer que les coefficients de A, B et de l'identité d'ordre 2 vérifient ce système.

3. Soit C une matrice qui commute avec A.

   Démontrer que $ABC = CBA$.

Exercice 222. Une entreprise doit fabriquer 80 ordinateurs α et 50 ordinateurs ω à partir d'unités de ressources.

Le tableau suivant fournit le nombre d'unités nécessaires à la fabrication de chaque modèle et le coût de chaque unité.

Ressources	α	ω	Coût
Bureau d'étude	1	2	60 €
Main d'œuvre	2	2,5	25 €
Composants	3	6	35 €

Soit $A = \begin{pmatrix} 60 & 25 & 35 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2,5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits matriciels suivants et interpréter :

1. AB
2. BC
3. ABC

Fiche 3

Matrices-Opérations sur les matrices partie 1

Cours et exercices Sesamaths.

I. Puissance d'une matrice carrée

Définition 18
Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
La puissance n-ième de A est la matrice notée A^n égale :

- au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;
- à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$.

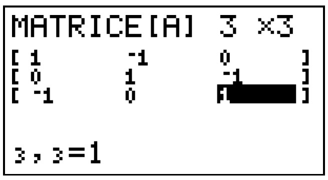
Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

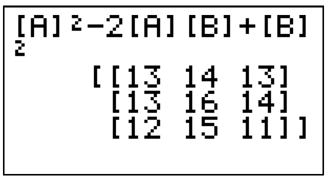
On peut démontrer par récurrence que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 223. Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

correction
Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode "Matrice" puis le menu "EDIT".
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B.
- Quitter le mode "Matrice" puis y entrer à nouveau et, dans le menu "NOMS", sélectionner la matrice [A]. Compléter la formule et taper "Entrer".



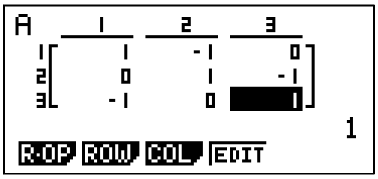


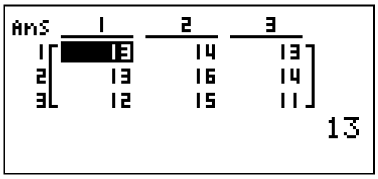
Avec une calculatrice CASIO

— Entrer dans le menu "RUN-MAT" puis choisir ▶MAT (touche F3).

— Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Faire de même pour B.

— Quitter ▶MAT, taper la formule en faisant précéder chaque nom de matrice par "Mat" (touches SHIFT puis 2) : `Mat A²-2Mat AMat B+Mat B²`. Exécuter.





II. Exercices

Puissance d'une matrice

Exercice 224. Calculer A^2, puis A^3 :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 225. Déterminer le carré des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 226. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}A$.
Déterminer B^n. En déduire A^n.

Exercice 227. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = kA$ où $k \in \mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de k a-t-on $B^2 = B$?

Exercice 228. Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

1. $A^n = A$
2. $B^{2n} = -B$
3. $4C^n = 4^n C$

Exercice 229. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I l'identité d'ordre 3.

1. Calculer I^n et A^n.
2. En déduire l'expression de la matrice $(I+A)^5$.

Exercice 230. Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, la puissance n-ième de chaque matrice.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
3. $C=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 231. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^{2n}=5^n I$.
3. Calculer A^{2016}.

Exercice 232. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En écrivant $A=I+J$, où I est l'identité d'ordre 3 et J une matrice à déterminer, calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 233. Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif.
Le but est de déterminer $M^{1\,000}$ de trois façons.

1. (a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   (b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n. En déduire $M^{1\,000}$.
2. (a) Vérifier que $M^2=2M-I$.
   (b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I.
   (c) Conclure.
3. (a) Déterminer la matrice A telle que $M=I+A$.
   (b) Calculer A^2.
   (c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I.
   (d) Exprimer $M^{1\,000}$ en fonction de A et I.
   (e) Conclure.

Exercice 234. Soit les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=A-I$.

1. Calculer B^2 et B^3.
2. (a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I+B)^n$? Justifier.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:
   $$A^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}B+\binom{n}{2}B^2.$$

Exercice 235. Soit $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $B=A-D$. Calculer B^2 et B^3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, on a :
   $$A^n=(-1)^n\left(I_3-nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2\right).$$

Exercice 236. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice diagonale B et une autre matrice C telle que $A=B+C$.
2. (a) Pour tout entier n, donner l'expression de B^n.
   (b) Vérifier que B et C sont commutatives.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = B^n + nCB^n + \binom{n}{2} C^2 B^{n-2}.$$

Exercice 237. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 telle que $a_{ij} = 0$ si $i \geqslant j$ et $a_{ij} = i + j$ si $i < j$.

