Sommaire

Thème 1 **1**

1 Nombres complexes
Activités préparatoires **1**

2 Nombres complexes
Généralités **4**

3 Nombres complexes
Module d'un nombre complexe **11**

4 Nombres complexes
Trigonométrie- Formules d'addition **14**

5 Nombres complexes
Arguments d'un nombre complexe non nul **17**

6 Nombres complexes
Notation $re^{i\theta}$. Formules d'Euler **21**

7 Nombres complexes
Transformation de $a\cos x + b\sin x$ **24**

8 Nombres complexes
trigonométrie **26**

9 Nombres complexes
Exemples d'utilisation des formules de Moivre et d'Euler **28**

10 Nombres complexes
Racines n-ièmes complexes de 1 **30**

11 Nombres complexes
Problème de Noël **32**

Thème 2 : Arithmétique **34**

1 Divisibilité-Division euclidienne **34**

2 Pgdc-Algorithme d'Euclide **36**

3 Congruences **38**

4 Bézout **40**

5 Gauss-Équations Diophantiennes **43**

6 Nombres premiers-Génétalités **46**

7 Nombres premiers **48**

8 Nombres premiers **52**

9 Nombres premiers **58**

10 Divers **61**

Thème 3 : Matrices **62**

1 Matrices-Généralités **62**

2 Matrices-Opérations sur les matrices partie 1 **66**

3 Matrices-Opérations sur les matrices partie 1 **72**

4 Matrices- partie 1 **77**

5 Matrices **84**

6 Matrices- partie 1 **88**

7 Chaînes de Markov **92**

8 Chaînes de Markov- distributions **95**

Thème 1

Fiche 1

Nombres complexes
Activités préparatoires

D'après Terracher, 1992.
Une présentation « à la hache » des nombres complexes donnerait le scénario suivant :

1. Levons l'interdiction : « Un nombre négatif n 'a pas de racine carrée ».
2. Introduisons, résistant à l'horreur, « un nombre » noté i tel que $i^2 = -1$. Ce nombre fantôme ne pouvant pas être réel, disons qu'il est « imaginaire ».
3. Multiplions le nombre fantôme par un réel quelconque y et ajoutons un réel x. Notons le résultat $x + iy$: il vient de naître un nombre complexe.
4. Et parce que nous savons qu'aucun accident n'est à craindre, nous dirons que l'on peut appliquer à ces nombres, les méthodes et les règles usuelles du calcul. Ce qui veut dire par exemple que :
   — $(3+4i)+(2-i) = 5+3i$
   — $(3+4i)\times(2-i) = 6+8i-3i-4i^2$ soit, comme $i^2 = -1$, $(3+4i)\times(2-i) = 6+5i+4 = 10+5i$
5. Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble de tous ces nombres z qui s'écrivent $z = x + iy$, avec x et y réels (**écriture unique**). Nous admettrons que les propriétés familières de l'addition et de la multiplication persévèrent dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$: c'est fini.
   Ajoutons que $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes et notre scénario s'achève sur une note savante.

I. Familiarisation avec les calculs

Exercice 1. Calculer i^2, i^3,i^4 et i^n en fonction de l'entier n.

Exercice 2. Calculer et mettre sous la forme $a + ib$ avec a et b réels les sommes suivantes :

(a) $(1+i)+(-1+i)$

(b) $(3-i)-(5+3i)$

(c) $(1+i)+(1+2i)+\ldots+(1+2020i)$

(d) $(a+ib)+(a-ib)$

(e) $(a+ib)-(a-ib)$

Exercice 3. Mettre sous la forme $a + ib$ avec a et b réels les produits :

(a) $(2-5i)(4+i)$

(b) $(3+i)^2$

(c) $(1-i)^3$

(d) $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $iz = 3-i$

(b) $(1-3i)z = -2+5i$

Le symbole « i » est introduit par Euler pour la première fois en 1777 seulement en lieu et place de la notation plus qu'ambiguë « $\sqrt{-1}$ » utilisée depuis le milieu du XVI siècle par les algébristes et les géomètres, comme nous allons le voir dans la partie suivante.

II. Présentation historique

Au XVI siècle, en plein « Rinascimento », l'équation du troisième degré est résolue algébriquement, dans le cadre d'un concours de savants (Tartaglia et Cardan). Ce dernier expose une formule donnant une racine de l'équation $x^3 = px+q$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}}$$

Ars Magna, 1547.

Exercice 5. On considère l'équation $x^3 = 2x-5$ (E).

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^3-2x+5$ définie sur $\mathbb{R}$. Conjecturer grâce à cette étude le nombre de solution de cette l'équation (E). On admettra ensemble les limites aux bornes.

(b) Quelle valeur obtenez vous en utilisant la formule de Cardan ?

(c) Peut-on appliquer la formule de Cardan à l'équation $x^3 = 51x+104$?

L'exercice suivant propose de résoudre cette dernière équation à l'aide du nombre i.
En effet, $(47i)^2 = -2209$.

Exercice 6. Considérons l'équation $x^3 = 51x+104$ (E)

(a) Montrer que la formule de Cardan s'écrit « formellement »

$$x = \sqrt[3]{52+47i} + \sqrt[3]{52-47i}$$

(b) Calculer $(4+i)^3$ et $(4-i)^3$. En déduire une solution de (E).

(c) Factoriser $x^3-51x-104$ par $x-\alpha$ où α est la solution trouvée en b).

(d) Achever la résolution de (E).

Cette activité montre toute l'efficacité de l'ingénieuse invention du nombre i, due à Bombelli qui, dans son « Algèbre » en 1572 énonça les règles de multiplication dans la célèbre comptine :

Più via più di meno fa più di meno.
Meno via più di meno fa meno di meno.
Più via meno di meno fa meno di meno.
Meno via meno di meno fa più di meno.
Miù di meno via più di meno fa meno.
Più di meno via meno di meno fa più.
Meno di meno via più di meno fa più.
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Traductions : Più = +1 , Meno = -1, Più di meno = i, Meno di meno = -i
La reconnaissance de ces nombres imaginaires reste très controversée chez les mathématiciens jusqu'à leur représentation géométrique décrite par Gauss dans sa lettre à Bessel en 1811 : « ... on peut représenter toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini. » (Le complexe $z = a+ib$ est représenté par le point $M(a,b)$ du plan muni d'un repère orthonormal). L'invention de Bombelli accède au statut de « nombre ».

III. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont « définies » par :
Pour tout $z = a + ib$ et tout $z' = a' + ib'$,

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

et

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Exercice 7. Montrer que l'addition :

(a) est commutative : pour tous z et z', $z + z' = z' + z$.

(b) est associative : pour tous z , z' et z'' $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

(c) admet un élément neutre $0 = 0 + i0$: pour tout z

$$z + 0 = z$$

(d) vérifie : tout z admet un opposé z' :

$$z + z' = 0$$

($z' = -a - ib$ est noté $-z$).

Exercice 8. Montrer que la multiplication est commutative et associative et admet un élément neutre $1 = 1 + i.0$.

Exercice 9. Montrer que la multiplication est distributive sur l'addition :

$$(z + z')z_1 = zz_1 + z'z_1.$$

Exercice 10. Soit $z = a + ib$, fixé non nul (a et b réels).

(a) Résoudre le système $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

(b) En déduire qu'il existe un unique complexe $z' = x + iy$ vérifiant $z'z = -1$. (z', noté $\dfrac{1}{z}$ est l'inverse de z.)

Les mathématiciens traduisent ainsi toutes les propriétés démontrées dans cette activité par $(\mathbb{C},+,\times)$ a une structure de corps commutatif.

Fiche 2

Nombres complexes
Généralités

D'après Terracher, 1992.

I. Présentation des nombres complexes

Nous admettons le résultat suivant qui fonde ce chapitre.

Théorème 1
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ où a et b sont des **réels**.

Vocabulaire

- $\mathbb{C}$ est appelé ensemble des nombres complexes
- si $z = a + ib$ et a, b réels alors
  - a est appelé partie réelle de z, notée $\mathfrak{Re}(z)$
  - b est appelé partie imaginaire de z, notée $\mathfrak{Im}(z)$
  - Si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, z est dit réel. On retrouve ainsi l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
    Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, z est dit imaginaire pur.

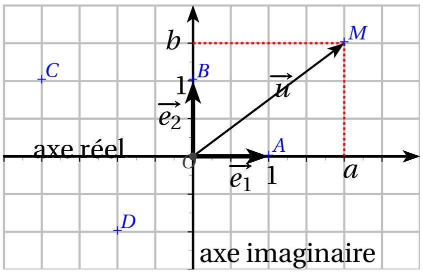
Égalité

La dernière phrase du théorème peut s'énoncer ainsi :« Si deux complexes sont égaux, alors ils ont même partie réelle et même partie imaginaire » :
Si $a + ib = x + iy$ et x, y, a, b réels alors $a = x$ et $b = y$.
En particulier, si $a + ib = 0$ alors $a = b = 0$.

II. Représentation graphique

- Le plan muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est appelé **plan complexe**.

— Le **nombre** $x + iy$ est représenté par le **point** $M(x, y)$ (ou le vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$)
— On dit que ***M* est l'image** de z (ou de $\overrightarrow{u}(x, y)$),
— On dit que ***z* est l'affixe** de M (ou de $\overrightarrow{u}(x, y)$).
— Conséquence :
  — deux points sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.
  — deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.



Sur la figure ci-dessus, les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $1, i, -2 + i, -1 - i$.

III. Opérations

Somme et produit

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Le théorème 1 permet de « calculer » $(a + ib) + (a' + ib')$ et $(a + ib)(a' + ib')$ en appliquant les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.
Il vient :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

et, compte tenu que $i^2 = -1$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

On en déduit, en posant $z' = -1$:

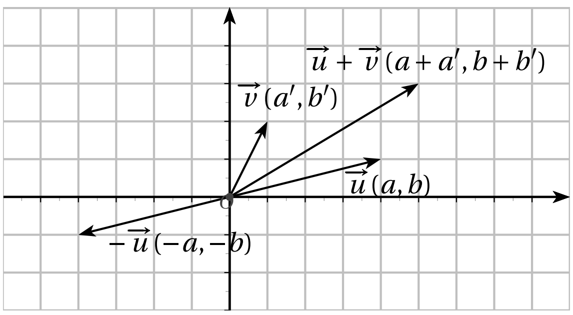
$$-z = -a - ib$$

puis

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

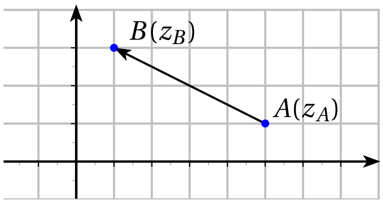
Affixe de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, de $\overrightarrow{AB}$

Des expressions de la somme et de l'opposé résultent les égalités :
— affixe $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$=affixe$(\overrightarrow{u})$+affixe$(\overrightarrow{v})$.
— affixe(-$\overrightarrow{u}$)=-affixe($\overrightarrow{u}$).



De l'expression de la différence, il vient :

$$\text{affixe}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$



Interprétation de $z \mapsto z+\alpha$

Soit z et α deux nombres complexes, M et M' les points d'affixes respectives z et $z+\alpha$, et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe α. Puisque $(z+\alpha)-z=\alpha$ alors $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{u}$:
la transformation du plan complexe $M(z)\mapsto M'(z+\alpha)$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Inverse et quotient

Le théorème suivant a été prouvé en activité.

> **Théorème 2**
> Tout nombre complexe non nul $z=a+ib$ avec a et b réels admet un inverse z' (c'est à dire un nombre complexe z' vérifiant $zz'=1$). On a
>
> $$z' = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$
>
> z' est noté $\dfrac{1}{z}$

Nous pouvons alors définir le quotient $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ (si $z' \neq 0$). En pratique, pour le calcul de l'inverse du quotient et de l'inverse, on ne retient pas la formule, mais on fait intervenir « à propos »l'égalité $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

Exemple

Mettre sous forme $a+ib$ avec a et b réels les nombres complexes $\dfrac{1}{3-4i}$ et $\dfrac{1-i}{1+i}$.

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + i\frac{4}{25}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

IV. Propriétés algébriques

Structure de corps

Pour résumer les propriétés suivantes de l'addition et de la multiplication

- $+$ et $\times$ sont commutatives et associatives,

- $\times$ est distributive sur $+$
- tout élément de $\mathbb{C}$ admet un opposé
- tout élément de $\mathbb{C}^*$ admet un inverse,

Les mathématiciens disent que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Conséquences algébriques

1. Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$
2. On résout dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$, les équations du premier degré et les systèmes linéaires.
3. L'égalité $zz' = 0$ équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$
4. La formule du binôme de newton est valide :Pour tous a et b complexes, pour tout n entier naturel,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
5. L'égalité de Bernoulli est à connaître, pour tout entier naturel non nul n et tous nombres complexes a et b,
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

V. Conjugué d'un nombre complexe

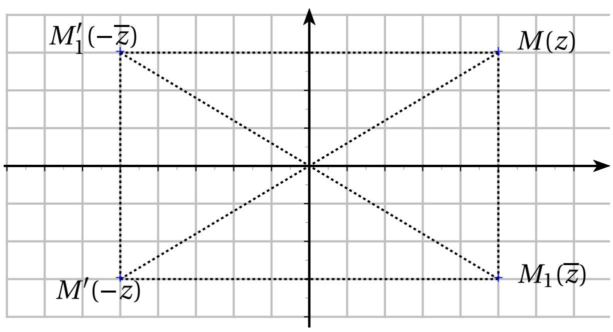
Définition 1
Soit z un nombre complexe, $z = a + ib$, a et b réels. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Ainsi, les conjugués respectifs de -3, i $1-5i$ sont -3, $-i$ et $1+5i$. Nous remarquons que :

- z est réel équivaut à $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur équivaut à $\overline{z} = -z$
- pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$

Schéma à retenir

Le schéma ci-dessous présente les images de z, $\overline{z}$,$-z$ et $-\overline{z}$.



La transformation du plan complexe qui à z associe $\overline{z}$ est la représentation complexe de la symétrie d'axe (Ox).
La transformation du plan complexe qui à z associe $-z$ est la représentation complexe de la symétrie de centre O.

Compatibilité de la conjugaison par rapport aux opérations

Théorème 3
Pour tous nombres complexes z et z', et tout entier naturel n, (lorsque ces égalités ont un sens) :

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$\overline{z^n} = \overline{z}^n$
$\overline{-z} = -\overline{z}$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$
$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

On notera aussi la relation $z\overline{z} = a^2 + b^2$, déjà utilisée dans la recherche de $\dfrac{1}{z}$.

VI. Exercices

Calculs dans $\mathbb{C}$

Dans les exercices suivants mettre z sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.

Exercice 11. (a) $(2+7i)^2$
(b) $(2-7i)^2$
(c) $(2+7i)(2-7i)$

Exercice 12. (a) $(1+i)^3$
(b) $(1-i)^3$
(c) $(5+2i)^3$

Exercice 13. (a) $\dfrac{1}{i}$
(b) $\dfrac{1}{1+i}$
(c) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 14. (a) $\dfrac{2-2i}{i}$
(b) $\dfrac{3-5i}{2-i}$

Exercice 15. (a) $\dfrac{-5+i}{3+11i}$
(b) $\dfrac{i-1}{i+1}$

Exercice 16. Calculer $1 + i + i^2 + ... + i^{2021}$

Exercice 17. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calculer j^2.
En déduire les relations suivantes :

$$1 + j + j^2 = 0 \text{ et } j^3 = 1 \text{ et } \frac{1}{j} = j^2 = \overline{j}$$

Exercice 18. Calculer $(1+i)^2$ en déduire $(1+i)^{100}$

Exercice 19. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = z^2$.

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 20. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{1}{z}$ ($z \neq 0$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 21. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{z+1}{z-i}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Conjugué

Exercice 22. Démontrer le théorème de compatibilité de la conjugaison avec les opérations.

Exercice 23. Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. Montrer que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. En déduire que si z est une racine de P, $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Exercice 24. Dans chaque cas exprimer en fonction du nombre complexe $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe Z :

1. $Z = 2z^2 - 3z + 1$
2. $Z = (z - 2i)(3 - 2z)$
3. $Z = iz - (z - 2)^2$
4. $Z = z^3 + (1 - i)z + i - 3$

Exercice 25. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{1}{z}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 26. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{\overline{z}}{3-\overline{z}}$ ($z \neq i$) .

1. si $z = x + iy$ (x et y réels), exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'
2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M tels que z' est réel, puis imaginaire pur.

Exercice 27. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul

$$\overline{z + \frac{1}{z}} - \frac{\overline{1+z}}{\overline{z}} = \overline{z} - 1$$

Formule du binôme de Newton

Exercice 28. Démontrer la formule du Binôme de newton.

Exercice 29. Développer avec la formule du binôme et le triangle de Pascal.

1. $(z+2)^3$
2. $(z-1)^4$
3. $(2z-1)^5$
4. $(z+1)^6$
5. $(\frac{z}{2}+2)^4$
6. $(z-3)^8$
7. $(1+i)^5$
8. $(1-i)^4$

Exercice 30. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

Exercice 31. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$

Exercice 32. Soit n un entier naturel, Calculer $\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p}$

Equations-système

Exercice 33. Justifier que le couple $(8+i; -1+6i)$ est solution du système $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1+4i \end{cases}$

Exercice 34. Est-il vrai que $1,3 + 0,1i$ est solution de l'équation $(1+i)z + (3+i)\overline{z} = \dfrac{26}{5} + \dfrac{12}{5}i$?

