Chapitre 1

Fiche 1

Probabilités Conditionnelles - Activité d'introduction

Exercice 1.

Dans un lycée, il y a 359 élèves en Seconde, 341 en Première et 354 en Terminale. 651 élèves mangent à la cantine du lycée, le tout selon la répartition suivante :

- 66% des élèves de Seconde mangent à la cantine ;
- 39% des élèves de Première mangent à l'extérieur.

On tire au sort un élève du lycée et on considère les événements suivants :

- C : « l'élève tiré au sort mange à la cantine »
- S : « l'élève tiré au sort est en Seconde »
- PR : « l'élève tiré au sort est en Première »
- T : « l'élève tiré au sort est en Terminale »

Dans la suite, les probabilités seront données sous forme de fractions.

1. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir à l'entier le plus proche) :

	Cantine	Extérieur	Total
Seconde			
Première			
Terminale			
Total			1 054

2. (a) Calculer $P(S)$ et $P(C \cap S)$.

   (b) On considère la « définition » suivante :

   > A et B étant deux événements donnés (avec $P(B) \neq 0$), on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B c'est-à-dire la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé.
   > On dit que $P_B(A)$ est une probabilité conditionnelle.

   Décrire $P_S(C)$ par une phrase puis la calculer.

   (c) Quel est l'univers associé à P_S, c'est-à-dire dans quel ensemble tire-t-on au sort quand on considère une probabilité sachant S ?

   (d) Déterminer un lien entre $P(S)$ et $P(C \cap S)$ et $P_S(C)$.

   (e) D'une manière générale, quel lien peut-on alors conjecturer entre $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$?

3. Tester la conjecture précédente avec $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(PR)$.

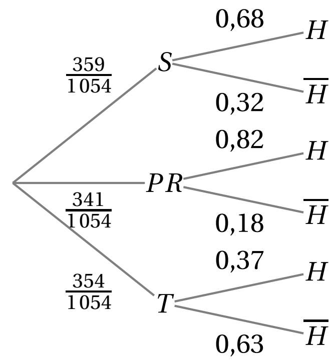
Exercice 2 - Avec un arbre pondéré.

Après une enquête menée sur les élèves de ce lycée (qu'ils aillent à la cantine ou non), on a dressé l'arbre pondéré ci-contre où H désigne l'événement « l'élève aime les haricots ».

1. Certaines des pondérations présentes sur cet arbre sont des probabilités conditionnelles.
   Dire lesquelles et les exprimer avec la notation vue à l'exercice 1.
2. (a) En admettant la formule conjecturée dans la partie précédente, exprimer $P_T(H)$ en fonction de $P(T)$ et $P(H \cap T)$.

   (b) En déduire $P(H \cap T)$ en fonction de $P_T(H)$ et $P(T)$ puis calculer $P(H \cap T)$.

   (c) Quelle règle bien connue sur les arbres pondérés retrouve-t-on ?



Fiche 2

Probabilités Conditionnelles - Probabilités Conditionnelles et arbres pondérés

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers, A et B deux événements de Ω et P une probabilité sur Ω.

I. Probabilités conditionnelles - Définition

Définition 1
Si $P(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque
Si $P(B) \neq 0$, on a de manière symétrique :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple
Dans un lycée, on demande aux élèves et aux professeurs s'ils préfèrent avoir cours le matin ou l'après-midi. On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous :

	Matin	Après-midi	Total
Élèves	657	438	1 095
Professeurs	84	21	105
Total	741	459	1 200

On choisit une personne au hasard (parmi élèves et professeurs) et on note :

- E l'événement : « La personne tirée au sort est un élève » ;
- M l'événement : « La personne tirée au sort préfère avoir cours le matin ».

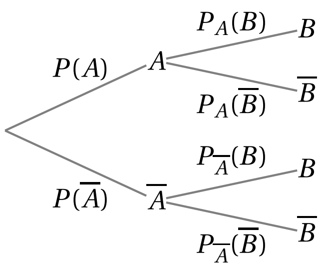
1. Calculer $P(E)$ et $P(E \cap M)$.
   On est dans une situation d'équiprobabilité donc :
   - $P(E) = \frac{1095}{1200} = 0{,}9125$;
   - $P(E \cap M) = \frac{657}{1200} = 0{,}5475$.

2. En déduire $P_E(M)$ avec la formule de la définition précédente.
   On en déduit que $P_E(M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(E)} = \dfrac{0{,}5475}{0{,}9125} = 0{,}6$.
3. Retrouver ce résultat sans utiliser la formule du cours.
   $P_E(M)$ est « la probabilité que la personne tirée au sort préfère avoir cours le matin sachant que c'est un élève », cette probabilité peut donc être obtenue en calculant :
   $\dfrac{\text{card}(E \cap M)}{\text{card}(E)} = \dfrac{657}{1\,095} = 0{,}6$.