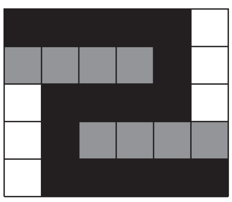
1. Écrire A. Quelle particularité a-t-elle ?
2. Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Calculs matriciels divers

Exercice 238. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les calculs suivants, déterminer ceux qu'on peut effectuer et donner la taille du résultat.
   (a) AB
   (b) $A - B$
   (c) AC
   (d) $A + 2C$
   (e) CA
   (f) CB
   (g) $B + C$
   (h) BAC
   (i) ABC
   (j) A^2
   (k) B^2
   (l) C^2
2. Effectuer les calculs possibles.

Exercice 239. Une image numérique en nuances de gris est représentée par une matrice où le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne est égal au niveau de gris, entre 0 (blanc) et 1 (noir), du pixel correspondant.



1. Écrire la matrice A des niveaux de gris de l'image précédente où les trois couleurs sont noir, blanc et gris moyen (niveau 0,5).
2. (a) Écrire la matrice B du négatif de cette image.
   (b) Exprimer b_{ij} en fonction de a_{ij}.
   (c) Représenter l'image correspondante à B^{T}.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Décrire l'influence du facteur k sur l'image représentée par kC pour $k \in]0\,;\,1[$.
   (b) Déterminer la matrice D telle que $D = 2A - C$.
   (c) Représenter l'image correspondante à D.

Exercice 240. Soit la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) A est triangulaire supérieure. Que dire de A^{T} ?
   (b) Calculer $A + A^{\mathsf{T}} - I$.
2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4 et conjecturer A^n.
   (b) Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 241. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = A + B$.

1. Calculer C^2.
2. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.
3. Pourquoi n'a-t-on pas $C^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 242. Soit A et B deux matrices carrées commutatives.
Développer les expressions suivantes :

1. $(2A + I)(I - A)$
2. $(A + 2I)^2$
3. $(A + 2B)(B - A)$
4. $(2A - B)^2$

Exercice 243. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels.
On souhaite résoudre l'équation $X^2 = I$.

1. Montrer que, si $b = 0$, les solutions de l'équation ne dépendent que de c.
2. Montrer que, si $b \neq 0$, les solutions sont telles que :
$$c = \frac{1-a^2}{b} \text{ et } d = -a.$$

Exercice 244. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis vérifier que $A^3 = 2I$.
2. En déduire A^{3n}, A^{3n+1} et A^{3n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 245. Soit la suite (u_n) telle que u_0=0 et u_{n+1}=$u_n + 2^n$.

Prouver que, pour $n \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 246. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer A^n pour tout n entier naturel non nul.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 247. On pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $A(\theta)A(\theta') = A(\theta+\theta')$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n(\theta) = A(n\theta)$.

Fiche 4

Matrices- partie 1

Cours et exos Sesamaths.

I. Matrices inversibles

I.1. Inverse d'une matrice carrée

Définition 19
Inverse d'une matrice carrée.
Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d ?ordre n telle que $AB = BA = I$.
La matrice B, notée $\boldsymbol{A^{-1}}$, est appelée la **matrice inverse** de A.

Exemple
Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc B est l'inverse de A.

Propriété 16
Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.

Démonstration : Soit A une matrice inversible ayant deux inverses B et C.
On a $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Ainsi, $B = C$. Donc, l'inverse de A est unique. □

Propriété 17
Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Remarque
Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités $AB = I$ ou $BA = I$ pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Donc A et B sont inverses l'une de l'autre et on a les égalités $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

I.2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 20
Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

Le **déterminant**de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ égal à $ad - bc$.

Théorème 11
Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

— La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

— Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration : Soit $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.

— Si $ad - bc \neq 0$, alors $\dfrac{1}{ad-bc} MN = I \Leftrightarrow M\left(\dfrac{1}{ad-bc}N\right) = I$.

Donc M est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{ad-bc}N = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— Si $ad - bc = 0$, alors $MN = 0$. Supposons alors que M soit inversible, d'inverse P.
Alors, on aurait $PMN = IN = N$ et $PMN = P0 = 0$ et donc $N = 0$, ce qui est absurde. □

Remarques

— Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel

— Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

II. Résolution d'un système linéaire

Propriété 18
Écriture matricielle d'un système Le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$ a pour écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Démonstration : $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$. □

Remarque
Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple
$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+z & = & 7 \\ 3x-2y-z & = & -5 \end{array}\right.$.