Exercice 35.

1. $(2-i)z + 3i = 5 - 2i$
2. $2iz + 3 = 5i$
3. $z - 2\overline{z} = 9 + 2i$
4. $-3iz + 3\overline{z} = 18 - 2i$

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}(1+i)z-iz'=2+i\\(2+i)z+(2-i)z'=7-4i\end{cases}$
2. $\begin{cases}-2(2+i)z+7z'=1+2i\\(1-i)\overline{z}-\overline{z'}=4-i\end{cases}$

VI.1. Équations polynomiales

Exercice 37. Résoudre dans C l'équation
$x^2+x+1=0$

Exercice 38.

1. Démontrer l'identité de Bernoulli.
2. Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, si P admet le nombre α comme racine, démontrer qu'alors il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, : $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$
3. Vérifier que 4 est une solution de $x^3-15x-4=0$. Puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
4. Déterminer une racine évidente, puis résoudre dans C l'équation
$x^3-6x^2+11x-6=0$

Fiche 3

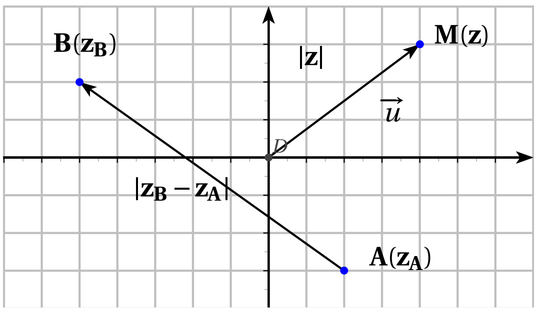
Nombres complexes
Module d'un nombre complexe

D'après Terracher, 1992.

I. Définition

Définition 2
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (a et b réels).
On appelle module de z le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Interprétation géométrique :
Si $M(a,b)$ est l'image de z dans le plan complexe d'origine O, il est clair que $|z| = OM = \|\vec{u}\|$ où $\vec{u}\,(a,b)$.
En outre, nous avons vu que $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, il en résulte que $|z_B - z_A| = AB$ et ce pour tous complexes z_A et z_B, affixes des points A et B.



Exemple

1. Calculer le module de $z_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 1 + i$, et $z_3 = -3i$.
   $|z_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
   $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
   $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$
2. Déterminer l'ensemble E des points M dont l'affixe z vérifie $|z - 2i| = 3$.

Soit A le point d'affixe $2i$, la condition s'écrit aussi $|z_M - z_A| = 3$, ce qui équivaut à $AM = 3$. E est le cercle de centre A de rayon 3.

II. Propriétés des modules

Théorème 4
Pour tous nombres complexes z et z'

- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- si n est un entier naturel, $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$.

Exemple

Puisque $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $|2 + 3i| = \sqrt{13}$, le module de $\dfrac{(2+3i)^2}{(1-i)^5}$ est $\dfrac{13}{4\sqrt{2}}$

Ensemble $\mathbb{U}$

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$.

Propriété 1
Pour tous complexes z et z' de l'ensemble $\mathbb{U}$,

1. $zz' \in \mathbb{U}$
2. $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$
3. $\overline{z} \in \mathbb{U}$

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse et à la conjugaison.

III. Exercices

Exercice 39. Calculer le module de

(a) $1 - i\sqrt{3}$

(a) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

(a) $(3 + 2i)^5$

(a) $(-1 + i)(-3 + i)(-5 + i)$

(a) $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où θ est un réel.

(a) $\dfrac{7}{(2-i)^2}$

(a) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$

Exercice 40. Démontrer les propriétés du cours

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. si n est un entier naturel, $|z^n| = |z|^n$
3. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.

Exercice 41. Démontrer les propriétés du cours concernant $\mathbb{U}$.

Exercice 42. Soit $z = x + iy$ (x et y réels) exprimer en fonction de x et y, le module des nombres complexes

1. $z+1$	2. $1-\dfrac{1}{z}$	3. z^2-1

Exercice 43. Déterminer z pour que z, $1-z$ et z^2 aient le même module.

Exercice 44. Déterminer z pour que z, $1-z$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 45. Démontrer que pour tous nombres complexes z et z', on a $|z-z'|^2 \leqslant (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$. pour quels nombres z et z' a-t-on l'égalité ?

Exercice 46. Soit A un point d'affixe α, du plan complexe. déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, vérifiant :

$$|z|^2 = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$$

Exercice 47. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = (1+i)z - 1 + 3i$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.

Exercice 48. Pour tout point M d'affixe z, on considère le nombre complexe $z' = \dfrac{z-i}{z+1}$ ($z \neq 1$). Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.

Exercice 49. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1, tels que $zz' \neq -1$. démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 50. Démontrer que quels que soient les réels a, b, c et d

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

En déduire une écriture de 101×26 sous la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 51. Démontrer que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Exercice 52. Soit $z \in \mathbb{U} - 1$, démontrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Fiche 4

Nombres complexes
Trigonométrie- Formules d'addition

I. Activité

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Notons I le point de coordonnées $(1,0)$.
Rappelons que chaque point du cercle est l'image de nombres de la droite des réelles enroulée sur le cercle trigonométrique. Si M est le point image par enroulement de la droite du nombre réel θ alors le point M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Considérons deux nombres réels θ et θ', et M et M' les images de ces nombres par enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique.

1. Exprimer à l'aide de θ et θ' les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$.
2. Exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.
3. En déduire l'expression de $\cos(\theta - \theta')$ en fonction de θ et θ'.
4. Rappeler les formules trigonométriques des angles associées.
5. En déduire les expressions de $\cos(\theta + \theta')$, $\sin(\theta - \theta')$, $\sin(\theta + \theta')$
6. Déduire des questions précédentes les formules dites de duplication :$\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$.
7. Faire un tableau résumé et l'apprendre !

II. Exercices

D'après 1S- Fractales-1995

Exercice 53. Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$ les nombres suivants :

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos(x + 3\pi)$
3. $\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
5. $\sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$
6. $\sin(5\pi + x)$
7. $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$
8. $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 54. Exprimer en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$ les nombres suivants :

1. $2\cos x + 3\cos(x+\pi) + 5\sin(\frac{\pi}{2} + x)$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 5\cos\left(-x-\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin(\pi - x)$
3. $\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) - 2\sin(3\pi - x) + 4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
4. $3\cos(-x+\pi) + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 55. Calculez les deux sommes suivantes :

1. $\cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x+\pi) + \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin x + \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) + \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 56.

1. Calculez $\sin x$ sachant que $\cos x = \frac{2}{5}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculez $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
3. Calculez x sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Calculez x sachant que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in [0, \pi]$.

Exercice 57.

1. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x + \sin x = 1$.
2. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.
3. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x - \sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
4. Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$.

Exercice 58. Démontrer les égalités suivantes, valables quel que soit le nombre réels x.

1. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$
2. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$
3. $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos 2x$
4. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
5. $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x = 1$
6. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$

Exercice 59. Démontrer les égalités suivantes, valables quel que soit le nombre réels x.

1. $(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$.
2. $\sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x(\cos x - \sin x)$.
3. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x(\sin x + \cos x)$

Exercice 60.

1. Ecrivez $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ sous le forme $\frac{\pi}{a}$.
2. Déduisez en le sinus et le cosinus des nombres suivants : $\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$.

Exercice 61. Un nombre θ est tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta > 0$. Calculez $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.

Exercice 62. Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a}$

2. $\dfrac{\cos 6a}{\cos 3a} - \dfrac{\sin 6a}{\sin 3a}$
3. $\dfrac{\sin 9a}{\sin 3a} - \dfrac{\cos 9a}{\cos 3a}$

Exercice 63. Démontrez que les expressions suivantes sont vraies quels que soient les réels a, b et c :

1. $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$
2. $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$

Exercice 64. Démontrez que les expressions suivantes sont vraies quels que soient les réels a, b et c :

1. $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$
2. $2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$
3. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$
4. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$

Exercice 65. 1. Exprimez $\cos(a+b+c)$ et $\sin(a+b+c)$ à l'aide des sinus et cosinus des nombres a, b et c.

2. Déduisez des résultats de la question 1, une expression de $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$. Comparez avec les résultats de l'exercice 29 – (12).
3. Déduisez des résultats de la question 1, une expression de $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$.
4. Démontrez que, quel que soit le nombre réel a, on a

$$\cos^2 a - \sin^2(2a) = \cos a \cos 3a$$

.

Fiche 5

Nombres complexes
Arguments d'un nombre complexe non nul

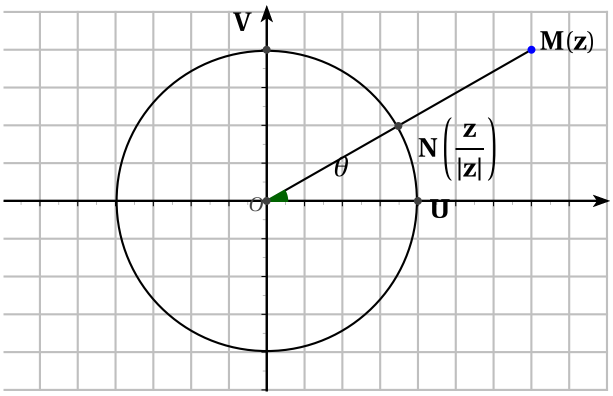
D'après Terracher, 1992.
$(O;\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OV})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

I. Définition

Définition 3
Soit z un nombre complexe non nul de point image M dans le plan complexe, notons N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$. On appelle argument de z et on note $arg(z)$ tout nombre réel θ qui a pour image N sur $\mathscr{C}$ lors de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle.

Remarques

1. Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments. En effet si θ est un argument de z, les autres s'écrivent de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note $\arg(z) = \theta$ ou encore $\arg(z) = 0[2\pi]$, ou encore $\arg(z) = 0$ modulo 2π.
2. On dit aussi qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM})$ est θ.



II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture $x + iy$ avec x et y réels, notons θ un argument de z, alors

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{cases}$$

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété 2
Tout nombre complexe non nul z de module $|z|$ et d'argument θ peut s'écrire :
$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$
Cette écriture de z est appelée **forme trigonométrique** de z tandis que l'écriture $z = x + iy$ avec x réel et y réel est appelée **forme algébrique** de z.

Exemples

1. $|1+i| = \sqrt{2}$ donc $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
2. $|-1+i\sqrt{3}| = 2$ donc $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

On dispose par ailleurs de la propriété suivante

Propriété 3
Si z est un nombre complexe s'écrivant sous la forme :
$$z' = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \text{ avec } r \text{ réel et } r > 0$$
alors z est non nul, r est le module de z et θ un argument de z.

III. Forme trigonométrique d'un produit-Formule de MOIVRE

Forme trigonométrique d'un produit

Soit z un nombre complexe non nul de forme trigonométrique :
$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$
et z' un nombre complexe non nul de forme trigonométrique :
$$z' = |z'|\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$
Alors
$$zz' = |z||z'|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$
donc
$$zz' = |z||z'|\left(\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right)\right)$$
d'où en utilisant les formules de la fiche précédente :
$$zz' = |z||z'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$$
Ainsi $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ d'où la propriété suivante :

Propriété 4
Le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leurs modules.
Un argument du produit de deux nombres complexes non nuls est la somme de leurs arguments.

Remarques

1. Si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ alors $z \times \frac{1}{z} = 1$ implique $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.
   On obtient $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}$ et $\arg(z) = -\arg\left(\frac{1}{z}\right)$
2. De plus , si Si $|z'| = r'$ et $\arg(z') = \theta'$, en combinant acec la propriété précédente :
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} \text{ et } arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta'.$$

Formule de Moivre

Soit n un entier naturel non nul,. Du paragraphe précédent on déduit que si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ alors $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. En particulier, si $r = 1$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Cette formule qui a de nombreuses application en trigonométrie a été découverte par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1722 alors qu'il essayait de factoriser des polynômes du type $z^{2n} + 2z\cos(n\theta) + 1$.

Propriété 5
Pour tout nombre entier naturel non nul$n$ et tout nombre réel θ

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemple

- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(\frac{2020\pi}{4}) + i\sin(\frac{2020\pi}{4})$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(505\pi) + i\sin(505\pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(504\pi + \pi) + i\sin(504\pi + \pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$
- ⋆ $\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{2020} = -1$

IV. Exercices

Exercice 67. Déterminez module et arguments des nombres complexes suivants, les écrire sous forme trigonométrique.

1. $z = i$
2. $z = -i$
3. $z = 1$
4. $z = -1$
5. $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $z = -1 + i\sqrt{3}$
7. $z = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
8. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$
9. $z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
10. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}i\right)^3$
11. $z = 2i$
12. $z = -2i$
13. $z = -5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. $z = \sqrt{2}$
15. $z = 1 + i$
16. $z = 1 - i$
17. $z = -1 - i$
18. $z = 1 - \sqrt{3}$
19. $z = 2\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$
20. $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)$
21. $z = \left(\dfrac{i}{1-i}\right)^4$
22. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{12}$
23. $z = (1+i)^{2020}$
24. $z = (\sqrt{3}-i)^{2021}$
25. $z = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$
26. $z = \sin\theta + 2i\sin^2\theta$
27. $z = \cos\theta + i(1 + \sin\theta)$.

Exercice 68.
1. Calculez $(1+i)^n$ à l'aide du binôme de Newton.
2. Calculez $(1+i)^n$ à l'aide de la formule de Moivre.
3. En déduire deux égalités.

Fiche 6

Nombres complexes
Notation $re^{i\theta}$. Formules d'Euler

D'après Fractales.1992.

I. Notation $re^{i\theta}$

Dans la formule de Moivre, on remarque que l'argument θ se comporte comme un exposant. On convient de noter :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Ainsi, tout nombre z appartenant à $\mathbb{U}$ peut s'écrire $z = e^{i\theta}$. Cette notation sera justifiée dans les années ultérieures. En terminale, nous utilisons pour sa commodité d'écriture.
La formule de Moivre devient :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

De même, tout nombre complexe z de module r et d'argument θ se note

$$z = re^{i\theta}.$$

Exemples

— $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

— $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

— $-1 = e^{i\pi}$

La proposition relative au produit de deux nombres complexes, écrits, sous forme trigonométrique nous fournit, dans le cas où $r = r' = 1$, la relation suivante :

Propriété 6
Pour tous nombres réels θ et θ',

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

II. Formules d'Euler

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\overline{z}$ son conjugué.On a :

$$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$z + \overline{z} = 2\cos\theta$ et $z - \overline{z} = 2i\sin\theta$.
On obtient donc,
$\cos\theta = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
Or, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et $\overline{z} = e^{-i\theta}$.
Donc, on en déduit donc les formules suivantes dues à Euler (inventeur de la notation $e^{i\theta}$ en 1746), appelées **formules d'Euler** :

Propriété 7
Pour tout nombre réel θ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

.

Exemple

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}.$$

Exercices

Exercice 69. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, placez les points images de $e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 70. Exprimez sous forme trigonométrique les nombres complexes $\sqrt{3} - i$, $5(1+i)$, $2\sqrt{3}(i - \sqrt{3})$.

Exercice 71. Exprimez sous forme exponentielle le nombre complexe $1 + e^{i\theta}$

Exercice 72. Exprimez sous forme exponentielle le nombre complexe $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, où θ est un réel de $]-\pi, \pi[$, non nul.

Exercice 73. Soit $z = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$, où θ est un réel de $]-\pi,\pi[$.

1. Montrez que z est un imaginaire pur ou nul.
2. Exprimez $|z|$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice 74. Soit $z = re^{i\theta}$, Montrez que

$$(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$$

est un nombre réel que vous exprimerez en focntion de r et de θ.

Exercice 75. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $Z = z + |z|$.

1. Exprimez $|Z|$ et $arg(Z)$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.
2. On se situe dans unplan muni d'un repère orthonormal direct. M a pour affixe Z, m a pour affixe z . Quel est le lieu décrit par M lorsque m décrit un cercle de centre l'origine ?

Fiche 7

Nombres complexes
Transformation de $a\cos x + b\sin x$

D'après Fractales.1992.

Le but de cette fiche est de factoriser toute expression du type $a\cos x + b\sin x$, où a et b sont deux nombres réels non simultanément nuls, sous la forme $r\cos(x-\theta)$. Cette seconde écriture est plus pratique pour des résolutions d'équations, recherches de signes, etc.

I. Approche géométrique du problème

1. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et, dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, les points $M(z)$ et $M'(z')$. Vérifiez que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = Re(z\overline{z'})$.
2. Soit $M(a,b)$. Déterminez les coordonnées d'un point N tel que $a\cos x + b\sin x$ s'interprète comme $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.
3. M a pour affixe $a+ib$ et N a pour affixe e^{ix}. Il existe un nombre r ($r>0$) et un nombre θ tels que $a+ib = re^{i\theta}$.
   En utilisant le 1) et le 2), exprimez $a\cos x + b\sin x$ en fonction de r, θ et x. Que représentent r et θ pour le nombre complexe $a+ib$?