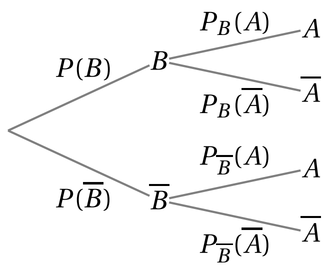
II. Application aux arbres pondérés

Propriété 1
Les principales règles de construction des arbres pondérés ou arbres probabilistes sont :
- la somme des probabilités des événements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

Remarques
- Dans le cas de deux événements A et B de probabilités non nulles, on a :

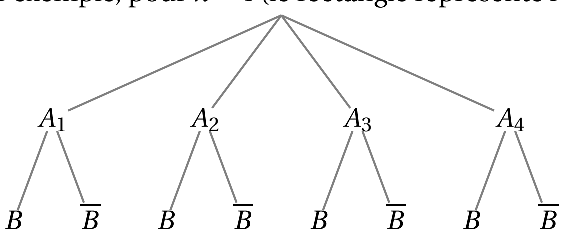


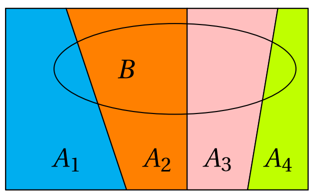
ou



  C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.
- Le premier point de la propriété illustre le fait que les événements A_1, A_2, ... et A_n correspondant aux branches partant du premier nœud sont des événements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
  On dit alors que A_1, A_2, ... et A_n forment une partition de l'univers Ω.

  Par exemple, pour $n = 4$ (le rectangle représente l'univers) :





Propriété 2
Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.
Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité de l'événement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Démonstration : Conséquence directe de la définition d'une probabilité conditionnelle. □

Exercice - Méthode : Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré

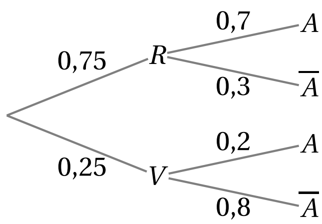
Sur l'étal d'un maraîcher, il y a $\frac{3}{4}$ de légumes rouges et le reste de légumes verts.

- Parmi les légumes rouges 30% sont des poivrons et 70% sont des tomates.
- Parmi les légumes verts 80% sont des poivrons et 20% sont des tomates.

On choisit un légume au hasard sur l'étal et on considère les événements :

- A : « le légume choisi est une tomate » ;
- R : « le légume choisi est Rouge » ;
- V : « le légume choisi est Vert ».

1. Représenter la situation par un arbre.
   Pour le premier nœud, les deux possibilités sont R : « le légume choisi est rouge » et son événement contraire $\overline{R}$ soit V : « le légume choisi est vert ».
   Il reste ensuite à distinguer tomates et poivrons pour les « deuxièmes nœuds ». Comme l'événement « le légume choisi est un poivron » n'est pas nommé par une lettre, on a utilisé $\overline{A}$ pour le représenter dans l'arbre mais on aurait aussi pu introduire une nouvelle notation.

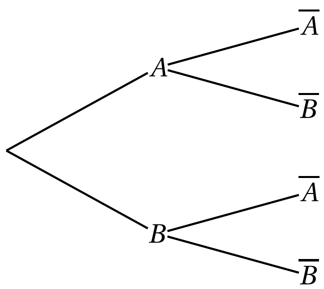


2. Calculer $P(R \cap A)$.
   $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}75 \times 0{,}7 = 0{,}525$.

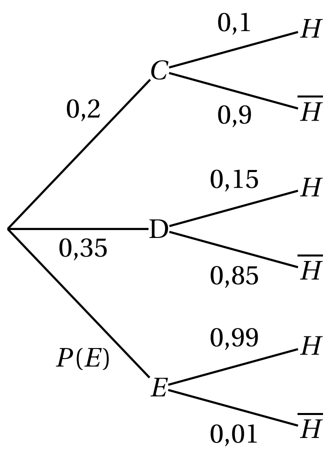
Exercices

Exercice 3. A, B, C, D, E et H désignent des événements quelconques d'un univers Ω.

1. Trouver l'erreur dans l'arbre de probabilité suivant :



2. Quelle(s) condition(s) doivent vérifier les événements C, D et E pour que l'arbre ci-dessous soit un arbre pondéré correct ?



Exercice 4.

1. On considère deux événements R et S tels que $P(R) = \dfrac{1}{4}$, $P_R(S) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{12}$.
   Construire un arbre pondéré avec ces événements R et S.
2. Tao ne sait pas s'il lui reste de quoi préparer à manger dans son réfrigérateur.
   Il estime la probabilité que ce soit le cas à 0,8.
   - Dans ce cas (s'il a de quoi préparer à manger), il estime que la probabilité que le repas qu'il se préparera soit bon est de 0,65.
   - Sinon, il ira dans son restaurant favori dans lequel il estime que la probabilité que le repas servi soit bon est de 0,99.