Propriété 19
Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n.
Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution :
le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Démonstration : Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A est inversible.
Alors, on a : $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. □

Exemple
Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y & = & 8 \\ 3x-4y & = & 15 \end{array}\right.$. **correction**

On résout l'équation $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.
On calcule $\det(A) = -4 \times 2 - 3 \times 5 = -23$. Comme $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
Donc, l'équation $AX = B$ a pour unique solution $X = A^{-1}B$.
On calcule $X = \dfrac{-1}{23}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{23}\begin{pmatrix} -4 \times 8 - 5 \times 15 \\ -3 \times 8 + 2 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107/23 \\ -6/23 \end{pmatrix}$.
Le système admet donc pour unique solution le couple $\left(\dfrac{107}{23}\ ;\ \dfrac{-6}{23}\right)$.

Remarque
Un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A n'est pas inversible a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Exemple
Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y & = & a \\ 4x+8y & = & b \end{array}\right.$ s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
Or, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :
$\begin{cases} 12x+24y &= 4a \\ 12x+24y &= 3b \end{cases}$ ce qui entraîne que $4a = 3b$ toujours vrai, ou jamais.

Exemple

— On passe à l'écriture matricielle du système : $AX = B$.

— On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l'inversibilité de A.

— On détermine alors A^{-1}, puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

exercice

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x-3y+4z &= -1 \\ x+y-5z &= 2 \\ -4x+3y &= 6 \end{cases}$.

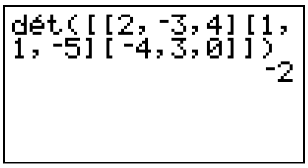
correction Le système a pour écriture matricielle $AX = B$ avec :

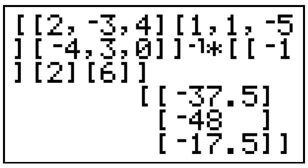
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Avec une calculatrice TI

— Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande `dét(`.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches 2nde ×) et "]" (touches 2nde −). Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche (−).

— Faire "préced" (touches 2nde entrer) pour revenir dans l'instruction précédente.
Supprimer `dét(` et la parenthèse finale.
À la suite, appuyer sur la touche x^{-1}, saisir la matrice colonne B et appuyer sur "entrer".

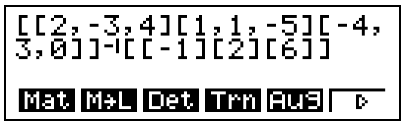


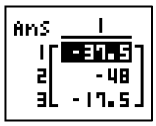


Avec une calculatrice CASIO

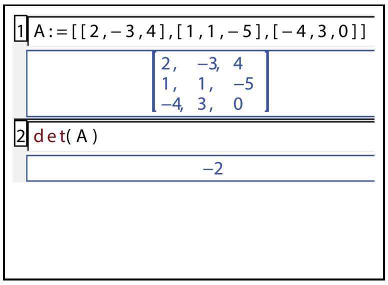
— Appuyer sur la touche OPTN, choisir MAT puis la commande `Det`.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches 2nde +) et "]" (touches 2nde −).

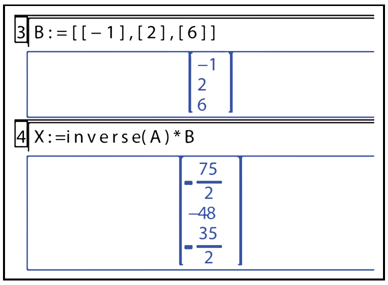
— Appuyer sur la flèche gauche pour revenir dans l'instruction précédente. Supprimer `Det`.
À la suite, faire "x^{-1}" (touches SHIFT)), saisir la matrice colonne B et appuyer sur EXE.





Avec le logiciel de calcul formel Xcas





► Ainsi, $\det(A) = -2 \neq 0$ donc A est inversible et le système admet une unique solution : le triplet $(-37{,}5\,;\,-48\,;\,-17{,}5)$.

Exercices

Inverse d'une matrice

Exercice 248. Pour chaque matrice, déterminer si elle est inversible et, si oui, calculer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 249. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 250. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 251. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $2A - A^2 = I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 252. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et l'algorithme suivant. a, b, c, d, det sont des nombres
L1 et L2 sont des listes
Traitement
Saisir a, b, c, d
det prend la valeur ad - bc
Si det=0 alors Afficher "Impossible"
Sinon
L1[1] prend la valeur d/det L1[2] prend la valeur -b/det L2[1] prend la valeur -c/det L2[2] prend la valeur a/det Afficher L1, L2 Fin Si

1. Préciser la signification de l'affichage « Impossible ».

2. Que dire de la matrice obtenue par l'affichage des listes `L1` et `L2` ? Vérifier la réponse par un calcul.
3. Programmer l'algorithme dans AlgoBox et le tester pour $a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=3$.
4. On suppose que M est inversible.
   Démontrer que M^{T} est inversible et que :
   $$\left(M^{\mathsf{T}}\right)^{-1}=\left(M^{-1}\right)^{\mathsf{T}}.$$
5. En déduire comment modifier simplement l'algorithme pour qu'il calcule, si possible, l'inverse de la transposée de M.