II. Exemple de factorisation

Appliquons la méthode précédente à l'expression : $\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

1. Écrivez sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 - i\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en que $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

III. Résolution d'équations

1. En utilisant la méthode précédente de factorisation, résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :
   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x + \sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
   b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$
2. Une équation du type $a\cos x + b\sin x = c$ admet -elle toujours des solutions ?
   Discutez selon les valeurs de c.

IV. Méthode

Pour factoriser une expression du type $a\cos x + b\sin x$

1. on écrit le nombre complexe $a + ib$ sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$
2. On a alors $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\theta)$

Fiche 8

Nombres complexes trigonométrie

D'après Fractales.1992.
Le but de cette fiche est de transformer une somme trigonométrique en un produit (et réciproquement).
L'intérêt d'une telle transformation est clair, par exemple pour résoudre une équation du type $\cos 3x + \cos 5x = 0$.

I. Transformation d'une somme en un produit

1. **Factorisation de $\cos a + \cos b$**
   Le nombre $\cos a + \cos b$ est la partie réelle du nombre complexe $e^{ia} + e^{ib}$.
   (a) On peut écrire : $\left|e^{ia} + e^{ib}\right|^2 = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$.
   Montrez que $\left|e^{ia} + e^{ib}\right|^2 = 2\left(1 + \cos(a - b)\right) = 4\cos^2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
   (b) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos \dfrac{a-b}{2}$, montrez que
   $$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$
   (c) En égalant les parties réelles, montrez que
   $$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2. **Autres factorisations**
   (a) En égalant les parties imaginaires des deux écritures de $e^{ia} + e^{ib}$, montrez que :
   $$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
   (b) En procédant comme au 1) avec le nombre $e^{ia} - e^{ib}$, montrez successivement que :
   - ⋆ $\left|e^{ia} - e^{ib}\right|^2 = 4\sin^2 \dfrac{a-b}{2}$
   - ⋆ $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin \dfrac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$
   - ⋆ $\cos a - \cos b = -2\sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$

- ⋆ $\sin a - \sin b = -2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

(c) **Exemples** En utilisant les formules trouvées précédemment, factorisez les expressions suivantes :

i. $\cos 2x + \cos 6x$

ii. $\sin x + \sin 5x$

iii. $\cos 3x - \cos x$

iv. $\sin 2x - \sin 3x$

II. Transformation d'un produit en somme

1. On pose $p\frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{a-b}{2}$.

   (a) Exprimez a et b en fonction de p et q.

   (b) Déduisez des formules trouvées précédemment que :

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q) + \cos(p-q)\big)$$

   (c) Déduisez en de même les produits $\sin p \sin q$ et $\sin p \cos q$.

2. Application. En utilisant les formules précédentes, écrivez sous forme de sommes les produits suivants :

   (a) $\sin 2x \cos 6x$

   (b) $\cos x \cos 5x$

   (c) $\sin 3x \sin 2x$

III. Exemples d'utilisation

1. Résolution d'une équation trigonométrique : Soit l'équation $\sin 5x + \sin 7x = 0$.

   (a) Grâce aux formules vues plus haut, factorisez $\sin 5x + \sin 7x$.

   (b) Résolvez $\sin 6x = 0$ et $\cos x = 0$.

   (c) Déduisez-en les solutions de l'équation initiale.

2. Recherche d'une primitive Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 3x \cos 5x$.

   (a) Transformez $f(x)$ en une somme trigonométrique

   (b) Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

IV. Bilan des formules à retenir

1. $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

2. $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

3. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

4. $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

5. $\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q) + \cos(p-q)\big)$

6. $\sin p \sin q = \frac{1}{2}\big(\cos(p-q) - \cos(p+q)\big)$

7. $\sin p \cos q = \frac{1}{2}\big(\sin(p+q) + \sin(p-q)\big)$

Fiche 9

Nombres complexes
Exemples d'utilisation des formules de Moivre et d'Euler

D'après Fractales.1992.

I. Exemple d'utilisation de la formule de Moivre

1. Écrivez $1+i$ sous forme trigonométrique.
2. Déduisez-en l'expression de $(1+i)^{13}$ par la formule de Moivre.
3. Déduisez-en que :

$$1-\binom{13}{2}+\binom{13}{4}-\binom{13}{6}+\binom{13}{8}-\binom{13}{10}+\binom{13}{12}=-64$$

$$\binom{13}{1}-\binom{13}{3}+\binom{13}{5}-\binom{13}{7}+\binom{13}{9}-\binom{13}{11}+\binom{13}{13}=-64$$

II. Linéarisation de polynômes trigonométriques

1. **Linéarisation de $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$**.
   (a) Soit un réel x. Développez $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$.
   (b) En déduire l'expression de $\cos^3 x$ en somme de termes du type $\cos kx$. Utilisez la formule d'Euler en regroupant les termes d'exposants opposés.) On dit alors qu'on a **linéarisé** $\cos^3 x$.
   (c) Procéder de la même manière pour linéariser $\sin^3 x$.
2. En utilisant une démarche analogue, linéarisez l'expression :

$$\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$$

3. **Recherche d'une primitive d'un polynôme trigonométrique**.
   (a) Linéarisez $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.
   (b) Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

III. Opération inverse de la linéarisation

1. **Écriture de $\cos 4x$ en fonction des puissances de $\cos x$.**
   (a) Développez $(\cos x + i\sin x)^4$.
   (b) Appliquez la formule de Moivre à $\cos 4x + i\sin 4x$.
   (c) En égalant les parties réelles, concluez.
   (d) Exprimez $\sin 4x$ à partir des puissances de $\sin x$
2. **Applications**
   (a) Montrez que $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$
   (b) Soit k un entier naturel. Exprimez $\sin \frac{x}{3^k}$ en fonction de $\sin \frac{x}{3^{k+1}}$.
   (c) Montrez que :

$$\sin^3 \frac{x}{3} + 3\sin^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3^3} + \ldots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{3^n}{4} \sin \frac{x}{3^n} - \frac{1}{4} \sin x$$

IV. Exercices

Exercice 76. Linéarisez a) $\sin^6 x$; b) $\cos^4 x \sin^3 x$

Exercice 77. Linéarisez a) $\cos^5 x$; b) $\sin^4 x \cos^3 x$

Exercice 78. Soit θ un nombre réel de $]-\pi, \pi[$. Soit

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

Calculez $\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}$ en fonction des lignes trigonométriques de θ.

Exercice 79. Calculez les sommes suivantes

$$A = \cos x + \cos(x+\theta) + \cos(x+2\theta) + \cos(x+3\theta) + \ldots + \cos(x+(n-1)\theta)$$

et

$$B = \sin x + \sin(x+\theta) + \sin(x+2\theta) + \sin(x+3\theta) + \ldots + \sin(x+(n-1)\theta)$$

Fiche 10

Nombres complexes
Racines n-ièmes complexes de 1

D'après Fractales.1992.
Le but de cette fiche est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$ et certaines équations du type $z^n = a$. Dans tout cette fiche on appellera « racine nième du nombre complexe a » tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Ne confondez pas avec la racine niéme d'un nombre réel positif.

I. Racines n-ièmes de 1

1. **Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ (n entier naturel non nul**.
   (a) Montrez que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1$.
   (b) Montrez que l'équation $z^n = 1$ équivaut à l'équation d'inconnue θ :$e^{in\theta} = 1$.
   (c) Déduisez de ce qui précède que l'équation $z^n = 1$ a n solutions complexes :
   $$1, \qquad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \qquad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$$
2. **Ensemble des racines n-ièmes de 1** Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   (a) Exprimez les racines n-ièmes de 1 (autres que 1) en fonction de ω. Écrivez ainsi la liste des racines n-ièmes de 1.
   (b) Soit M_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Déduisez de a) que $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$. Quelle est la figure géométrique inscrite dans le cercle trigonométrique déterminée par les points M_0, M_1, ...,M_{n-1}.
   (c) Calculez la somme des racines n-ièmes de 1.
3. **Étude des cas $n = 3$ et $n = 4$**
   (a) Déterminez les racines troisièmes de l'unité. Exprimez les sous forme algébrique et trigonométrique.
   (b) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifiez que le sracines troisièmes de 1 sont $1, j$ et j^2. Remarquez que $j^2 = \overline{j}$. Faire une figure.
   (c) Déterminez de même les racines quatrièmes de 1 et placez les sur une figure.

II. Exercices

Exercice 80. Résoudre $z^5 - 1 = 0$

Exercice 81. Résoudre $z^5+1=0$

Exercice 82. Résoudre $z^5+i=0$

Exercice 83. Résoudre $z^6=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 84. Résoudre $z^4=2(1+i\sqrt{3})$

Exercice 85. Résoudre le système suivant, d'inconnues z_1 et z_2 complexes $\begin{cases} z_1 = z_2^2 \\ z_2 = z_1^2 \end{cases}$

Exercice 86. Résoudre $z^6=8i$. en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 87. Résoudre $z^6=8i$. en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 88. Soit $P(z)=1+2z+2z^2+2z^3+2z^4+z^5$

1. Calculez $P(-1)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

III. Bilan

Fiche 11

Nombres complexes
Problème de Noël

Partie 1

A_1 et A_2 désignent deux nombres réels strictement positifs.
φ_1 et φ_2 désignent deux réels.
Posons $Z = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$

1. Calculer en fonction de A_1, A_2, φ_1 et φ_2 le module de Z. On le notera A.
2. A_1 et A_2 étant donnés, quelle condition portant sur φ_1 et φ_2 doit être réalisée pour que A soit le plus petit possible ?
3. A_1 et A_2 étant donnés, quelle condition portant sur φ_1 et φ_2 doit être réalisée pour que A soit le plus grand possible ?
4. Si $A_1 = A_2$ quelles sont les valeurs minimales et maximales de A ?

Partie 2

Dans cette partie on suppose que A, T, φ, λ, r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs. On note S_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S_1(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}r_1\right)$$

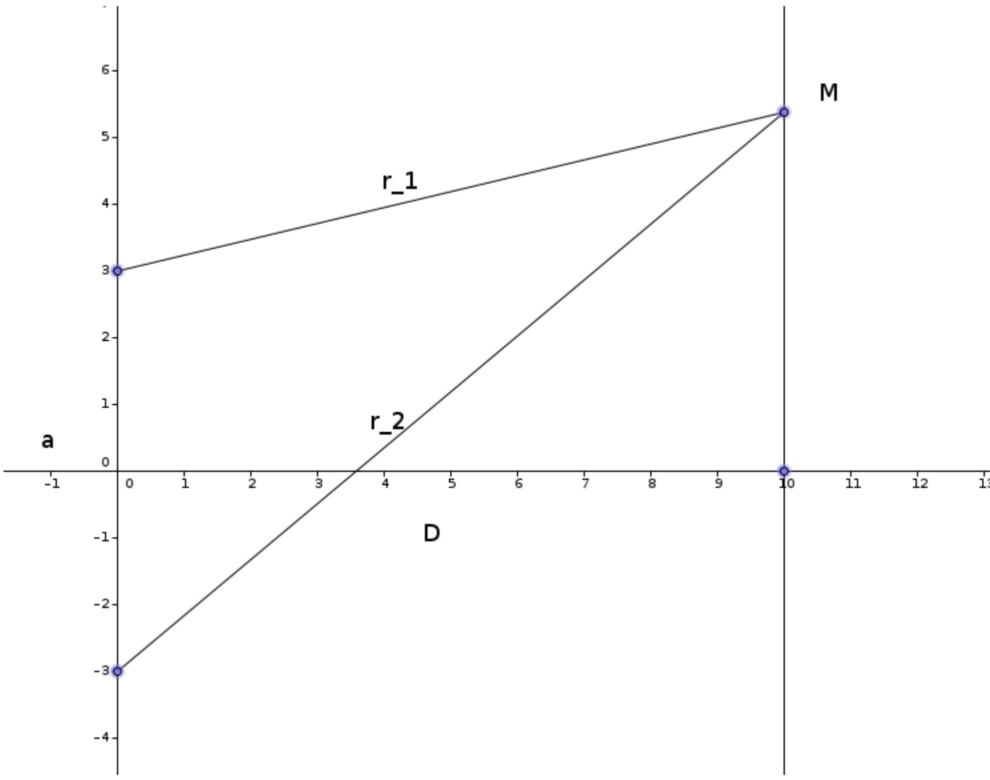
et S_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S_2(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right)$$

1. Quelle est la nature de la fonction S définie par $S_1 + S_2$?
2. Exprimer l'amplitude de S_1 et S_2 en fonction de r_1 et r_2.
3. Quelle condition sur r_1 et r_2 doit être vérifiée pour que la fonction S soit la fonction nulle ?
4. Quelle condition sur r_1 et r_2 pour que S soit une fonction sinusoïdale d'amplitude maximale ?

Partie 3

On considère la figure ci-dessous :



On suppose que le repère est orthonormé.
On suppose que r_1 désigne la longueur du segment joignant le point de coordonnées $(0, \frac{a}{2})$ au point de coordonnées (D, y).
On suppose que r_2 désigne la longueur du segment joignant le point de coordonnées $(0, -\frac{a}{2})$ au point de coordonnées (D, y).

1. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de D et a et y.
2. Donner l'expression de l'approximation affine de la fonction $\sqrt{1+X}$ au voisinage de 0.
3. Utiliser cette expression pour donner une expression simple de $r_2 - r_1$.
4. Retrouver l'expression de l'interfrange du cours de physique.

Thème 2 : Arithmétique

Fiche 1

Divisibilité-Division euclidienne

Exercices

.1. Divisibilité

Exercice 89. Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers naturels qui vérifient :

1. $x^2 = y^2 + 21$.
2. $x^2 - 7xy = 17$.

Exercice 90. Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

1. $n^2 + n = 20$.
2. $n^2 + 2n = 35$.

Exercice 91. L'exercice consiste à trouver les valeurs du naturel $n > 4$ pour lesquelles la fraction $\dfrac{n+17}{n-4}$ est un entier.

1. Démontrer que $n-4$ divise $n+17$ équivaut à $n-4$ divise 21.
2. Déterminer alors toutes les valeurs de n correspondant au problème.

Exercice 92. Soit l'équation (E) : $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.

1. Montrer que :
   $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \iff (x-5)(y-5) = 32$.
2. Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ qui vérifient (E).

Exercice 93. n est un naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

.2. Division euclidienne

Exercice 94. Le but de cet exercice est de montrer la validité de la définition de la division euclidienne.

1. Démontrer le **lemme d'Archimède** :
   soit deux entiers naturels a et b $(b \neq 0)$, alors il existe un entier naturel n tel que : $nb > a$.
2. **Existence** d'un couple $(q; r)$ tel que :
   $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
   Soit S l'ensemble des entiers s tels que : $bs > a$.
   (a) Montrer que S admet un plus petit élément t.
   (b) En déduire alors qu'il existe un entier q tel que : $bq \leqslant a < b(q+1)$.

3. **Unicité** du couple (q, r).
   On suppose qu'il existe deux couples $(q\,;r)$ et $(q'\,;r')$ tels que : $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b'$.
   Montrer alors que nécessairement $q = q'$ et $r = r'$.

Exercice 95. Trouver les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne par 4, donnent un quotient égal au reste.

Exercice 96. Trouver un entier naturel qui, dans la division euclidienne par 23, a pour reste 1 et, dans la division euclidienne par 17, a le même quotient et pour reste 13.

Exercice 97. On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Quel est cet entier naturel n ?

Exercice 98. Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Fiche 2

Pgdc-Algorithme d'Euclide

Exercices

Pgcd

Exercice 99. Dresser la liste des diviseurs positifs de 72 et de 60. En déduire leur PGCD.

Exercice 100. Si, en un point donné du ciel, un astre A apparaît tous les 28 jours et un astre B tous les 77 jours, avec quelle périodicité les verra-t-on simultanément en ce point ?

Exercice 101. Déterminer tous les entiers naturels n inférieurs à 200 tels que : $\text{pgcd}(n;324) = 12$.

Exercice 102. a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$.

1. Démontrer que : $\text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(a-b;b)$.
2. Calculer les PGCD des entiers suivants par cette méthode, répétée autant de fois que nécessaire :
   (a) 308 et 165.
   (b) 1 008 et 308.
   (c) 735 et 210.
3. (a) Écrire en langage Python une fonction retournant le pgcd de a et b donnés en entrée correspondant à cette méthode.
   (b) Expliquer la condition de la ligne 6.

Algorithme d'Euclide

Exercice 103. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 441 et 777.
2. 2004 et 9185.

Exercice 104. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 2 012 et 7 545.
2. 1 386 et 546.

Exercice 105. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres suivants :

1. 4 935 et 517.
2. 1 064 et 700.

Exercice 106. Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

1. 4 847 et 5 633.

2. 5 617 et 813.

Exercice 107. Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste.
Quel est cet entier ?

Exercice 108. En divisant 1 809 et 2 527 par un même entier naturel, les restes sont respectivement 9 et 7.
Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir comme diviseur ?

Exercice 109. On note n un naturel non nul, $a = 3n + 1$ et $b = 5n - 1$.

1. Montrer que le $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 8.
2. Pour quelles valeurs de n, $\text{pgcd}(a, b)$ est-il égal à 8 ?