   Construire un arbre pondéré représentant la situation après avoir explicité les notations des événements apparaissant dans cet arbre.

Exercice 5. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$.
Calculer $P_A(B)$.

Exercice 6. On considère deux événements C et D tels que $P(D) = 0{,}6$ et $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}35$.
Calculer $P_{\overline{D}}(C)$.

Exercice 7. On considère deux événements disjoints E et F de probabilités non nulles.
Calculer $P_E(F)$.

Exercice 8. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}68$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$.
Calculer :

1. $P_A(B)$
2. $P_B(A)$

Exercice 9. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}63$ et $P_A(B) = 0{,}06$. Calculer :

1. $P(A \cap B)$
2. $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

Exercice 10. On considère deux événements E et F tels que $P(E) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{E}}(F) = \dfrac{7}{12}$. Calculer :

1. $P\left(\overline{E} \cap F\right)$
2. $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)$

Exercice 11 - Avec des phrases.

1. Dans une bibliothèque, les statistiques montrent que :
   — 55% des adhérents sont des garçons ;
   — 20% des adhérents sont des garçons ayant emprunté plus de 50 livres.

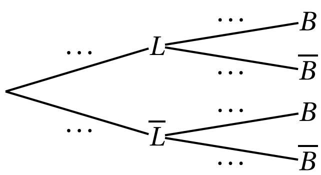
   Quand on rencontre un garçon sortant de la bibliothèque, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté plus de 50 livres ?
2. Quand on joue à un jeu de grattage, la probabilité d'obtenir « 3 télés » est de 0,000 001.
   Si c'est le cas, on est invité à la télévision pour faire tourner une roue comportant 100 sections équiprobables dont 5 offrent un gain de 1 000 000 €.
   Quelle est la probabilité de gagner 1 000 000 € à ce jeu ?
3. « Je suis sûr à 95% de manquer le bus, auquel cas je serai en retard. Et même si je l'ai, il y aura une chance sur trois que je sois quand même en retard ».
   Quelle est la probabilité que cette personne soit à l'heure ?
4. Dans le lecteur MP3 d'Anita, 17% des titres sont du rock français. Plus généralement, 61% des titres du lecteur sont des titres français.

   On met le lecteur en mode aléatoire et le premier titre est français. Quelle est la probabilité que ce soit du rock ?

Exercice 12. Après les contrôles de mathématiques, 60% du temps, Issa dit « Je suis sûr que j'ai loupé ». Ses amis sont pourtant formels : « Quand il dit ça, il a quand même 15 ou plus les 3/4 du temps. Et quand il ne dit rien, on peut être sûr à 95% qu'il va avoir 15 ou plus. »
Après un devoir de mathématiques, on considère les événements :

- L : « Issa dit qu'il a manqué le devoir » ;
- B : « Issa a 15 ou plus au devoir ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



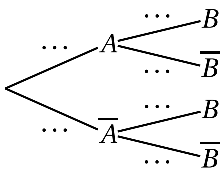
2. Calculer $P(L \cap B)$ et interpréter cette probabilité dans les termes de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité qu'il ne dise rien et qu'il ait moins de 15.

Exercice 13. Dans une playlist, Naïm a mis 10 albums et réglé le lecteur en sélection aléatoire. Le logiciel de sélection aléatoire choisit d'abord un album puis choisit une chanson dans cet album.
Quelle est la probabilité que la 1re chanson jouée soit la préférée de Naïm, qui se trouve dans un album de 12 titres ? On représentera la situation par un arbre.

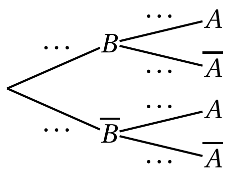
Exercice 14. On considère deux événements A et B et le tableau de probabilités ci-dessous :

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,44		
$\overline{B}$		0,13	0,32
Total			1

1. Recopier et compléter ce tableau.
2. Lire $P(A)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.
3. Calculer $P_A(B)$, $P_A\left(\overline{B}\right)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$. On écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
4. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



5. De même, recopier et compléter :



Exercice 15 - Trois à la suite. A-t-on $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_B(C)$?
Si oui, le démontrer, si non, modifier la formule pour en obtenir une correcte.