Exercice 253. Soit les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$.

Pour toute matrice carrée inversible M et tout entier naturel n, on note $M^{-n}=\left(M^{-1}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
   (a) $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$
   (b) $B^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{pmatrix}$
2. Peut-on en déduire $(AB)^n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$?

Exercice 254 — Inverse d'un produit Soit A et B deux matrices inversibles et $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

1. Prouver que AB est inversible et déterminer $(AB)^{-1}$.
2. Prouver que λA est inversible et déterminer $(\lambda A)^{-1}$.

Résolution d'un système linéaire

Exercice 255. À l'aide des matrices mais sans l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}-4x+3y=2\\-x+y\ =5\end{cases}$
2. $\begin{cases}9x-4y\ =\ 2\\-1,8x+0,8y=-9\end{cases}$
3. $\begin{cases}3\sqrt{3}x+3y=\sqrt{3}\\-3x-\sqrt{3}y=\ 1\end{cases}$
4. $\begin{cases}6x+8y\ =8\,400\\x+1,5y=1\,450\end{cases}$

Exercice 256. À l'aide des matrices mais sans l'aide d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants (on discutera des solutions selon les valeurs de θ) :

1. $\begin{cases}\cos\theta x-\sin\theta y&=&\cos\theta+\sin\theta\\\cos\theta x+\sin\theta y&=&-\cos\theta+\sin\theta\end{cases}$
2. $\begin{cases}\cos\theta x-\sin\theta y&=&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\cos\theta y+\sin\theta x&=&-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Exercice 257. Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants avec la calculatrice ou un logiciel de calcul formel :

1. $\begin{cases}3x-3y-2z\ =\ 0\\3x+y+z\ =-2\\-2x+3y+2y=-1\end{cases}$
2. $\begin{cases}2x-3y+z\ =-8\\-3x+2y-3z=\ 3\\x-y+z\ =-1\end{cases}$
3. $\begin{cases}-x-3y-2z\ =-1\\-3x-2y+2z=\ 0\\3x+3y-z\ =-1\end{cases}$
4. $\begin{cases}-2x-3y-2z=\ 2\\-3x-3y+2z=\ 1\\x+2y+3z\ =-2\end{cases}$

Exercice 258. Déterminer, si c'est possible, deux réels a et b vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix}5&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$

Exercice 259. Déterminer, si c'est possible, trois réels a, b et c vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix}3&1&4\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 260. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.
2. Résoudre les systèmes d'équations suivants :
   (a) $\begin{cases} x-2y-2z = 0 \\ 2x+y+2z = -9 \\ 2x+z = -8 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x+2y-2z = -2 \\ 2x+5y-6z = -7 \\ -2x-4y+5z = 8 \end{cases}$

Exercice 261. Soit le système linéaire $(S) \begin{cases} 2x+5y = 8 \\ 3x-4y = 15 \end{cases}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

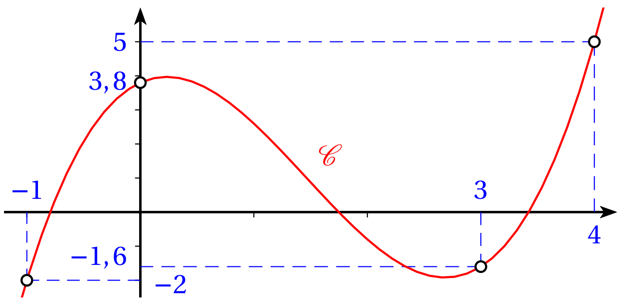
1. (a) Écrire (S) sous la forme matricielle $AX = B$.
   (b) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (c) En déduire les solutions du système.
2. (a) Écrire (S) sous la forme matricielle $X'A' = B'$.
   (b) Que peut-on dire de A et A' ? de B et B' ?
   (c) Exprimer X' en fonction de A et B.

Exercice 262. Soit a et b deux réels.

1. Résoudre le système linéaire
   $\begin{cases} 4x+3y = a \\ 8x+7y = b \end{cases}$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $12x+9y = 4$ et $8x+7y = 1$ dans un repère donné.

Exercice 263. Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est la parabole passant par les points $A(-1\,;-3)$, $B(3\,;-5)$ et $C(4\,;-13)$.

Exercice 264. Soit la fonction polynôme de degré 3 définie par $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ représentée ci-dessous.