Exercice 110. n est un entier relatif quelconque. On pose :

$$A = n - 1 \quad \text{et} \quad B = n^2 - 3n + 6.$$

1. (a) Démontrer que le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.
   (b) Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le PGCD de A et de B.
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, $n \neq 1$,

   $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

Fiche 3

Congruences

Exercices

Exercice 111. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et a, b des entiers relatifs vérifiant : $a \equiv b\ (n)$.
Démontrer, en vous appuyant sur les preuves du théorème de compatibilité, que : $\forall\ k \in \mathbb{N},\quad a^k \equiv b^k\ (n)$.

Exercice 112. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x \equiv -2\ (5) \\ x > 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2 \equiv -1\ (7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

Exercice 113. Trouver les restes de la division euclidienne par 7 des nombres : $351^{12} \times 85^{15}$ et $16^{12} - 23^{12}$.

Exercice 114. Vérifier que $2^4 \equiv -1\ (17)$ et $6^2 \equiv 2\ (17)$.
Quel est le reste de la division par 17 des nombres $1\,532^{20}$ et 346^{12} ?

Exercice 115. Vérifier que 999 est divisible par 27, puis que $10^{3n} \equiv 1\ (27)$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Quel est alors le reste dans la division de $10^{100} + 100^{10}$ par 27 ?

Exercice 116. Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :
$5^{4k} - 1$ divisible par 13.

Exercice 117. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.

Exercice 118.

1. Quels sont les restes possibles de la division de 3^n par 11 ?
2. En déduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice 119. Démontrer que pour tout entier n, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8.
Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation :
$(n+3)^2 - 1 \equiv 0\ (8)$.

Exercice 120. Déterminer les restes de la division euclidienne de 5^n par 11 suivant les valeurs de n.
On donnera les résultats sous forme d'un tableau.

Exercice 121.

1. Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv$	0	1	2	3
$x^2 \equiv$				

2. Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 122. Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 123.

1. Déterminer l'ensemble E_1, des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 7.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 3.
3. k est un entier relatif.
   Vérifier que si, $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$, alors $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 42.

Exercice 124. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 11^{2011} par 7.

Exercice 125. Soit n un entier naturel, on sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b. On a alors : $n = 10a + b$.

1. Prouver que n est divisible par 17 si, et seulement si, $a - 5b$ est divisible par 17.
2. Montrer par ce procédé (que l'on peut réitérer) que les nombres : 816 et 16 983 sont divisibles par 17.

Exercice 126. On pose $A_n = n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que A_n est pair.
2. Montrer que A_n est divisible par 3.
3. En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que A_n est divisible par 5.
4. Pourquoi A_n est-il divisible par 30 ?

Fiche 4

Bézout

I. Algorithme d'Euclide et Théorème de Bézout

I.1. Sur un exemple

On sait que l'algorithme d'Euclide permet de trouver le pgcd noté d de deux nombres a et b entiers.
On va prouver qu'il existe des coefficients entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = d$.
Considérons le cas de $a = 125$ et $b = 70$.
Écrivons chacune des étapes de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{lllll}
a = 125 & b = 70 & q_0 = 1 & r_0 = 55 & r_0 = 125 - 1 \times 70 \\
b = 70 & r_0 = 55 & q_1 = 1 & r_1 = 15 & r_1 = 70 - 1 \times 55 = 70 - 1 \times (125 - 70) = 2 \times 70 - 1 \times 125 \\
r_0 = 55 & r_1 = 15 & q_2 = 3 & r_2 = 10 & r_2 = 55 - 3 \times 15 = (125 - 70) - 3 \times (2 \times 70 - 125) = -7 \times 70 + 4 \times 125 \\
r_1 = 15 & r_2 = 10 & q_3 = 1 & r_3 = 5 & r_3 = 15 - 1 \times 10 = 2 \times 70 - 1 \times 125 - (-7 \times 70 + 4 \times 125) \\
 & & & & = 9 \times 70 - 5 \times 125 \\
r_2 = 10 & r_3 = 5 & q_4 = 2 & r_4 = 0 &
\end{array}$$

En organisant ainsi l'algorithme d'Euclide, on peut conclure que :
le pgcd de 125 et 70 est 5 et on a déterminé deux nombres u et v tels que :
$125 \times u + 70 \times v = 5$ ($u = -5 \quad$ et $\quad v = 9$).

I.2. Extension au cas général

Soit a et b deux nombres entiers avec $a > b$. Ecrivons l'algorithme d'Euclide, et supposons que le reste nul soit à l'étape $k+1$ et notons le $r_{k+1} = 0$. Alors le pgcd de a et b est le reste à l'étape k.
Posons $r_{-1} = b$ et $r_{-2} = a$
Posons $u_{-2} = 1$ et $v_{-2} = 0$
Posons $u_{-1} = 0$ et $v_{-1} = 1$
On a alors
$r_{-2} = a \times u_{-2} + b \times v_{-2}$
$r_{-1} = a \times u_{-1} + b \times v_{-1}$

Soit i un entier compris entre 0 et k supposons que :

$$r_{i-2} = u_{i-2} \times a + v_{i-2} \times b$$

$$r_{i-1} = u_{i-1} \times a + v_{i-1} \times b$$

alors

$$r_i = r_{i-2} - q_i \times r_{i-1}$$

alors

$$r_i = u_{i-2} \times a + v_{i-2} \times b - q_i \times (u_{i-1} \times a + v_{i-1} \times b)$$

alors

$$r_i = (u_{i-2} - q_i \times u_{i-1}) \times a + (v_{i-2} - q_i \times v_{i-1}) \times b$$

posons alors $u_i = u_{i-2} - q_i \times u_{i-1}$ et $v_i = v_{i-2} - q_i \times v_{i-1}$ et on peut écrire que :

$$r_i = u_i \times a + v_i \times b$$

L'égalité précédente écrite avec $i = k$ permet d'écrire que : le pgcd peut s'écrire comme combinaison linéaire de a et b et on dispose d'un algorithme permettant de trouver ces coefficients.

I.3. Présentation de l'algorithme d'Euclide étendu

On présente sous forme d'un tableau. Application avec a=777 et b=441.

a	b	r	q	U	V
				1	0
				0	1
777	441	336	1	1	-1
441	336	105	1	-1	2
336	105	21	3	4	-7
105	21	0			

On peut vérifier que $777 \times 4 + 441 \times (-7) = 21$

I.4. Le théorème de Bézout

Théorème 5
Soient a et b deux entiers naturels non simultanément nuls. Notons d leur PGCD. Alors il existe des entiers u et v tels que :

$$d = au + bv$$

En particulier,
a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers u et v tels que :

$$au + bv = 1$$

De tels coefficients u et v sont appelés des coefficients de Bézout.

Exercices

Exercice 127. Soit l'égalité de Bézout : « Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs telle que $au + bv = D$ ».

1. Démontrer le théorème de Bézout « a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $au + bv = 1$ ».
2. En déduire que si $\text{pgcd}(a; b) = D$, alors $a = Da'$ et $b = Db'$ avec $\text{pgcd}(a'; b') = 1$.

Exercice 128. Démontrer que, pour tout relatif k,
$(7k+3)$ et $(2k+1)$ sont premiers entre eux.

Exercice 129. n est un entier naturel , $a = 7n+4$ et $b = 5n+3$.
Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 130. Démontrer que pour tout relatif n, les entiers $(14n+3)$ et $(5n+1)$ sont premiers entre eux. En déduire $\text{pgcd}(87; 31)$.

Exercice 131. Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

Exercice 132. Prouver que la fraction $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

Exercice 133. La fraction $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ est-elle irréductible pour tout entier naturel n ?

Exercice 134. Montrer que 17 et 40 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $17x - 40y = 1$.

Exercice 135. Montrer que 23 et 26 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $23x + 26y = 1$.

Exercice 136. L'équation $6x + 3y = 1$ admet-elle des solutions entières ? Et l'équation $7x + 5y = 1$?

Exercice 137. Montrer que 221 et 331 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $221x - 331y = 1$.

Exercice 138 — Vrai ou faux ? S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 3$, alors le PGCD de a et de b est égal à 3. Justifier.

Fiche 5

Gauss-Équations Diophantiennes

I. Théorème de Gauss et son corollaire

Théorème 6
Soit a, b et c des entiers,
Si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c.

Théorème 7
Corollaire : Si deux entiers a et b premiers entre eux divisent l'entier c alors le produit ab divise c.

II. Résolution d'équations Diophantienne $ax + by = c$

II.1. Résolution de $2x - 3y = 5$

Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation $2x - 3y = 5$.

- ⋆ Recherche d'un couple solution :
  Le couple $(1;-1)$ est un couple solution de l'équation. Notons le $(x_0; y_0)$
- ⋆ Supposons que (x, y) soit un couple d'entiers solution de l'équation, alors :

$$2x - 3y = 5$$

alors

$$2x - 3y = 2x_0 - 3y_0$$

alors

$$2x - 2x_0 = 3y - 3y_0$$

alors

$$2(x - x_0) = 3(y - y_0)$$

alors 2 divise $3(y - y_0)$ or 2 et 3 sont premiers entre eux, donc D'après le théorème de Gauss, 2 divise $y - y_0$.
Il existe ainsi un entier k relatif tel que
$y - y_0 = 2k$. En remplaçant $y - y_0$ dans l'équation $2(x - x_0) = 3(y - y_0)$, on obtient que $x - x_0 = 3k$.
Ainsi
si (x, y) est solution de $2x - 3y = 5$ alors il existe un entier k tel que $x = 1 + 3k$ et $y = -1 + 2k$.
Réciproquement, si il existe k entier tel que $x = 1+3k$ et $y = -1+2k$ alors $2x-3y = 2+6k-(-3+6k)$ alors $2x - 3y = 5$.

⋆ Conclusion :
$$S = \{(1+3k, -1+2k); k \in \mathbb{Z}\}$$

III. Exercices

Exercice 139. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(a;b)$ qui vérifient :
$$33a - 45b = 0.$$

Exercice 140.
1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ qui vérifient :
$$7(x-3) = 5(y-2).$$
2. De la question précédente, déterminer les entiers naturels x tels que : $7x \equiv 1\ (5)$.

Exercice 141. En utilisant le théorème de de Gauss, démontrer le corollaire du théorème de Gauss :« Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a ».

Exercice 142.
1. Montrer que si $n \equiv 0\ (8)$ et $n \equiv 0\ (9)$, alors $n \equiv 0\ (72)$.
2. Montrer que si $n \equiv 3\ (8)$ et $n \equiv 2\ (9)$, alors $n \equiv 11\ (72)$.
3. Montrer que si $n \equiv c\ (a)$ et $n \equiv d\ (b)$, avec a et b premiers entre eux alors $n \equiv cbv + dau\ (ab)$ où u et v sont les coefficients de Bezout associés à a et b $(au + bv = 1)$.
4. En déduire les entiers naturels n compris entre 100 et 200 tels que $n \equiv 3\ (13)$ et $n \equiv 2\ (11)$.

III.1. PPCM

Exercice 143. Soit deux entiers relatifs a et b.
On appelle $\text{ppcm}(a;b)$ le plus petit multiple strictement positif de a et de b.
1. Calculer $\text{ppcm}(18;12)$ et $\text{ppcm}(24\ ;\ 40)$.
2. Calculer $\frac{7}{6} + \frac{11}{15}$. Que représente $\text{ppcm}(6\ ;\ 15)$?

Exercice 144. On appelle $D = \text{pgcd}(a\ ;\ b)$ et
$M = \text{ppcm}(a\ ;\ b)$.
1. Montrer que si $a = Da'$ et $b = Db'$, alors $M = Da'b'$.
2. En déduire que : $D \times M = ab$.

Exercice 145. Soit a et b deux naturels tels que $a < b$.
En utilisant les propriétés de l'exercice , déterminer a et b tels que : $\text{pgcd}(a\ ;\ b) = 6$ et $\text{ppcm}(a\ ;\ b) = 102$.

III.2. Équation du type $ax + by = c$

Exercice 146. Soit l'identité de Bézout : « Soit a et b deux entiers non nuls et D leur PGCD. Il existe un couple d'entiers relatifs tel que $au + bv = D$ ».
Démontrer le corollaire du théorème de Bézout : « L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $\text{pgcd}(a\ ;\ b)$ ».

Exercice 147. Soit l'équation (E) : $4x - 3y = 2$.
1. Déterminer une solution particulière entière à (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 148. Soit l'équation (F) : $3x - 4y = 6$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (F).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 149. Soit l'équation (G) : $5x + 8y = 2$.

1. Déterminer une solution particulière entière à (G).
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 150. Soit l'équation $13x - 23y = 1$.

1. Déterminer une solution particulière entière, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, à cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 151.

1. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ des nombres entiers relatifs, solutions de l'équation :
$$(\mathrm{E})\ :\ 8x - 5y = 3.$$
2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers vérifiant : $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieur à 2 000.

Exercice 152.

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:
$$7x - 5y = 1.$$
   (a) Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).
   (b) Montrer que le couple d'entiers $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $7(x-3) = 5(y-4)$.
   (c) Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que :
$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$
2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts.
Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Fiche 6

Nombres premiers-Génétalités

I. Définition et propriétés

I.1. Définition

Définition 4
Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs **positifs** : 1 et lui-même.

Consequences

- 1 n'est pas un nombre premier (il n'a qu'un seul diviseur).
- Un nombre premier p est un entier naturel supérieur ou égal à 2, soit **:** $\boldsymbol{p \geqslant 2}$.
- Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.
- Si un entier naturel n n'est pas premier, il admet un diviseur d tel que : $2 \leq d < n$.

Remarque
Un entier naturel non premier est parfois appelé un **nombre composé**.

I.2. Critère d'arrêt ou test de primalité

Propriété 8 (Critère d'arrêt)
Tout entier naturel n, $n \geq 2$, admet un diviseur premier.
Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

Démonstration :

- Si n est premier, il admet un diviseur premier : lui-même.
- Si n n'est pas premier, l'ensemble D des diviseurs d de n tels que : $2 \leq d < n$ n'est pas vide. D'après le principe du bon ordre, il admet donc un plus petit élément p.
  Si p n'était pas premier, il admettrait un diviseur d' tel que $2 \leq d' < p$ qui diviserait aussi n. Ceci est impossible car p est le plus petit élément de D. Donc p est premier.
- On a donc p premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$. En multipliant cette inégalité par p, on obtient :

$$p^2 \leq pq \quad \Leftrightarrow \quad p^2 \leq n, \quad \text{soit} \quad p \leq \sqrt{n}$$

Exercice 153 — Montrer qu'un nombre est premier Pour montrer qu'un naturel n est premier, on utilise la contraposée du critère d'arrêt :
« Si n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, alors n est premier. »

Montrer que 109 est un nombre premier.
correction On a $10 < \sqrt{109} < 11$. Donc si 109 n'est pas premier, il admet un diviseur premier inférieur à 11.
On teste tous les nombres premiers strictement inférieurs à 11, soit : 2, 3, 5 et 7.

— Des règles de divisibilité, on déduit que 109 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

— En effectuant la division euclidienne de 109 par 7, on obtient : $109 = 7 \times 15 + 4$.
109 n'est donc pas divisible par 7.

— Conclusion : 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5, et 7 donc 109 est premier.

Exemple
Le programme ci-dessous détermine si un nombre N est premier. N'ayant pas à notre disposition la liste des nombres premiers :

— on teste si N est divisible par 2 ;

— puis on teste les diviseurs impairs par ordre croissant tant que ceux-ci sont inférieurs à $\sqrt{N}$.

On obtient alors pour les nombres 527, 719, 11 111 et 37 589 que :

— 527 est divisible par 17 ;

— 719 est premier ;

— 11 111 est divisible par 41 ;

— 37 589 est premier.

Exercices

Exercice 154. methode-test primarite
Sans calculatrice, à l'aide de divisions successives et du critère d'arrêt, déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

97 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719

Exercice 155. Montrer que 271 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.

Fiche 7

Nombres premiers

.1. Infinité des nombres premiers

Propriété 9
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration : Cette preuve, par l'absurde ou par contradiction est celle proposée au III^e^ siècle av. J.-C., par Euclide, dans son ouvrage « *Les Éléments* ».
Il en existe bien évidemment d'autres.
Supposons qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers : p_1, p_2,..., p_i, ..., p_n.
Soit N un nombre entier non premier, supérieur à 2, tel que :
$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \times \cdots \times p_n + 1$.

D'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier.
Soit p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ce diviseur premier.
p_i divise donc $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \times \cdots \times p_n$ et N.
Il divise donc la différence $N - (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i \times \cdots \times p_n) = 1$.
Ceci est impossible car $P_i \geq 2$, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est contradictoire. □

.2. Crible d'Ératosthène

Pour dresser la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N :

— Écrire la liste des entiers de 2 à N.
D'après le critère d'arrêt, tous les nombres composés (non premiers) plus petits que N ont un facteur premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

— Éliminer de la liste tous les multiples de 2 sauf 2.
Le nombre suivant non éliminé est alors premier. Ici on trouve 3.

— Éliminer de la liste tous les multiples de 3 sauf 3.
Le nombre suivant non éliminé est alors premier. Ici on trouve 5.

— Réitérer l'étape ci-dessus tant qu'il existe des multiples de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.

Remarques

1. Pour éliminer les multiples de a supérieurs à a, commencer à a^2, car les multiples inférieurs à a ont déjà été éliminés. En effet, les multiples de a inférieurs à a^2 sont aussi des multiples de nombres inférieurs à a. Par exemple lorsqu'on élimine les multiples de 7, on commence à partir de 49.