1. Justifier que $d = 3,8$.
2. Soit la matrice ligne $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.
   Déterminer deux matrices A et B telles que $AX^{\mathsf{T}}=B$.
3. Résoudre l'équation précédente avec la calculatrice.
   En déduire l'expression de $f(x)$.

Fiche 5

Matrices

Cours et exos Sesamaths.

I. Puissances d'une matrice

La puissance n-ième d'une matrice intervient souvent dans les calculs mais en donner une expression en fonction de n est souvent difficile. Cependant, nous allons voir que, dans des cas particuliers, c'est possible.

I.1. Puissances d'une matrice diagonale

Propriété 20
Puissance d'une matrice diagonale Soit une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

— $D^0 = I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \text{diag}(d_1^0, d_2^0, \dots, d_p^0)$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Supposons que, pour un certain entier naturel n, $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est héréditaire. □

Exemple
Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

I.2. Puissances d'une matrice diagonalisable

Définition 21 (Matrice diagonalisable)
Une matrice carrée A est **diagonalisable** s ?il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

> **Propriété 21**
> Puissances d'une matrice diagonalisable Si A est une matrice diagonalisable telle que $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice inversible et D une matrice diagonale, alors, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

— $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

— Supposons que, pour un entier n donné, $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. □

Exemple

Reprenons la matrice A de l'exemple précédent. Calculons A^4.

$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 2 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -90 \\ 15 & -29 \end{pmatrix}$.

Exemple

Déterminer $\boldsymbol{M^n}$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est diagonalisable

1. M est diagonalisable donc $M = PDP^{-1}$. En général, une au moins des matrices P et D est donnée (la **diagonalisation**, procédé pour les trouver, est hors programme en Terminale).
2. On démontre par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ (voir au bas de la page **??**).

exercice On considère la matrice T diagonalisable telle que :

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible, } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

et D une matrice diagonale.

Déterminer T^n avec une calculatrice, puis avec un logiciel de calcul formel. **correction** Avec la calculatrice :

— On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $D = P^{-1}TP$. On obtient $D = \text{diag}(1\,;\,0,3\,;\,-0,1)$.

— On calcule alors $T^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(1\,;\,0,3^n\,;\,(-0,1)^n)$. On obtient :

$$T^n = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} (-0,1)^n + 11 \times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n - 11 \times 0,3^n + 10 & 2(1-(-0,1)^n) \\ (-0,1)^n - 11 \times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n + 11 \times 0,3^n + 10 & 2(1-(-0,1)^n) \\ -10(-0,1)^n + 10 & -10(-0,1)^n + 10 & 2(1+10(-0,1)^n) \end{pmatrix}$$

II. Exercices

on donne la **formule du binôme de Newton** pour $n \in \mathbb{N}$ et deux matrices commutatives A et B : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

Exercice 265. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = 5^n I$.

Exercice 266. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire M sous la forme $I + J$ et expliciter la matrice J.
2. Calculer J^2 et J^3.
3. Calculer $(I+J)^n$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 267. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $A - B$, puis B^3.
   (b) Démontrer que $A^n = \dfrac{n(n-1)}{2} B^2 + nB + I$.
   (c) En déduire A^n en fonction de n.
2. (a) Vérifier que l'expression de A^n trouvée précédemment est encore vraie pour $n = -1$.
   (b) En déduire qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 268. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le réel λ et la matrice B telle que $A = I + \lambda B$.
2. Vérifier que $B^2 = 0$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + \lambda n B$.

Exercice 269. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. (a) Vérifier que $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 270. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. (a) Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire une expression de A^n.

Exercice 271. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice, vérifier que Q est l'inverse de P.
2. Soit la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(2,1,1)$.
   (a) Établir l'égalité $A = PDQ$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
   (c) En déduire une expression de A^n.

Exercice 272. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice, vérifier que Q est l'inverse de P.
2. Démontrer qu'il existe $D = \mathrm{diag}(a,b,c)$ avec a, b, c réels telle que $A = PDQ$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 273. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Démontrer que :

(a) il existe α et β réels tels que $A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}$;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$.

3. En déduire une expression de A^n.

Exercice 274. $A = \begin{pmatrix}16 & 4 & -4\\ -18 & -4 & 5\\ 30 & 8 & -7\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice :
   (a) déterminer les matrices $B = AP$ et P^{-1} ;
   (b) déterminer la matrice $D = P^{-1}B$.
2. (a) Exprimer A en fonction de D.
   (b) Exprimer A^2 et A^3 en fonction de P, D^2, D^3 et P^{-1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ et } D^n = \operatorname{diag}(0, 1, 4^n).$$

Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.

Exercice 275. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $M^2 = M + 2I$.
2. Exprimer M^3 et M^4 sous la forme $\alpha M + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n \end{array}\right. .$$

Démontrer que : $M^n = u_nM + v_nI$.

4. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est géométrique de raison -1.
   (b) En déduire une expression de w_n en fonction de n.
5. Soit la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$.
   On admet que (x_n) est géométrique de raison 2.
   En déduire une expression de x_n en fonction de n.
6. Déduire de ce qui précède u_n et v_n en fonction de n.
7. En déduire alors M^n en fonction de n.

Fiche 6

Matrices- partie 1

Cours et exos Sesamaths.

I. Suites de matrices colonnes

I.1. Généralités

Définition 22
Suite de matrices colonnes Une suite de matrices colonnes de taille $k \geqslant 2$ est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne de même taille.

Remarque
Cette définition prolonge celle de suite numérique. On peut ainsi rencontrer des suites de matrices définies explicitement ou par récurrence.

Exemple
Soit (U_n) la suite de matrices colonnes $U_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$, ...

Cette suite peut être définie explicitement avec $U_n = \begin{pmatrix}2n+1\\2^n\end{pmatrix}$ mais aussi par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Définition 23
Convergence, limite d'une suite de matrices colonnes Une suite de matrices colonnes $(U_n) = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ converge si les suites numériques (a_n) et (b_n) convergent. Sa limite est alors la matrice colonne formée par les limites de ces deux suites.

Exemple
Soit (U_n) la suite de matrices colonnes de terme général $U_n = \begin{pmatrix}\frac{2n+1}{n+1}\\ \frac{1}{2^n}\end{pmatrix}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

Remarque
On définit naturellement une suite de matrices colonnes de taille supérieure.

I.2. Suites définies par $U_{n+1} = AU_n$ ou $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété 22
Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille k définie par $U_{n+1} = AU_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec A une matrice carrée d'ordre k. Alors, le terme général de (U_n) peut s'écrire $U_n = A^n U_0$.

Démonstration : On démontre par récurrence sur n. Voici l'initialisation et l'hérédité :

— Initialisation : $U_0 = IU_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : Si, pour n entier donné, $U_n = A^n U_0$, alors $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$. □

Exemple
Expliciter $\boldsymbol{U_n}$ pour $\boldsymbol{(U_n)}$ définie par $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$
Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice C telle que : $C = AC + B$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.
4. En déduire une expression U_n en fonction de n.

correction

1. — Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$, donc la proposition est vraie.
   — Supposons la proposition vraie pour n donné. Montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
   $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ n2^n + 2^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.
   — La proposition est initialisée au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$. Or, $\det(I - A) = 1$ donc $I - A$ est inversible.
   On a $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. D'où : $C = (I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - AC - B = A(U_n - C) = AV_n$.
   Or, une suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $V_{n+1} = AV_n$ est telle que $V_n = A^n \times V_0$.
4. $U_n = V_n + C = A^n \times V_0 + C = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4 \\ n2^{n+1} + 6 \end{pmatrix}$.

II. Exercices

Exercice 276. Soit la suite de matrices lignes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{10} U_n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Exercice 277. Soit la suite de matrices colonnes (V_n) de taille 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + R$ avec :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Déterminer l'expression de V_n en fonction

de n.

3. La suite (V_n) converge-t-elle ?

Exercice 278. Soit les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$.

Soit la suite de matrices (X_n) définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit enfin la matrice A définie par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P et P' sont inversibles.
   (b) Déterminer la matrice diagonale B telle que $P'BP = A$.
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.
3. (a) Exprimer B^n en fonction de n.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 279. Soit les matrices $T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que $T = PDP^{-1}$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire une expression de T^n.
2. Soit les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par a_0 et b_0 et l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$
   (b) Déterminer une expression des termes généraux des suites (a_n) et (b_n).
   (c) En déduire la limite de ces deux suites.

Exercice 280 — Suite de Fibonacci La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Soit les matrices $F_n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $F_{n+1} = F_nT$, puis que $F_n = F_0T^n$.
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer la matrice D telle que $T = PDP^{-1}$.
   (b) En déduire T^n en fonction de n.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$ où φ est le nombre d'or égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Soit l'algorithme incomplet suivant.

```
a PREND LA VALEUR 0
b, c, d PRENNENT LA VALEUR 1
TANT QUE (d>0.0001) FAIRE
a PREND LA VALEUR b
b PREND LA VALEUR c
c PREND LA VALEUR ...
d PREND LA VALEUR abs((c/b-b/a))
```

   (a) Compléter la ligne 6 afin que l'algorithme calcule les termes successifs de la suite de Fibonacci.

(b) Expliquer comment s'arrête la boucle TANT QUE.

(c) Programmer l'algorithme et obtenir une valeur approchée du nombre d'or à 10^{-6} près.