2. Si $N = 150$, comme $\sqrt{150} \approx 12,25$, alors tout nombre composé sera éliminé en tant que multiple de 2, 3, 5, 7 et 11.

Exemple
Pour $N = 100$, on obtient le tableau suivant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Remarque
On appelle fonction de compte des nombres premiers, la fonction notée $\pi(x)$ qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
On a par exemple : $\pi(100) = 25$, $\pi(200) = 46$, $\pi(500) = 95$, $\pi(1000) = 168$.

.3. Théorème de Gauss et nombres premiers

Propriété 10
Un nombre premier divise un produit de facteurs si, et seulement si, il divise l'un de ces facteurs.
Soit p un nombre premier et a, b deux entiers :

$$\text{Si } p \text{ divise } ab \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ divise } a \text{ ou } p \text{ divise } b.$$

Démonstration : Comme p est premier, on a : $\text{pgcd}(p,a) = p$ ou $\text{pgcd}(p,a) = 1$.

— Si $\text{pgcd}(p,a) = p$, alors p divise a.

— Si $\text{pgcd}(p,a) = 1$, alors p et a sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss (voir chapitre 2), p divise b. □

Remarque
En particulier, si p est premier et divise une puissance a^k, alors nécessairement p divise a. De cela découle que p^k divise a^k.

Consequences

— Si un nombre premier p divise un produit de facteurs premiers, alors p est l'un de ces facteurs premiers.

— Si un nombre n est un carré, alors toutes les puissances des facteurs de sa décomposition en facteurs premiers sont paires.

— Soit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls. Si, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p_i^{\alpha_i}$ divise un entier n, alors le produit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ divise aussi l'entier n.

Exercices

Exercice 156. Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 50. Les nombres 577 et 689 sont-ils premiers ?

Exercice 157. p est premier et $p \geqslant 5$.

1. Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3.
2. Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
3. En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 158. Soit p soit un nombre premier tel que $p > 3$.

1. Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2. Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

Exercice 159. Démontrer que pour tout n entier ($n \geqslant 1$), $30n + 7$ n'est jamais la somme de deux nombres premiers.

Exercice 160. Soit le nombre $N = 2n^2 + n - 10$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Factoriser N.
2. Pour quelles valeurs de n, le nombre N est-il premier ?

Exercice 161 — Vrai ou faux ? Soit le nombre $N = 2n^2 + 7n + 6$ avec $n \in \mathbb{N}$.
La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
Justifier.
« Il existe une valeur de n telle que N soit premier. »

Exercice 162. On considère un entier n tel que $n^2 = 17p + 1$, où p est premier.

1. Écrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
2. Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers.
3. En déduire n, puis p.

Exercice 163. On considère un entier n tel que $n^2 = 29p + 1$, où p est premier.

1. Écrire $29p$ comme le produit de deux facteurs en fonction de n.
2. Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers.
3. En déduire n, puis p.

Exercice 164. Est-il possible de trouver un nombre premier p tel que $p + 1\,000$ et $p + 2\,000$ soient aussi premiers ?
Aide : On pourra raisonner modulo 3, c'est-à-dire que l'on analysera successivement les cas $p \equiv 0$, $p \equiv 1$ et $p \equiv 2$ modulo 3.

Exercice 165 — [Nombres de Mersenne] On appelle nombres de Mersenne, les nombres M_n de la forme : $M_n = 2^n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer les six premiers nombres de Mersenne.
   Quels sont ceux qui sont des nombres premiers ?
2. Soit n un entier naturel non nul et a un entier.
   Montrer la factorisation standard :
   $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.
3. En déduire que, si d est un diviseur de n, M_n est divisible par $2^d - 1$.
4. Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra calculer M_{11}.)
5. Soit a et n deux entiers tels que : $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.
   Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 166 — Nombres de Fermat Soit n un entier naturel, on appelle nombre de Fermat le nombre F_n tel que : $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Soit k un entier naturel non nul.
   (a) Montrer pour tout entier naturel x que :
   $$x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \cdots + x^2 - x + 1).$$
   (b) Montrer que si m est un entier naturel impair, $2^m + 1$ n'est pas premier.
   (c) Montrer que si m est un entier naturel qui possède un diviseur impair, $2^m + 1$ n'est pas premier.
   (d) En déduire que les seuls entiers naturels de la forme $2^m + 1$ sont les nombres de Fermat.
2. Calculer les cinq premiers nombres de Fermat :
   F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 puis vérifier qu'ils sont premiers.
3. Vérifier que pour tout entier naturel n :
   $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.
   En déduire $\operatorname{pgcd}(F_n\ ;\ F_{n+1})$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, $F_n \equiv 7\ (10)$.

Fiche 8

Nombres premiers

I. Décomposition, diviseurs d'un entier

I.1. Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème 8
Tout entier $n \geq 2$ peut se décomposer de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de facteurs premiers. Soit $p_1, p_2 \dots p_m$ des nombres entiers premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ des entiers naturels non nuls :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}$$

Exercice 167 — Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers Décomposer 16 758 en produit de facteurs premiers.
Correction

16 758	2
8 379	3
2 793	3
931	7
133	7
19	19
1	

On présente la décomposition avec une barre verticale où l'on écrit à droite, les diviseurs premiers et, à gauche, le quotient des divisions successives par ces diviseurs premiers pris dans l'ordre croissant.

On a donc $16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$.

Démonstration : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— Si n est premier, alors n se décompose en lui-même.

Sinon $n = p_1 \times q_1$ avec $p_1 \leq q_1$ et p_1 premier car, d'après le critère d'arrêt, n admet un diviseur premier p_1 tel que $2 \leq p_1 \leq \sqrt{n}$.

— Si q_1 est premier, alors n se décompose en $n = p_1 \times q_1$.

Sinon $q_1 = p_2 \times q_2$ avec $p_2 \leq q_2$ et p_2 premier car, d'après le critère d'arrêt, q_1 admet un diviseur premier p_2 tel que $2 \leq p_2 \leq \sqrt{q_1}$. On a alors $q_2 < q_1$.

— Si q_2 est premier, alors n se décompose en $n = p_1 \times p_2 \times q_2$.

Sinon on réitère le processus, obtenant $q_3,\ q_4, \dots,\ q_n$ avec $q_3 > q_4 > \dots > q_n \geq 2$.
Toute suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ est stationnaire à partir d'un certain rang n donc q_n est premier.

n se décompose en produit de facteurs premiers : $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \times q_n$.

Les facteurs premiers $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n$ et q_n peuvent être éventuellement identiques. On les regroupe alors sous la forme $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des entiers naturels non nuls.

L'**existence** de la décomposition est alors démontrée. L'**unicité** de la décomposition est admise. □

Exercice 168 — Déterminer le PGCD de deux nombres à partir d'une décomposition en produit de facteurs premiers
Déterminer pgcd(126 ; 735) à l'aide d'une décomposition en produit de facteurs premiers.

Correction

— On décompose les deux nombres en produit de facteurs premiers.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

735	3
245	5
49	7
7	7
1	

On a donc :
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$735 = 3 \times 5 \times 7^2$

— On détermine les facteurs premiers communs pour trouver le pgcd de ces deux nombres.

$$\text{pgcd}(126\ ;\ 735) = 3 \times 7 = 21.$$

Remarque
L'algorithme d'Euclide est à préférer pour la recherche du pgcd à la méthode par décomposition car il est plus économe en opérations :

$$735 = 126 \times 5 + 105$$
$$126 = 105 \times 1 + 21$$
$$105 = 21 \times 5$$

On obtient pgcd(735 ; 126) en trois étapes.

I.2. Diviseurs d'un entier

Propriété 11
Soit un nombre n ($n \geq 2$) dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \dots \times p_m^{\alpha m}.$$

Alors tout diviseur d de n a pour décomposition :

$$d = p_1^{\beta 1} \times p_2^{\beta 2} \times \dots \times p_m^{\beta m} \quad \text{avec } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \text{ et } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Le nombre N de diviseurs est alors : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_m + 1)$.

Remarques

— Le nombre de diviseurs d'un entier se calcule facilement car la puissance d'un facteur premier p_i peut varier de 0 à α_i, ce qui fait $(\alpha_i + 1)$ possibilités.

— Pour qu'un entier n admette un nombre impair de diviseurs, les $(\alpha_i + 1)$ doivent être impairs, donc toutes les puissances α_i doivent être paires. Le nombre n est alors un carré.

Exercice 169 — Trouver le nombre de diviseurs d'un entier   Trouver le nombre de diviseurs de 120, puis déterminer tous ses diviseurs.

— On décompose 120 en facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

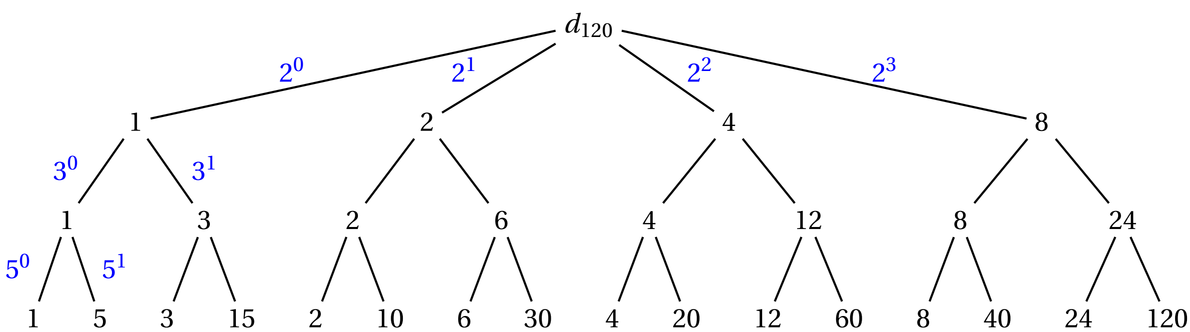
  On alors : $(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$. Il y a 16 diviseurs pour 120.

— Pour déterminer tous ses diviseurs, on peut utiliser un tableau à double entrée en séparant les puissances de 2 et les puissances de 3 et 5. On obtient alors :

$\times$	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 5^0$	1	2	4	8
$3^1 5^0$	3	6	12	24
$3^0 5^1$	5	10	20	40
$3^1 5^1$	15	30	60	120

  Les 16 diviseurs de 120 sont donc : $D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$.

— On peut aussi utiliser un arbre pondéré dont les coefficients sont les facteurs premiers possibles.



Exercice 170 — Déterminer un entier conditionné par ses diviseurs   Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.**Correction**

— L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1. Il n'y a que deux décompositions possibles soit en un seul facteur 15, soit en deux facteurs 3×5.

— On sait que n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Donc n admet au moins deux facteurs premiers. Comme 15 ne peut se décomposer en plus de deux facteurs, alors n ne peut admettre que deux facteurs premiers : 2 et 3. On a donc : $n = 2^\alpha 3^\beta$.

— Comme on a $15 = 3 \times 5$ diviseurs, alors : $(1+\alpha)(1+\beta) = 3 \times 5$.

— On trouve alors deux solutions : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$ ou $\alpha = 4$ et $\beta = 2$.

— On sait de plus que n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc α est inférieur à 3. n est donc :

$$n = 2^2 3^4 = 4 \times 81 = 324.$$

Exercice 171. Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.**Correction**

Soit n l'entier cherché.

Trouvons toutes les décompositions de 28 en produit de facteurs supérieurs à 1. On peut décomposer 28 en 1, 2 ou 3 facteurs : 28 ou 2×14 ou 4×7 ou $2\times 2\times 7$.

- En un facteur.
  Le plus petit entier n est alors $n=2^{\alpha}$ avec $\alpha+1=28$, soit $\alpha=27$.
  Donc $n=2^{27}=134\,217\,728$.
- En deux facteurs : $28=2\times 14$.
  Le plus petit entier n est alors : $n=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ avec $\alpha+1=14$ et $\beta+1=2$.

  On trouve : $\alpha=13$ et $\beta=1$, donc $n=2^{13}\times 3=24\,576$.
- En deux facteurs : $28=4\times 7$.
  Le plus petit entier n est alors : $n=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ avec $\alpha+1=7$ et $\beta+1=4$.

  On trouve : $\alpha=6$ et $\beta=3$, donc $n=2^{6}\times 3^{3}=1\,728$.
- En trois facteurs : $28=2\times 2\times 7$.
  Le plus petit entier n est alors : $n=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$ avec $\alpha+1=7$, $\beta+1=2$ et $\gamma+1=2$.
  On trouve : $\alpha=6$, $\beta=1$ et $\gamma=1$, donc $n=2^{6}\times 3\times 5=960$.

Conclusion, le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est 960.

Exercices

Exercice 172 — methode-decomposition Décomposer 960 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 960 ?

Exercice 173. Décomposer en produit de facteurs premiers 221 122. Quel est le nombre de diviseurs de 221 122 ?

Exercice 174 — methode-pgcd

1. Déterminer le PGCD de 2 650 et 1 272 :
   (a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
   (b) à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 650 et 1 272.
2. Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

Exercice 175. Déterminer pgcd$(a\,;\,b)$ à l'aide d'une décomposition en facteurs premiers, puis à l'aide de l'algorithme d'Euclide des couples $(a\,;\,b)$ suivants :

1. $a=1\,188$ et $b=1\,485$
2. $a=3\,780$ et $b=3\,528$

Exercice 176.

1. Déterminer le PGCD de 428 904 et 306 360 :
   (a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
   (b) à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de 428 904 et 306 360.
2. Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

Exercice 177 — methode-diviseurs Décomposer 792 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 792 ? À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 792.

Exercice 178. Décomposer 8 316 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseur de 8 316 ?
À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 8 316.

Exercice 179. Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56.

Exercice 180.
1. Décomposer 2 016 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^2 est un multiple de 2 016.

Exercice 181. Trouver tous les diviseurs de 84, puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x(x+1)(2x+1) = 84$.

Exercice 182. Le produit de deux entiers naturels a et b ($a < b$) est 11 340. On note d leur pgcd.

1. (a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?
   (b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$,
   avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?
2. On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.
   (a) Démontrer que $d = 18$.
   (b) En déduire a et b.

Exercice 183 — methode-conditions-diviseurs α et β sont deux entiers naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1. Prouver que $(\alpha-1)(\beta-1) = 3$.
2. En déduire n.

Exercice 184. Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que l'on a : $\beta(\alpha-1) = 4$.
2. En déduire les trois valeurs possibles pour n.

Exercice 185. Un entier n a 5 diviseurs et $n-16$ est le produit de deux nombres premiers.

1. Prouver que $n = p^4$, avec p premier.
2. Écrire $n-16$ sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de p.
3. En déduire la valeur de n.

Exercice 186. Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend 222,87 €.
Quels sont les pourcentages (nombres entiers) des trois remises ?

Exercice 187 — Les zéros de 1 000 ! L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre 1 000 ! (factorielle mille et non « mille points d'exclamation »)

On rappelle que : $1\,000! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1\,000$.

1. Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$) et un entier N premier avec 10 tels que :
$$1\,000! = 2^p \times 5^q \times N.$$
2. On justifiera clairement les questions suivantes :
   (a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5 ?

(b) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^2 ?

(c) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^3 ?

(d) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^4 ?

(e) En déduire alors que $q = 249$.

3. Établir que $p > q$ et que le nombre cherché est q.

Exercice 188 — Triplets pythagoriciens Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\text{(E)} \quad x^2 + y^2 = p^2.$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.
2. On suppose désormais que $p \neq 2$ et que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E). Le but des questions suivantes est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que x et y sont de parités différentes.
   (b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
   (c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire que :
   $p = u^2 + v^2$,
   où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   (a) Vérifier que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| \ ; \ 2uv\right)$ est solution de (E).
   (b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque : $p = 5$, puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier, sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas la somme de deux carrés.
   (a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils la somme de deux carrés ?
   (b) Démontrer que les équations :
   $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de couples solutions d'entiers strictement positifs.

Exercice 189 — Théorème d'Euclide On appelle nombre parfait un nombre dont la somme des diviseurs stricts est égal à lui-même.

1. Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombres parfaits :
   « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ et si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est parfait ».
   Exemples : Trouver les quatre premiers nombres parfaits.
2. **Démonstration**. On pose $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et supposons que $2^{n+1} - 1$ est premier.
   (a) Quelle est la décomposition de a en produit de facteurs premiers ?
   (b) En déduire la liste des diviseurs de a.
   (c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts est égale à ce nombre a.

Fiche 9

Nombres premiers

I. Le Petit Théorème de Fermat

I.1. Lemme

Définition 5
Une solution x_0 d'une congruence $f(x) \equiv 0$ modulo n est dite essentiellement unique si toutes les solutions sont congrues (modulo n) à x_0.

Théorème 9
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence $ax \equiv b$ (modulo n) admette une solution essentiellement unique est que les entiers a et n soient premiers entre eux.

C'est le cas par exemple lorsque n est premier et qu'il ne divise pas a.