II.1. Suites $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice 281. Soit (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.
5. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
   (b) En déduire une expression de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 282. Soit (U_n) une suite de matrices lignes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n A + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice C telle que $C = CA + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n A$.
3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = (U_0 - C)A^n + C$.
5. (a) Calculer A^2, puis A^3. En déduire A^6.
   En déduire A^n en fonction du reste de la division euclidienne de n par 6.
   (b) Déterminer la matrice U_{57}.

Exercice 283. Soit les suites réelles (x_n) et (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}.$$

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. (a) Montrer que $I - A$ est inversible.
   Calculer $(I - A)^{-1}$.
   (b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.
   (c) Étudier la convergence de (x_n) et (y_n).
3. Soit (V_n) la suite de matrices définie par $V_n = X_n - X$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.
4. (a) Justifier que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.
   (b) On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}AP$.
   Donner une expression de D^n.
   (c) En déduire une expression de A^n.
5. Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$, que peut-on dire de la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Fiche 7

Chaînes de Markov

Cours transmaths

I. Vocabulaire

Un **processus** est une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E ayant un nombre fini d'éléments appelés états. On dit alors que E est l'ensemble des états. Pour un entier n, on dit que le processus est dans l état i si l'évènement $(X_n = i)$ est réalisé.

Définition 24

Un processus (X_n) est une **chaîne de Markov** sur un espace d'états E si, quel que soit l'entier naturel n la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $n+1$ **sachant** les états du processus entre les instants 1 et n est égale à la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant l'état du processus à l'instant n, autrement dit sachant que le processus est à l'état i à une étape, la probabilité que le processus soit à l'état j ne dépend pas du chemin suivi par le processus avant l'instant n pour arriver ne i

Une chaîne de Markov (X_n) est dite homogène si $P_{(X_n=i)}(X_n = j)$ est indépendante de n.

Exemples

— Akwa, un chien ayant une puce, rencontre Bali, un autre chien. Chaque seconde, la puce reste sur un chien ou va sur l'autre. Notons X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la puce est sur Akwa à la seconde n, 2 sinon. (X_n) est un processus sur l'espace des états $\{1,2\}$.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre est plus grande si le chien se soit gratté dans les 20 dernières secondes. Le processus n'est pas une chaîne de Markov.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre ou de rester sur le chien ne dépende que du chien sur lequel elle est à l'instant n, mais que le temps passant, la probabilité d'aller sur Akwa ou d'y rester soit de plus en plus grande, alors le processus est une chaîne de Markov non homogène.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre ou de rester sur le chien ne dépende que du chien sur lequel elle est à l'instant n, et que de plus la probabilité sachant qu'elle est sur Akwa d'y rester est 0.8 et sachant qu'elle est sur Bali, d'y rester est de 0,7, quel que soit la seconde n, alors le processus est une chaîne de Markov homogène.

II. Matrice associée à une chaîne de Markov homogène

Définition 25
A une chaîne de Markov dont l'espace des états a N éléments, on associe une matrice carrée P de rang N dont le coefficient $p_{i,j}$ est la probabilité que le système soit dans l'état j sachant qu'elle était dans l'état i à l'étape précédente. Cette matrice est appelée à la matrice de transition associée à la chaîne de Markov.

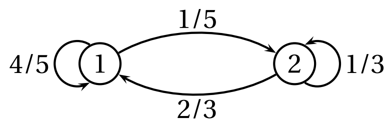
Exemple
Reprenons nos chiens et supposons que chaque seconde : soit la puce va d'Akwa (état 1) à Bali (état 2) une fois sur cinq, soit elle va de Bali à Akwa deux fois sur trois, soit elle reste sur le même chien. Alors, la chaîne de Markov a matrice de transition : $T = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Remarque
Une matrice de transition est dite **stochastique** : ses coefficients appartiennent à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

III. Graphe associé à une chaîne de Markov homogène

Définition 26
A une chaîne de Markov dont l'espace des états a N éléments, on associe un graphe dont les sommets sont les états et dont l'arête orientée reliant l'état i à l'état j est pondérée par la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Exemple
En reprenant l'exemple précédent, on obtient :



IV. Exercices

Exercice 284. Une ville est composée de deux quartiers A et B comptant respectivement 251 et 386 citadins.
Soit a_n et b_n les probabilités qu'un citadin provienne des quartiers A et B lors de la n-ième année d'étude.
Soit la matrice colonne U_n définie par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Chaque année, des citadins déménagent :

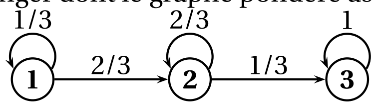
— 5 % des citadins du quartier A vont au quartier B ;

— 12 % des citadins du quartier B vont au quartier A.