Démonstration :

- Si le PGCD d de a et n n'est pas égal à 1, on peut associer à une éventuelle solution x une autre solution $x' \equiv x$ définie par $x' = x + \frac{n}{d}$, puisqu'alors $ax' = ax + \frac{a}{d}n$. Il ne peut donc pas alors y avoir unicité essentielle d'éventuelles solutions, il se peut d'ailleurs qu'il n'y en ait aucune, comme dans le cas $4.x \equiv 1 \pmod 6$.
- Si le PGCD est égal à 1 alors le théorème de Bézout assure l'existence de (u, v) tel que $au + bv = 1$, ce qui conduit à la solution $x = bu$ puisqu'alors $ax = (au)b = b - b(vn)$. toute autre solution x' est telle que $n|a(x'-x)$ et le théorème de Gauss montre alors n divise $x'-x$, c'est à dire qu'il existe un entier k vérifiant $x' = x + kn$, c'est à dire encore que x et x' sont congrus modulo n. □

I.2. Son énoncé

Théorème 10
Pour tout couple d'entiers relatifs (a, p) tel que p soit un nombre premier, $a^p \equiv a \pmod p$.

Démonstration : Première preuve : Le résultat est clair si p divise a. Envisageons le cas où p ne divise par a. Notons $f(x)$ le reste modulo p du produit ax où x décrit l'ensemble $\{1, 2, ..., p-1\}$. On sait d'après le lemme que l'équation $f(x) = b$ a une solution unique lorsque b décrit également l'ensemble $\{1, 2, ..., p-1\}$. Le produit de ces solutions et le produit des nombres $f(x)$ sont tousles deux égaux à $(p-1)!$ puisqu'un produit ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs.
Or le produit des $f(x)$ est congru modulo p au produit des nombres ax, donc à $a^{p-1}(p-1)!$. Il en

résulte que p divise $[a^{p-1}-1](p-1)!$ et à fortiori $[a^p-a](p-1)!$. Comme le nombre p est premier avec chacun des entiers 1, 2, ...,$p-1$, il est premier avec leur produit et le théorème de Gauss permet de conclure. □

Démonstration : **Deuxième preuve** :en exercice. □

> **Propriété 12**
> Pour tout couple d'entiers relatifs (a,p) tel que p soit un nombre premier et ne divise pas a, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Démonstration : On sait que p divise a^p-a or $a^p-a=a^{p-1}(a-1)$. Le théorème de gauss permet de conclure si p ne divise pas a, ce qui signifie qu'il est premier avec a. □

Applications cryptographiques

La méthode RSA

La méthode RSA fut mise au point une première fois,mais restée secrète, par James Ellis et Clifford Cocks le 20 novembre 1973, et retrouvée indépendamment et publiée le 4 avril 1977 par Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman. (Texte issu du livre arithmétique dirigé par André Warusfel en 2002.)

Exercices préparatoires

1. Démontrer que pour tout triplet (t,p,q) d'entiers relatifs où p et q sont deux entiers premiers distincts ne divisant pas t, on a $t^{(p-1)(q-1)} \equiv 1$ modulo pq.
2. Démontrer que sous les hypothèses de la question précédente, si e est un entier premier avec $(p-1)(q-1)$ alors il existe un entier d tel qu'il existe un entier ℓ vérifiant l'égalité $e.d=1+\ell(p-1)(q-1)$.
3. Démontrer que sous les hypothèse précédentes on dispose de la congruence $(t^e)^d \equiv t$ (modulo pq)

« De ces propriétés résulte la technique RSA. Soit t un texte, c'est à dire un entier représentant une certaine information à transmette secrètement à un récipiendaire R (par exemple ce texte est numérisé en remplaçant chaque lettre de l'information par un nombre compris entre 00- le blanc- et 26- le Z). pour simplifier, on supposera que 0<t<pq. Le nombres p et q sont connus et tenus secrets par R, mais leur produit $n=pq$ et l'entier e, servant à l'encryption, sont publics. l'expéditeur peut donc calculer le message $m=t^e$ (modulo n) qu'il envoie à R, message illisible pour qui ne connaît que m, e, et n. Par contre, il devient lisible par R, qui connaissant la décomposition $n=pq$ et donc le module $(p-1)(q-1)$, e eu tout le temps de son côté de calculer l'entier d grâce auquel il peut procéder au décryptage, puisque t est congru à m^d modulo n. Toute la force du système résulte sur la quasi impossibilité de résoudre la congruence $t^e \equiv m$ oùt est l'inconnue (c'est le problème du logarithme discret) et de pouvoir décomposer n, ce qui est le cas pour l'instant si n possède plusieurs centaines de chiffres. » Texte écrit en 2002.
Le chiffrement RSA est complété par une procédure de signature qui est construite de façon analogue. Si l'expéditeur veut persuader le récipiendaire R qu'il est bien l'auteur du texte t et s'il a rendu auparavant publics des entiers n' et e' et calculé d' il n'a qu'à construire le texte τ contenant par exemple son nom et son adresse, et à envoyer $\mu \equiv \tau^{d'}$ à R. ce dernier en calculant $\mu^{e'}$ a ainsi la preuve que l'expéditeur est l'auteur du texte.

Exercices

Exercice 190.

1. si p est premier et a et b entiers quelconques, démontrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$ modulo p
2. En déduire par récurrence sur n le petit théorème de Fermat.

Exercice 191. Démontrer que pour tout coupe (p,q) d'entiers premiers supérieurs ou égaux à 11, on dispose de la congruence $(p^2-1)(q^2-1)(p^6-q^6) \equiv 0$ modulo (2 903 040).

Fiche 10

Divers

Exercice 192. Résoudre l'équation dans $\mathbb{N}$, $x^2 = yz$.

Exercice 193. Résoudre l'équation dans $\mathbb{N}$, $x^2 + y^2 = z^2$. (Triplets Pythagoriciens)

Exercice 194. Démontrer que le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 3$ n a pas de point dont les coordonnées sont rationnelles.

Exercice 195. Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 196. Montrer que si r et s sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d ?entiers alors il en est de même pour le produit rs.

Thème 3 : Matrices

Fiche 1

Matrices-Généralités

Cours et exercices Sesamaths.

I. Définitions et vocabulaire

Définition 6
Une **matrice** de $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{cc} & n \text{ colonnes} \\ m \text{ lignes} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) est situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne. Il est appelé un **coefficient** de la matrice.

Remarque
En général, on note une matrice avec une lettre majuscule ou avec le coefficient général entre parenthèses, par exemple (a_{ij}).
Si $i > 9$ ou $j > 9$, on écrira par exemple $a_{1,11}$ et pas a_{111} pour éviter la confusion avec $a_{11,1}$.

Remarque
Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.
Le coefficient a_{12} vaut 7. Le coefficient a_{21} vaut 3.

Définition 7 (Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée)
— Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée **matrice ligne de taille** n.
— Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée **matrice colonne** de taille n.
— Une matrice de taille $n \times n$ est appelée **matrice carrée** d'**ordre** n.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2 et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 8
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont la même taille $m \times n$ et si, pour tout couple $(i\ ;\ j)$ tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition 9
Une **matrice diagonale**(a_{ij}) est une matrice carrée dont les coefficients à l'extérieur de la **diagonale principale** sont nuls, c'est-à-dire tels que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque
Une matrice diagonale se note aussi $\mathbf{diag}(\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n})$.
Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent être nuls.

Définition 10
La **matrice identité d'ordre n** est la matrice diagonale d'ordre n, notée $\boldsymbol{I_n}$, dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple
L'identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi la noter $\mathrm{diag}(1, 1, 1)$.

Remarque
S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition 11
La **matrice transposée** d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée $\boldsymbol{A^{\mathsf{T}}}$, de taille $n \times m$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}.$$

II. Exercices

Taille et coefficients d'une matrice

Exercice 197. Dans les matrices schématisées suivantes, chaque point représente un nombre.

$$A=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la taille de chaque matrice.
2. Schématiser les matrices étant données leurs tailles :

   — $J : 4\times 7$ | — $K : 1\times 6$ | — $L : 5\times 1$

Exercice 198. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1. $a_{ij} = i + j$
2. $a_{ij} = 2i - j$
3. $a_{ij} = i^3 + 3j$
4. $a_{ij} = |i - 2j|$

Exercice 199. Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1. $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i+1 \text{ si } i < j \\ j-2 \text{ si } i > j \end{cases}$
2. $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 3 \text{ si } i < j \\ -2 \text{ si } i > j \end{cases}$

Exercice 200. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
Déterminer l'ensemble des coefficients vérifiant chaque égalité donnée.

1. $i = j$
2. $i = j - 1$
3. $i = j + 1$
4. $i + j = n$

Exercice 201. Trois dépôts (D_1, D_2, D_3) vendent des bouteilles de sirop aux mêmes prix : 1 € la grenadine (G), 1,50 € la menthe (M) et 2,2 € l'orgeat (O). Ci-après, les tableaux de gauche à droite rendent compte :

— des stocks au début de l'été ;

— des quantités commandées pour l'été ;

— des ventes pour la saison estivale.

	Stocks			Commandes			Ventes		
	G	M	O	G	M	O	G	M	O
D_1	75	45	45	165	85	40	185	95	80
D_2	85	20	25	120	70	85	165	55	95
D_3	50	45	35	60	25	60	65	60	40

1. Calculer le stock de chaque dépôt après commande.
2. Calculer la recette de la vente des sirops cet été.
3. Le gérant pense que ses ventes auraient augmenté de 20 % s'il avait diminué de 15 % les prix des sirops. La recette aurait-elle été meilleure dans ce cas ?

Transposée d'une matrice

Exercice 202. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.
Compléter A et écrire $A^{\top}$, la transposée de A.

Exercice 203. Produit scalaire

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants :

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1\sqrt{2} \\ 3\sqrt{4} \\ 5\sqrt{6} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3\sqrt{1} \\ 2\sqrt{2} \\ 1\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2. Soit U et V les matrices colonnes représentant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Exprimer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de U et V.

Exercice 204. Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^{\top}$ et **antisymétrique** si $M = -M^{\top}$.

1. Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^{\mathsf{T}}$ et $Y = 2K - X$.
   (a) Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.
   (b) Qu'ont en commun les trois matrices K, X et Y ?

2. Soit S, A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque. Montrer que :
   (a) Les éléments diagonaux de A sont nuls.
   (b) $Q + Q^{\mathsf{T}}$ est symétrique ; $Q - Q^{\mathsf{T}}$ antisymétrique.
   (c) S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fiche 2

Matrices-Opérations sur les matrices partie 1

Cours et exercices Sesamaths.

I. Somme de deux matrices

Définition 12
Somme de deux matrices
Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La **somme** des matrices A et B est la matrice notée $A+B$ définie par :
$A+B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout couple $(i\ ;\ j)$ tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $A+B = \begin{pmatrix} -3+2 & 5-5 \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 13
Matrice opposée.
La **matrice opposée** d'une matrice A est la matrice notée $-A$ dont les coefficients sont les opposés des coefficients de A.

Propriété 13
Soit A, B, C trois matrices de même taille.

- $A+B = B+A$ (commutativité)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité)

Définition 14
Différence de deux matrices.
Soit A et B deux matrices de même taille.
La **différence** des matrices A et B est la matrice notée $A-B$ égale à la somme $A+(-B)$ où $-B$ est la matrice **opposée** de B dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & 5+5 \\ -1-4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

II. Produit d'une matrice par un réel

Définition 15
Produit d'une matrice par un réel.
Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit** de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 3,5 & -5 & 2,5 \\ -1 & 0,5 & -5,5 \end{pmatrix}$.

Alors, $-2A = \begin{pmatrix} -2\times 3,5 & -2\times(-5) & -2\times 2,5 \\ -2\times(-1) & -2\times 0,5 & -2\times(-5,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Propriété 14
Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k'.

- $0A = 0$ et $1A = A$
- $k(A+B) = kA + kB$
- $(k+k')A = kA + k'A$
- $(kk')A = k(k'A)$

Remarque
Dans l'égalité $0A = 0$, le 0 de gauche est un réel mais celui de droite désigne la **matrice nulle**, matrice ayant la même taille que A et dont tous les coefficients sont nuls.

III. Produit de deux matrices

Définition 16
Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Le **produit**de la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. $AB = 3\times(-1)+0\times(-4)-2\times(-2) = 1$.

> **Définition 17**
> Produit de deux matrices.
> Soit A une matrice de taille $m\times n$ et B une matrice de taille $n\times p$.
> Le **produit** de A par B, noté AB, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m\times p$ telle que c_{ij} est égal au produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

Remarques

— Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

— Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, en général, il n'est pas commutatif : en premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

Exercice 205. Multiplier deux matrices
Pour calculer la matrice C égale à AB, on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, puis on dispose les matrices suivant le schéma $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array}$ de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i-ème ligne de A et de la j-ième colonne de B.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

correction

A est de taille 2×4 et B de taille 4×3.
A a autant de colonnes que B a de lignes, donc $C = AB$ existe et sa taille est 2×3.
On dispose les matrices comme ci-contre.
On calcule alors, par exemple :
$c_{11} = \mathbf{1\times 2+3\times 3+5\times 0-2\times 2=7}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -3 \\ \mathbf{3} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & 2 \\ \mathbf{2} & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -6 & 15 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque
Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que $AB = 0$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 15
Soit A, B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.
- $(AB)C = A(BC) = ABC$ (associativité)
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$ (distributivité)
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $AI = IA = A$ et $A0 = 0A = 0$

IV. Exercices

Combinaison linéaire de matrices

Exercice 206. Calculer $A+B$ en écrivant ses coefficients sous la forme la plus simple possible.

1. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 8 \\ 1/4 & 1/10 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 3 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{50} & \sqrt{20} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} & \sqrt{18} \\ -\sqrt{75} & \sqrt{45} \end{pmatrix}$

Exercice 207. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 2 & -4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer :

1. $A+B$
2. $3A$
3. $-5B$
4. $2A-3B$

Exercice 208. Déterminer la valeur de a telle que :

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -19 & 18 \end{pmatrix}$$

Exercice 209. Soit $A = \begin{pmatrix} \ln 3 & \ln 5 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \ln 6 & \ln 30 \\ 3\sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice B telle que $A+B=C$.

Exercice 210. Déterminer les réels x et y tels que :

$$x\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 211. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

Exercice 212. Déterminer les réels α, β et γ tels que :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 3 \\ \alpha+\beta & 10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & \gamma \\ 1,5\alpha-0,5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 213. Écrire un algorithme calculant la somme de deux matrices. Il testera d'abord si la somme est possible, si ce n'est pas le cas, il enverra un message d'erreur.

Produit de matrices

Exercice 214. Dans les matrices schématisées suivantes, chaque point représente un nombre.

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad G = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

1. Quels produits peut-on effectuer avec :
   (a) deux matrices ?
   (b) trois matrices ?
2. Quel produit peut-on effectuer en utilisant le plus grand nombre de matrices distinctes ?

Exercice 215. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$.
Déterminer à quelle condition chacun des produits suivants existe et donner sa taille si c'est le cas.

1. AB
2. BA
3. $BABA$
4. A^3

Exercice 216. Effectuer les produits des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 217. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA.

Exercice 218. Dans chaque cas, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 219. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer AB et BA.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

Exercice 220. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et M la matrice carrée d'ordre 3 telle que $a_{12} = 2$, $a_{22} = -3$, $a_{32} = 1$ et $a_{ij} = 0$ partout ailleurs.

1. Calculer MA et MB.
2. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 221. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A et B commutent-elles ?

2. (a) Montrer que A et M commutent si, et seulement si, $\begin{cases} y = -2z \\ t = x+z \end{cases}$.

   (b) Montrer que les coefficients de A, B et de l'identité d'ordre 2 vérifient ce système.

3. Soit C une matrice qui commute avec A.

   Démontrer que $ABC = CBA$.

Exercice 222. Une entreprise doit fabriquer 80 ordinateurs α et 50 ordinateurs ω à partir d'unités de ressources.

Le tableau suivant fournit le nombre d'unités nécessaires à la fabrication de chaque modèle et le coût de chaque unité.

Ressources	α	ω	Coût
Bureau d'étude	1	2	60 €
Main d'œuvre	2	2,5	25 €
Composants	3	6	35 €

Soit $A = \begin{pmatrix} 60 & 25 & 35 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2,5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits matriciels suivants et interpréter :

1. AB
2. BC
3. ABC

Fiche 3

Matrices-Opérations sur les matrices partie 1

Cours et exercices Sesamaths.

I. Puissance d'une matrice carrée

Définition 18
Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
La puissance n-ième de A est la matrice notée A^n égale :

— au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;

— à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

On peut démontrer par récurrence que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

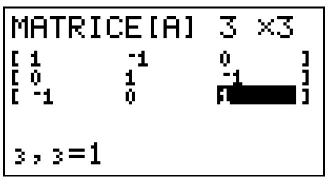
Exercice 223. Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

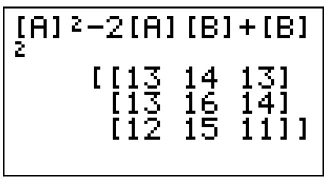
correction
Avec une calculatrice TI

— Entrer dans le mode "Matrice" puis le menu "EDIT".

— Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B.

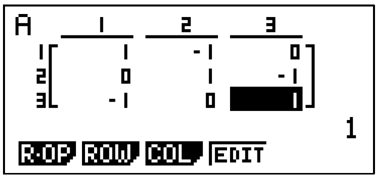
— Quitter le mode "Matrice" puis y entrer à nouveau et, dans le menu "NOMS", sélectionner la matrice [A]. Compléter la formule et taper "Entrer".