1. Modéliser la situation à l'aide d'une chaîne de Markov Homogène (X_n) dont on donnera la matrice de transition et le graphe associé.
2. Quelle est la loi de probabilité de X_0 ?
3. Quelle est la loi de probabilité de X_1 ?

Exercice 285. Lors de l'Épiphanie, un boulanger insère dans chaque galette des Rois une fève naturelle : fève de cacao, de tonka ou de Gargane. On suppose qu'il y a autant de chance d'avoir un type de fève ou un autre.

1. Déterminer la probabilité d'avoir deux types de fèves différents en achetant deux galettes.
2. Déterminer la probabilité d'avoir les trois types de fèves en achetant trois galettes.
3. On définit la chaîne de Markov sur les trois états qui correspondent au nombre de types de fèves obtenus par un client du boulanger dont le graphe pondéré associé est le suivant



   (a) Écrire la matrice de transition P associée au graphe.

   (b) Quel calcul matriciel donne la probabilité d'avoir les trois types de fèves en achetant trois galettes ?

Exercice 286. On lance une pièce équilibrée jusqu'à faire deux « pile » consécutifs.

1. Traduire le processus par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition T associée.
3. Démontrer qu'en lançant quatre fois la pièce, la probabilité de succès est égale à 0,5.
4. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que cette probabilité soit égale à 0,9 ?

Fiche 8

Chaînes de Markov- distributions

Cours transmaths

I. Distributions

Propriété 23
Pour tous états i et j et pour tout n entier naturel $n \geqslant 1$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice P^n est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Démonstration : En live. □

Définition 27

1. La distribution initiale notée π_0 est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_0.
2. La distribution après n transitions notée π_n est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.
3. Une distribution est représentée par une matrice ligne.

Propriété 24
Si π_0 est la distribution initiale d'une chaîne de Markov homogène, alors pour tout n entier supérieur à 1 alors

— $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$

— $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ et pour tout n

Définition 28
P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov. Dire que π est une distribution invariante de la chaîne de Markov signifie que $\pi = \pi \times P$.

Exemple
Déterminer une distribution de probabilité invariante de la chaîne de Markov de l'exemple des chiens.

Théorème 12
P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale π_0. S'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la matrice P^k ne comporte aucun 0 alors la suite (π_n) converge vers une distribution invariante π indépendante de la distribution initiale π_0. De plus, π est l'unique distribution invariante de cette chaîne de Markov.

Démonstration : Amdmise □

II. Exercices

Exercice 287. On lance une pièce équilibrée jusqu'à faire deux « pile » consécutifs.

1. Démontrer qu'en lançant quatre fois la pièce, la probabilité de succès est égale à 0,5.
2. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que cette probabilité soit égale à 0,9 ?
3. Déterminer qu'il n' y a qu'une distribution invariante de probabilité.

Exercice 288. Dans une région impaludée, un individu est soit sain, immunisé (I) ou non immunisé (N), soit malade (M). D'un mois à l'autre, son état varie ainsi :

— I demeure avec une probabilité de 0,9 ou passe à N ;

— N demeure avec une probabilité de 0,6 ou passe à M ;

— M demeure avec une probabilité de 0,2 ou passe à N.

1. Réaliser un graphe de situation.
2. Écrire la matrice de transition A.
3. On suppose qu'un individu sain est immunisé.
   En calculant A^2, déterminer la probabilité que :
   (a) il soit encore immunisé au bout de deux mois ;
   (b) il soit malade au bout de deux mois.
4. Selon l'état initial d'un individu, déterminer la probabilité qu'il soit malade au bout de :

   (a) 5 mois (b) 9 mois (c) 1 an

Exercice 289. On a analysé le cours du dollar : au lendemain d'un jour de hausse, la probabilité qu'il monte est 0,4 et qu'il ne varie pas 0,6 ; au lendemain d'un jour sans variation, la probabilité qu'il monte est 0,4 et qu'il baisse 0,3 ; au lendemain d'un jour de baisse, la probabilité qu'il ne varie pas est 0,4 et qu'il baisse est 0,6.

1. Traduire le processus par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition T associée.
3. Un jour donné, le dollar monte. Quelle est la probabilité qu ?il ne varie pas sept jours après ?
4. Déterminer la répartition stable de probabilité, c'est-à-dire la matrice ligne M telle que $M = MT$.
5. On admet que la suite des distributions de probabilité converge vers M. Interpréter cette limite.

Exercice 290. Centrale MP-(RMS-130-2)- Probabilités - 984

1. Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\bar{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.

2. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au $n-ième$ lancer. Exprimer p_{n+3} à l'aide de p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.
3. Donner une expression et un équivalent de p_n.