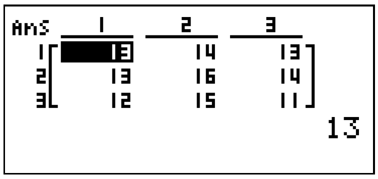




Avec une calculatrice **CASIO**

- Entrer dans le menu "RUN-MAT" puis choisir ▶MAT (touche F3).
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Faire de même pour B.
- Quitter ▶MAT, taper la formule en faisant précéder chaque nom de matrice par "Mat" (touches SHIFT puis 2) : `Mat A²-2Mat AMat B+Mat B²`. Exécuter.





II. Exercices

Puissance d'une matrice

Exercice 224. Calculer A^2, puis A^3 :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 225. Déterminer le carré des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 226. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}A$.
Déterminer B^n. En déduire A^n.

Exercice 227. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = kA$ où $k \in \mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de k a-t-on $B^2 = B$?

Exercice 228. Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

1. $A^n = A$
2. $B^{2n} = -B$
3. $4C^n = 4^n C$

Exercice 229. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I l'identité d'ordre 3.

1. Calculer I^n et A^n.
2. En déduire l'expression de la matrice $(I+A)^5$.

Exercice 230. Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, la puissance n-ième de chaque matrice.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
3. $C=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 231. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^{2n}=5^nI$.
3. Calculer A^{2016}.

Exercice 232. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En écrivant $A=I+J$, où I est l'identité d'ordre 3 et J une matrice à déterminer, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 233. Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif.
Le but est de déterminer $M^{1\,000}$ de trois façons.

1. (a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   (b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n. En déduire $M^{1\,000}$.
2. (a) Vérifier que $M^2=2M-I$.
   (b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I.
   (c) Conclure.
3. (a) Déterminer la matrice A telle que $M=I+A$.
   (b) Calculer A^2.
   (c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I.
   (d) Exprimer $M^{1\,000}$ en fonction de A et I.
   (e) Conclure.

Exercice 234. Soit les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=A-I$.

1. Calculer B^2 et B^3.
2. (a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I+B)^n$? Justifier.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$A^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}B+\binom{n}{2}B^2.$$

Exercice 235. Soit $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $B=A-D$. Calculer B^2 et B^3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$A^n=(-1)^n\left(I_3-nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2\right).$$

Exercice 236. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice diagonale B et une autre matrice C telle que $A=B+C$.
2. (a) Pour tout entier n, donner l'expression de B^n.
   (b) Vérifier que B et C sont commutatives.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = B^n + nCB^n + \binom{n}{2}C^2B^{n-2}.$$

Exercice 237. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 telle que $a_{ij} = 0$ si $i \geqslant j$ et $a_{ij} = i + j$ si $i < j$.

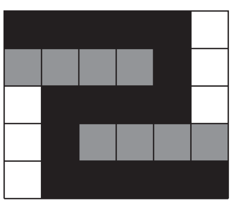
1. Écrire A. Quelle particularité a-t-elle ?
2. Déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Calculs matriciels divers

Exercice 238. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les calculs suivants, déterminer ceux qu'on peut effectuer et donner la taille du résultat.
   (a) AB
   (b) $A - B$
   (c) AC
   (d) $A + 2C$
   (e) CA
   (f) CB
   (g) $B + C$
   (h) BAC
   (i) ABC
   (j) A^2
   (k) B^2
   (l) C^2
2. Effectuer les calculs possibles.

Exercice 239. Une image numérique en nuances de gris est représentée par une matrice où le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne est égal au niveau de gris, entre 0 (blanc) et 1 (noir), du pixel correspondant.



1. Écrire la matrice A des niveaux de gris de l'image précédente où les trois couleurs sont noir, blanc et gris moyen (niveau 0,5).
2. (a) Écrire la matrice B du négatif de cette image.
   (b) Exprimer b_{ij} en fonction de a_{ij}.
   (c) Représenter l'image correspondante à B^T.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Décrire l'influence du facteur k sur l'image représentée par kC pour $k \in]0\,;\,1[$.
   (b) Déterminer la matrice D telle que $D = 2A - C$.
   (c) Représenter l'image correspondante à D.

Exercice 240. Soit la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) A est triangulaire supérieure. Que dire de A^T ?
   (b) Calculer $A + A^\mathsf{T} - I$.
2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4 et conjecturer A^n.
   (b) Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 241. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = A + B$.

1. Calculer C^2.
2. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.
3. Pourquoi n'a-t-on pas $C^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 242. Soit A et B deux matrices carrées commutatives.
Développer les expressions suivantes :

1. $(2A + I)(I - A)$
2. $(A + 2I)^2$
3. $(A + 2B)(B - A)$
4. $(2A - B)^2$

Exercice 243. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels.
On souhaite résoudre l'équation $X^2 = I$.

1. Montrer que, si $b = 0$, les solutions de l'équation ne dépendent que de c.
2. Montrer que, si $b \neq 0$, les solutions sont telles que :

$$c = \frac{1-a^2}{b} \text{ et } d = -a.$$

Exercice 244. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis vérifier que $A^3 = 2I$.
2. En déduire A^{3n}, A^{3n+1} et A^{3n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 245. Soit la suite (u_n) telle que u_0=0 et u_{n+1}=$u_n + 2^n$.

Prouver que, pour $n \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 246. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer A^n pour tout n entier naturel non nul.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 247. On pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $A(\theta)A(\theta') = A(\theta+\theta')$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n(\theta) = A(n\theta)$.

Fiche 4

Matrices- partie 1

Cours et exos Sesamaths.

I. Matrices inversibles

I.1. Inverse d'une matrice carrée

Définition 19
Inverse d'une matrice carrée.
Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d ?ordre n telle que $AB = BA = I$.
La matrice B, notée $\boldsymbol{A^{-1}}$, est appelée la **matrice inverse** de A.

Exemple
Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc B est l'inverse de A.

Propriété 16
Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.

Démonstration : Soit A une matrice inversible ayant deux inverses B et C.
On a $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Ainsi, $B = C$. Donc, l'inverse de A est unique. □

Propriété 17
Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Remarque
Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités $AB = I$ ou $BA = I$ pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple
Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Donc A et B sont inverses l'une de l'autre et on a les égalités $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

I.2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 20
Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

Le **déterminant**de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ égal à $ad - bc$.

Théorème 11
Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

— La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

— Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration : Soit $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.

— Si $ad - bc \neq 0$, alors $\dfrac{1}{ad-bc}MN = I \Leftrightarrow M\left(\dfrac{1}{ad-bc}N\right) = I$.

Donc M est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{ad-bc}N = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— Si $ad - bc = 0$, alors $MN = 0$. Supposons alors que M soit inversible, d'inverse P.
Alors, on aurait $PMN = IN = N$ et $PMN = P0 = 0$ et donc $N = 0$, ce qui est absurde. □

Remarques

— Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel

— Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

II. Résolution d'un système linéaire

Propriété 18
Écriture matricielle d'un système Le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$ a pour écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Démonstration : $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$. □

Remarque
Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple
$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+z & = & 7 \\ 3x-2y-z & = & -5 \end{array}\right.$.

Propriété 19
Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n.
Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX=B$ admet une unique solution :
le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Démonstration : Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX=B$ où A est inversible.
Alors, on a : $AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow IX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$. □

Exemple
Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y & = & 8 \\ 3x-4y & = & 15 \end{array}\right.$. **correction**

On résout l'équation $AX=B$ où $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.
On calcule $\det(A)=-4\times 2-3\times 5=-23$. Comme $\det(A)\neq 0$, alors A est inversible.
Donc, l'équation $AX=B$ a pour unique solution $X=A^{-1}B$.
On calcule $X=\dfrac{-1}{23}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}=\dfrac{-1}{23}\begin{pmatrix} -4\times 8-5\times 15 \\ -3\times 8+2\times 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 107/23 \\ -6/23 \end{pmatrix}$.
Le système admet donc pour unique solution le couple $\left(\dfrac{107}{23}\ ;\ \dfrac{-6}{23}\right)$.

Remarque
Un système linéaire d'écriture matricielle $AX=B$ où A n'est pas inversible a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Exemple
Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y & = & a \\ 4x+8y & = & b \end{array}\right.$ s'écrit matriciellement $AX=B$ où $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.
Or, $\det(A)=0$ donc A n'est pas inversible.

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :

$\begin{cases} 12x+24y &= 4a \\ 12x+24y &= 3b \end{cases}$ ce qui entraîne que $4a = 3b$ toujours vrai, ou jamais.

Exemple

— On passe à l'écriture matricielle du système : $AX = B$.

— On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l'inversibilité de A.

— On détermine alors A^{-1}, puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

exercice

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x-3y+4z &= -1 \\ x+y-5z &= 2 \\ -4x+3y &= 6 \end{cases}$.

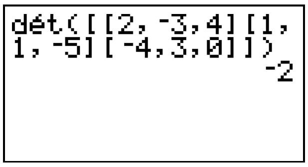
correction Le système a pour écriture matricielle $AX = B$ avec :

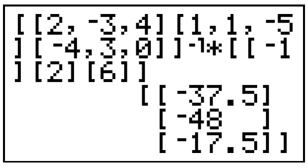
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Avec une calculatrice TI

— Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande dét(.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches 2nde ×) et "]" (touches 2nde −). Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche (−).

— Faire "préced" (touches 2nde entrer) pour revenir dans l'instruction précédente.
Supprimer dét(et la parenthèse finale.
À la suite, appuyer sur la touche x^{-1}, saisir la matrice colonne B et appuyer sur "entrer".

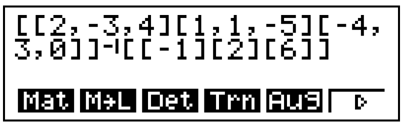


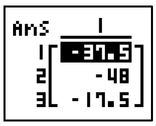


Avec une calculatrice CASIO

— Appuyer sur la touche OPTN, choisir MAT puis la commande Det.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches 2nde +) et "]" (touches 2nde −).

— Appuyer sur la flèche gauche pour revenir dans l'instruction précédente. Supprimer Det.
À la suite, faire "x^{-1}" (touches SHIFT)), saisir la matrice colonne B et appuyer sur EXE.





Avec le logiciel de calcul formel Xcas

```
1 A:=[[2,-3,4],[1,1,-5],[-4,3,0]]
  [2,  -3,  4
   1,   1, -5
  -4,   3,  0]
2 det(A)
  -2
```

```
3 B:=[[-1],[2],[6]]
  [-1
    2
    6]
4 X:=inverse(A)*B
  [-75/2
   -48
   -35/2]
```

► Ainsi, $\det(A) = -2 \neq 0$ donc A est inversible et le système admet une unique solution : le triplet $(-37{,}5\,;\,-48\,;\,-17{,}5)$.

Exercices

Inverse d'une matrice

Exercice 248. Pour chaque matrice, déterminer si elle est inversible et, si oui, calculer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 249. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 250. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 251. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $2A - A^2 = I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 252. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et l'algorithme suivant. a, b, c, d, det sont des nombres
L1 et L2 sont des listes
Traitement
Saisir a, b, c, d
det prend la valeur ad - bc
Si det=0 alors Afficher "Impossible"
Sinon
L1[1] prend la valeur d/det L1[2] prend la valeur -b/det L2[1] prend la valeur -c/det L2[2] prend la valeur a/det Afficher L1, L2 Fin Si

1. Préciser la signification de l'affichage « Impossible ».

2. Que dire de la matrice obtenue par l'affichage des listes `L1` et `L2` ? Vérifier la réponse par un calcul.
3. Programmer l'algorithme dans AlgoBox et le tester pour $a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=3$.
4. On suppose que M est inversible. Démontrer que M^{T} est inversible et que :
$$\left(M^{\mathsf{T}}\right)^{-1}=\left(M^{-1}\right)^{\mathsf{T}}.$$
5. En déduire comment modifier simplement l'algorithme pour qu'il calcule, si possible, l'inverse de la transposée de M.

Exercice 253. Soit les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$.

Pour toute matrice carrée inversible M et tout entier naturel n, on note $M^{-n}=\left(M^{-1}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
   (a) $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$
   (b) $B^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{pmatrix}$
2. Peut-on en déduire $(AB)^n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$?

Exercice 254 — Inverse d'un produit Soit A et B deux matrices inversibles et $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

1. Prouver que AB est inversible et déterminer $(AB)^{-1}$.
2. Prouver que λA est inversible et déterminer $(\lambda A)^{-1}$.

Résolution d'un système linéaire

Exercice 255. À l'aide des matrices mais sans l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases}-4x+3y=2\\-x+y=5\end{cases}$
2. $\begin{cases}9x-4y=2\\-1,8x+0,8y=-9\end{cases}$
3. $\begin{cases}3\sqrt{3}x+3y=\sqrt{3}\\-3x-\sqrt{3}y=1\end{cases}$
4. $\begin{cases}6x+8y=8\,400\\x+1,5y=1\,450\end{cases}$

Exercice 256. À l'aide des matrices mais sans l'aide d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants (on discutera des solutions selon les valeurs de θ) :

1. $\begin{cases}\cos\theta x-\sin\theta y=\cos\theta+\sin\theta\\\cos\theta x+\sin\theta y=-\cos\theta+\sin\theta\end{cases}$
2. $\begin{cases}\cos\theta x-\sin\theta y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\cos\theta y+\sin\theta x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Exercice 257. Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants avec la calculatrice ou un logiciel de calcul formel :

1. $\begin{cases}3x-3y-2z=0\\3x+y+z=-2\\-2x+3y+2y=-1\end{cases}$
2. $\begin{cases}2x-3y+z=-8\\-3x+2y-3z=3\\x-y+z=-1\end{cases}$
3. $\begin{cases}-x-3y-2z=-1\\-3x-2y+2z=0\\3x+3y-z=-1\end{cases}$
4. $\begin{cases}-2x-3y-2z=2\\-3x-3y+2z=1\\x+2y+3z=-2\end{cases}$

Exercice 258. Déterminer, si c'est possible, deux réels a et b vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix}5&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$

Exercice 259. Déterminer, si c'est possible, trois réels a, b et c vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix}3&1&4\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 260. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.
2. Résoudre les systèmes d'équations suivants :
   (a) $\begin{cases} x-2y-2z= 0 \\ 2x+y+2z=-9 \\ 2x+z=-8 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x+2y-2z=-2 \\ 2x+5y-6z=-7 \\ -2x-4y+5z= 8 \end{cases}$

Exercice 261. Soit le système linéaire $(S) \begin{cases} 2x+5y=8 \\ 3x-4y=15 \end{cases}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

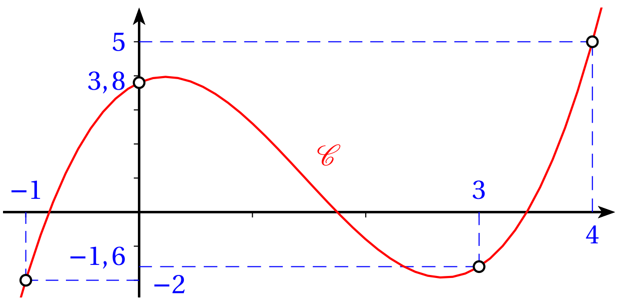
1. (a) Écrire (S) sous la forme matricielle $AX = B$.
   (b) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (c) En déduire les solutions du système.
2. (a) Écrire (S) sous la forme matricielle $X'A' = B'$.
   (b) Que peut-on dire de A et A' ? de B et B' ?
   (c) Exprimer X' en fonction de A et B.

Exercice 262. Soit a et b deux réels.

1. Résoudre le système linéaire
   $\begin{cases} 4x+3y = a \\ 8x+7y = b \end{cases}$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $12x+9y=4$ et $8x+7y=1$ dans un repère donné.

Exercice 263. Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est la parabole passant par les points $A(-1\,;-3)$, $B(3\,;-5)$ et $C(4\,;-13)$.

Exercice 264. Soit la fonction polynôme de degré 3 définie par $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ représentée ci-dessous.



1. Justifier que $d = 3,8$.
2. Soit la matrice ligne $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.
   Déterminer deux matrices A et B telles que $AX^{\mathsf{T}}=B$.
3. Résoudre l'équation précédente avec la calculatrice.
   En déduire l'expression de $f(x)$.

Fiche 5

Matrices

Cours et exos Sesamaths.

I. Puissances d'une matrice

La puissance n-ième d'une matrice intervient souvent dans les calculs mais en donner une expression en fonction de n est souvent difficile. Cependant, nous allons voir que, dans des cas particuliers, c'est possible.

I.1. Puissances d'une matrice diagonale

Propriété 20
Puissance d'une matrice diagonale Soit une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

— $D^0 = I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \text{diag}(d_1^0, d_2^0, \dots, d_p^0)$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Supposons que, pour un certain entier naturel n, $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est héréditaire. □

Exemple
Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

I.2. Puissances d'une matrice diagonalisable

Définition 21 (Matrice diagonalisable)
Une matrice carrée A est **diagonalisable** s ?il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple
$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

> **Propriété 21**
> Puissances d'une matrice diagonalisable Si A est une matrice diagonalisable telle que $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice inversible et D une matrice diagonale, alors, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

— $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

— Supposons que, pour un entier n donné, $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. □

Exemple
Reprenons la matrice A de l'exemple précédent. Calculons A^4.

$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 2 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -90 \\ 15 & -29 \end{pmatrix}$.

Exemple
Déterminer $\boldsymbol{M^n}$ lorsque $\boldsymbol{M}$ est diagonalisable

1. M est diagonalisable donc $M = PDP^{-1}$. En général, une au moins des matrices P et D est donnée (la **diagonalisation**, procédé pour les trouver, est hors programme en Terminale).
2. On démontre par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ (voir au bas de la page **??**).

exercice On considère la matrice T diagonalisable telle que :

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible, } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$
et D une matrice diagonale.

Déterminer T^n avec une calculatrice, puis avec un logiciel de calcul formel. **correction** Avec la calculatrice :

— On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $D = P^{-1}TP$. On obtient $D = \text{diag}(1\,;\,0,3\,;\,-0,1)$.

— On calcule alors $T^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(1\,;\,0,3^n\,;\,(-0,1)^n)$. On obtient :

$$T^n = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} (-0,1)^n + 11\times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n - 11\times 0,3^n + 10 & 2(1-(-0,1)^n) \\ (-0,1)^n - 11\times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n + 11\times 0,3^n + 10 & 2(1-(-0,1)^n) \\ -10(-0,1)^n + 10 & -10(-0,1)^n + 10 & 2(1+10(-0,1)^n) \end{pmatrix}$$

II. Exerices

on donne la **formule du binôme de Newton** pour $n \in \mathbb{N}$ et deux matrices commutatives A et B : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

Exercice 265. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = 5^n I$.

Exercice 266. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire M sous la forme $I + J$ et expliciter la matrice J.
2. Calculer J^2 et J^3.
3. Calculer $(I+J)^n$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 267. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $A - B$, puis B^3.
   (b) Démontrer que $A^n = \dfrac{n(n-1)}{2} B^2 + nB + I$.
   (c) En déduire A^n en fonction de n.
2. (a) Vérifier que l'expression de A^n trouvée précédemment est encore vraie pour $n = -1$.
   (b) En déduire qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 268. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le réel λ et la matrice B telle que $A = I + \lambda B$.
2. Vérifier que $B^2 = 0$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + \lambda n B$.

Exercice 269. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. (a) Vérifier que $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 270. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. (a) Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire une expression de A^n.

Exercice 271. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice, vérifier que Q est l'inverse de P.
2. Soit la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(2,1,1)$.
   (a) Établir l'égalité $A = PDQ$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
   (c) En déduire une expression de A^n.

Exercice 272. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice, vérifier que Q est l'inverse de P.
2. Démontrer qu'il existe $D = \mathrm{diag}(a,b,c)$ avec a, b, c réels telle que $A = PDQ$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 273. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Démontrer que :

(a) il existe α et β réels tels que $A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}$;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$.

3. En déduire une expression de A^n.

Exercice 274. $A = \begin{pmatrix}16 & 4 & -4\\ -18 & -4 & 5\\ 30 & 8 & -7\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice :
   (a) déterminer les matrices $B = AP$ et P^{-1} ;
   (b) déterminer la matrice $D = P^{-1}B$.
2. (a) Exprimer A en fonction de D.
   (b) Exprimer A^2 et A^3 en fonction de P, D^2, D^3 et P^{-1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ et } D^n = \text{diag}(0, 1, 4^n).$$

   Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.

Exercice 275. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $M^2 = M + 2I$.
2. Exprimer M^3 et M^4 sous la forme $\alpha M + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n\\ v_{n+1} &= 2u_n \end{cases}.$$

   Démontrer que : $M^n = u_nM + v_nI$.
4. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est géométrique de raison -1.
   (b) En déduire une expression de w_n en fonction de n.
5. Soit la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$.
   On admet que (x_n) est géométrique de raison 2.
   En déduire une expression de x_n en fonction de n.
6. Déduire de ce qui précède u_n et v_n en fonction de n.
7. En déduire alors M^n en fonction de n.

Fiche 6

Matrices- partie 1

Cours et exos Sesamaths.

I. Suites de matrices colonnes

I.1. Généralités

Définition 22
Suite de matrices colonnes Une suite de matrices colonnes de taille $k \geqslant 2$ est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne de même taille.

Remarque
Cette définition prolonge celle de suite numérique. On peut ainsi rencontrer des suites de matrices définies explicitement ou par récurrence.

Exemple
Soit (U_n) la suite de matrices colonnes $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, ...

Cette suite peut être définie explicitement avec $U_n = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2^n \end{pmatrix}$ mais aussi par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 23
Convergence, limite d'une suite de matrices colonnes Une suite de matrices colonnes $(U_n) = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ converge si les suites numériques (a_n) et (b_n) convergent. Sa limite est alors la matrice colonne formée par les limites de ces deux suites.

Exemple
Soit (U_n) la suite de matrices colonnes de terme général $U_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n+1} \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque
On définit naturellement une suite de matrices colonnes de taille supérieure.

I.2. Suites définies par $U_{n+1} = AU_n$ ou $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété 22
Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille k définie par $U_{n+1} = AU_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec A une matrice carrée d'ordre k. Alors, le terme général de (U_n) peut s'écrire $U_n = A^n U_0$.

Démonstration : On démontre par récurrence sur n. Voici l'initialisation et l'hérédité :

- Initialisation : $U_0 = IU_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Si, pour n entier donné, $U_n = A^n U_0$, alors $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$. $\square$

Exemple
Expliciter $\boldsymbol{U_n}$ pour $\boldsymbol{(U_n)}$ définie par $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$
Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice C telle que : $C = AC + B$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.
4. En déduire une expression U_n en fonction de n.

correction

1. - Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$, donc la proposition est vraie.
   - Supposons la proposition vraie pour n donné. Montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
     $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ n2^n + 2^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.
   - La proposition est initialisée au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$. Or, $\det(I - A) = 1$ donc $I - A$ est inversible.
   On a $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. D'où : $C = (I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - AC - B = A(U_n - C) = AV_n$.
   Or, une suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $V_{n+1} = AV_n$ est telle que $V_n = A^n \times V_0$.
4. $U_n = V_n + C = A^n \times V_0 + C = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4 \\ n2^{n+1} + 6 \end{pmatrix}$.

II. Exercices

Exercice 276. Soit la suite de matrices lignes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{10} U_n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Exercice 277. Soit la suite de matrices colonnes (V_n) de taille 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + R$ avec :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Déterminer l'expression de V_n en fonction

de n.

3. La suite (V_n) converge-t-elle ?

Exercice 278. Soit les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$.

Soit la suite de matrices (X_n) définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit enfin la matrice A définie par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P et P' sont inversibles.
   (b) Déterminer la matrice diagonale B telle que $P'BP = A$.
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.
3. (a) Exprimer B^n en fonction de n.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$
4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 279. Soit les matrices $T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que $T = PDP^{-1}$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire une expression de T^n.
2. Soit les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par a_0 et b_0 et l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$
   (b) Déterminer une expression des termes généraux des suites (a_n) et (b_n).
   (c) En déduire la limite de ces deux suites.

Exercice 280 — Suite de Fibonacci La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Soit les matrices $F_n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $F_{n+1} = F_nT$, puis que $F_n = F_0T^n$.
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer la matrice D telle que $T = PDP^{-1}$.
   (b) En déduire T^n en fonction de n.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$ où φ est le nombre d'or égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Soit l'algorithme incomplet suivant.
```
a PREND LA VALEUR 0
b, c, d PRENNENT LA VALEUR 1
TANT QUE (d>0.0001) FAIRE
a PREND LA VALEUR b
b PREND LA VALEUR c
c PREND LA VALEUR ...
d PREND LA VALEUR abs((c/b-b/a))
```
   (a) Compléter la ligne 6 afin que l'algorithme calcule les termes successifs de la suite de Fibonacci.

(b) Expliquer comment s'arrête la boucle TANT QUE.

(c) Programmer l'algorithme et obtenir une valeur approchée du nombre d'or à 10^{-6} près.

II.1. Suites $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice 281. Soit (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.
5. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$A^n = \begin{pmatrix}3^n & 2n \times 3^{n-1}\\0 & 3^n\end{pmatrix}.$$
   (b) En déduire une expression de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 282. Soit (U_n) une suite de matrices lignes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_nA + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice C telle que $C = CA + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_nA$.
3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = (U_0 - C)A^n + C$.
5. (a) Calculer A^2, puis A^3. En déduire A^6.
   En déduire A^n en fonction du reste de la division euclidienne de n par 6.
   (b) Déterminer la matrice U_{57}.

Exercice 283. Soit les suites réelles (x_n) et (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1\\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3\end{cases}.$$

1. Soit $B = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. (a) Montrer que $I - A$ est inversible.
   Calculer $(I - A)^{-1}$.
   (b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.
   (c) Étudier la convergence de (x_n) et (y_n).
3. Soit (V_n) la suite de matrices définie par $V_n = X_n - X$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^nV_0$.
4. (a) Justifier que $P = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}$ est inversible.
   (b) On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}AP$.
   Donner une expression de D^n.
   (c) En déduire une expression de A^n.
5. Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$, que peut-on dire de la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Fiche 7

Chaînes de Markov

Cours transmaths

I. Vocabulaire

Un **processus** est une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E ayant un nombre fini d'éléments appelés états. On dit alors que E est l'ensemble des états. Pour un entier n, on dit que le processus est dans l état i si l'évènement $(X_n = i)$ est réalisé.

Définition 24

Un processus (X_n) est une **chaîne de Markov** sur un espace d'états E si, quel que soit l'entier naturel n la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $n+1$ **sachant** les états du processus entre les instants 1 et n est égale à la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant l'état du processus à l'instant n, autrement dit sachant que le processus est à l'état i à une étape, la probabilité que le processus soit à l'état j ne dépend pas du chemin suivi par le processus avant l'instant n pour arriver ne i

Une chaîne de Markov (X_n) est dite homogène si $P_{(X_n=i)}(X_n = j)$ est indépendante de n.

Exemples

— Akwa, un chien ayant une puce, rencontre Bali, un autre chien. Chaque seconde, la puce reste sur un chien ou va sur l'autre. Notons X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la puce est sur Akwa à la seconde n, 2 sinon. (X_n) est un processus sur l'espace des états $\{1,2\}$.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre est plus grande si le chien se soit gratté dans les 20 dernières secondes. Le processus n'est pas une chaîne de Markov.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre ou de rester sur le chien ne dépende que du chien sur lequel elle est à l'instant n, mais que le temps passant, la probabilité d'aller sur Akwa ou d'y rester soit de plus en plus grande, alors le processus est une chaîne de Markov non homogène.

— Supposons que la probabilité de passer d'un chien à l'autre ou de rester sur le chien ne dépende que du chien sur lequel elle est à l'instant n, et que de plus la probabilité sachant qu'elle est sur Akwa d'y rester est 0.8 et sachant qu'elle est sur Bali, d'y rester est de 0,7, quel que soit la seconde n, alors le processus est une chaîne de Markov homogène.

II. Matrice associée à une chaîne de Markov homogène

Définition 25
A une chaîne de Markov dont l'espace des états a N éléments, on associe une matrice carrée P de rang N dont le coefficient $p_{i,j}$ est la probabilité que le système soit dans l'état j sachant qu'elle était dans l'état i à l'étape précédente. Cette matrice est appelée à la matrice de transition associée à la chaîne de Markov.

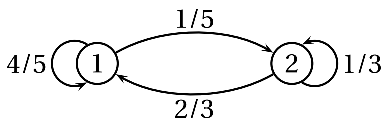
Exemple
Reprenons nos chiens et supposons que chaque seconde : soit la puce va d'Akwa (état 1) à Bali (état 2) une fois sur cinq, soit elle va de Bali à Akwa deux fois sur trois, soit elle reste sur le même chien. Alors, la chaîne de Markov a matrice de transition : $T = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Remarque
Une matrice de transition est dite **stochastique** : ses coefficients appartiennent à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

III. Graphe associé à une chaîne de Markov homogène

Définition 26
A une chaîne de Markov dont l'espace des états a N éléments, on associe un graphe dont les sommets sont les états et dont l'arête orientée reliant l'état i à l'état j est pondérée par la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Exemple
En reprenant l'exemple précédent, on obtient :



IV. Exercices

Exercice 284. Une ville est composée de deux quartiers A et B comptant respectivement 251 et 386 citadins.
Soit a_n et b_n les probabilités qu'un citadin provienne des quartiers A et B lors de la n-ième année d'étude.
Soit la matrice colonne U_n définie par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Chaque année, des citadins déménagent :

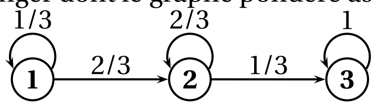
— 5 % des citadins du quartier A vont au quartier B ;

— 12 % des citadins du quartier B vont au quartier A.

1. Modéliser la situation à l'aide d'une chaîne de Markov Homogène (X_n) dont on donnera la matrice de transition et le graphe associé.
2. Quelle est la loi de probabilité de X_0 ?
3. Quelle est la loi de probabilité de X_1 ?

Exercice 285. Lors de l'Épiphanie, un boulanger insère dans chaque galette des Rois une fève naturelle : fève de cacao, de tonka ou de Gargane. On suppose qu'il y a autant de chance d'avoir un type de fève ou un autre.

1. Déterminer la probabilité d'avoir deux types de fèves différents en achetant deux galettes.
2. Déterminer la probabilité d'avoir les trois types de fèves en achetant trois galettes.
3. On définit la chaîne de Markov sur les trois états qui correspondent au nombre de types de fèves obtenus par un client du boulanger dont le graphe pondéré associé est le suivant



   (a) Écrire la matrice de transition P associée au graphe.

   (b) Quel calcul matriciel donne la probabilité d'avoir les trois types de fèves en achetant trois galettes ?

Exercice 286. On lance une pièce équilibrée jusqu'à faire deux « pile » consécutifs.

1. Traduire le processus par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition T associée.
3. Démontrer qu'en lançant quatre fois la pièce, la probabilité de succès est égale à 0,5.
4. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que cette probabilité soit égale à 0,9 ?

Fiche 8

Chaînes de Markov- distributions

Cours transmaths

I. Distributions

Propriété 23
Pour tous états i et j et pour tout n entier naturel $n \geqslant 1$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice P^n est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Démonstration : En live. □

Définition 27

1. La distribution initiale notée π_0 est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_0.
2. La distribution après n transitions notée π_n est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.
3. Une distribution est représentée par une matrice ligne.

Propriété 24
Si π_0 est la distribution initiale d'une chaîne de Markov homogène, alors pour tout n entier supérieur à 1 alors

— $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$

— $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ et pour tout n

Définition 28
P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov. Dire que π est une distribution invariante de la chaîne de Markov signifie que $\pi = \pi \times P$.

Exemple
Déterminer une distribution de probabilité invariante de la chaîne de Markov de l'exemple des chiens.

Théorème 12
P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale π_0. S'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la matrice P^k ne comporte aucun 0 alors la suite (π_n) converge vers une distribution invariante π indépendante de la distribution initiale π_0. De plus, π est l'unique distribution invariante de cette chaîne de Markov.

Démonstration : Amdmise □

II. Exercices

Exercice 287. On lance une pièce équilibrée jusqu'à faire deux « pile » consécutifs.

1. Démontrer qu'en lançant quatre fois la pièce, la probabilité de succès est égale à 0,5.
2. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que cette probabilité soit égale à 0,9 ?
3. Déterminer qu'il n' y a qu'une distribution invariante de probabilité.

Exercice 288. Dans une région impaludée, un individu est soit sain, immunisé (I) ou non immunisé (N), soit malade (M). D'un mois à l'autre, son état varie ainsi :

— I demeure avec une probabilité de 0,9 ou passe à N ;

— N demeure avec une probabilité de 0,6 ou passe à M ;

— M demeure avec une probabilité de 0,2 ou passe à N.

1. Réaliser un graphe de situation.
2. Écrire la matrice de transition A.
3. On suppose qu'un individu sain est immunisé.
   En calculant A^2, déterminer la probabilité que :
   (a) il soit encore immunisé au bout de deux mois ;
   (b) il soit malade au bout de deux mois.
4. Selon l'état initial d'un individu, déterminer la probabilité qu'il soit malade au bout de :

   (a) 5 mois (b)| 9 mois (c)| 1 an

Exercice 289. On a analysé le cours du dollar : au lendemain d'un jour de hausse, la probabilité qu'il monte est 0,4 et qu'il ne varie pas 0,6 ; au lendemain d'un jour sans variation, la probabilité qu'il monte est 0,4 et qu'il baisse 0,3 ; au lendemain d'un jour de baisse, la probabilité qu'il ne varie pas est 0,4 et qu'il baisse est 0,6.

1. Traduire le processus par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition T associée.
3. Un jour donné, le dollar monte. Quelle est la probabilité qu ?il ne varie pas sept jours après ?
4. Déterminer la répartition stable de probabilité, c'est-à-dire la matrice ligne M telle que $M = MT$.
5. On admet que la suite des distributions de probabilité converge vers M. Interpréter cette limite.

Exercice 290. Centrale MP-(RMS-130-2)- Probabilités - 984

1. Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\bar{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.

2. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au $n-ième$ lancer. Exprimer p_{n+3} à l'aide de p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.
3. Donner une expression et un équivalent de p_n.