Fiche 3

Probabilités Conditionnelles - Formule des Probabilités totales

Propriété 3 (Formule des probabilités totales)

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B). \end{aligned}$$

- De même, si A_1, A_2, …et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

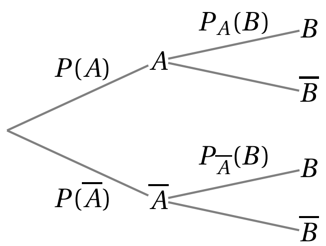
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

Démonstration :

- On a $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
  De plus, les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints. Par conséquent, on a :
  $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
  On en déduit que :
  $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$.
- Le second point se démontre de même car les événements $A_k \cap B$ pour k allant de 1 à n forment une partition de B. □

Remarque

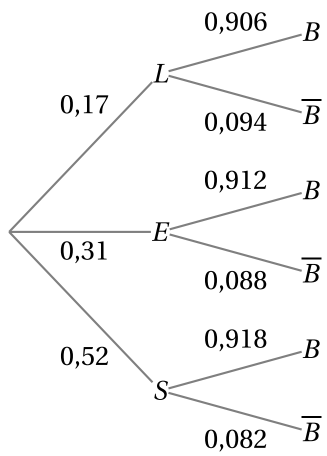
La formule des probabilités totales permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés : la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.



Exercice - Méthode : Utiliser la formule des probabilités totales

En 2015, la répartition des élèves ayant passé le baccalauréat général en France métropolitaine et dans les DOM est : 17% d'élèves de la filière L, 31% d'élèves de la filière ES et 52% d'élèves de la filière S. Par ailleurs, les taux de réussite dans ces filières sont 90,6% en L, 91,2% en ES et 91,8% en S. On tire au hasard un élève ayant passé le bac général en 2015.

1. Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   On obtient l'arbre ci-contre où :
   - L est l'évènement : « la personne a passé le bac L » ;
   - E est l'évènement : « la personne a passé le bac ES » ;
   - S est l'évènement : « la personne a passé le bac S » ;
   - B est l'évènement : « la personne a obtenu le bac ».



2. Quelle est la probabilité que la personne tirée au hasard ait obtenu le bac ?
   La formule des probabilités totales donne
$$\begin{aligned} P(B) &= P(L) \times P_L(B) + P(E) \times P_E(B) + P(S) \times P_S(B) \\ &= 0{,}17 \times 0{,}906 + 0{,}31 \times 0{,}912 + 0{,}52 \times 0{,}918 \\ &= 0{,}9141. \end{aligned}$$

3. Déterminer $P_{\overline{B}}(S)$.
   On sait que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap S\right)}{P\left(\overline{B}\right)}$ or :
   - $P\left(\overline{B} \cap S\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{B}\right) = 0{,}52 \times 0{,}082 = 0{,}04264$;
   - $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9141 = 0{,}0859$.

   On en déduit donc que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{0{,}04264}{0{,}0859} \approx 0{,}496$.

Exercices

Exercice 16. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}48$.

1. Montrer que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}32$.
2. Calculer $P_A\left(\overline{B}\right)$.

Exercice 17. On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = 0{,}4$ et $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 0{,}12$.
Calculer $P_{\overline{E}}(F)$.

Exercice 18. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}71$.
Calculer :

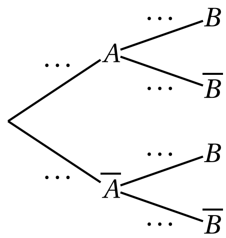
1. $P_A(B)$
2. $P_A\left(\overline{B}\right)$
3. $P_{\overline{B}}(A)$
4. $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$

Exercice 19 - D'après Bac.
Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non :

- 30% des dragées contiennent une amande ;
- 40% des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les évènements :

- A : « la dragée choisie contient une amande » ;
- B : « la dragée choisie est bleue ».

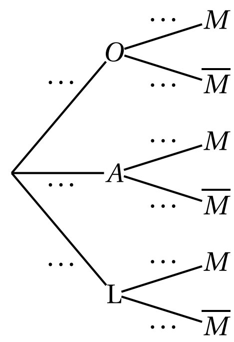


1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$.
3. Calculer $P(B)$.
4. En déduire $P_B(A)$.
5. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.
6. Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou bien une dragée rose ?

Exercice 20 - Améliorer la qualité.
Ordralfabétix est poissonnier et 15% du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30% vient d'un grossiste armoricain et le reste d'un grossiste de Lutèce.
Il a remarqué que 5% de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10% du poisson provenant du grossiste armoricain et 90% du poisson de Lutèce.
Un client achète un poisson à Ordralfabétix.
On considère les évènements suivants :

- O : « Le poisson a été pêché par Ordralfabétix »
- A : « Le poisson provient du grossiste armoricain »
- L : « Le poisson provient du grossiste de Lutèce »
- M : « Le client est mécontent du poisson »

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste ci-contre.
2. (a) Calculer $P(M)$.
   (b) Un client est mécontent du poisson acheté. Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Ordralfabétix ?
3. Ordralfabétix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30% en continuant à pêcher 15% de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.



Exercice 21 - Épidémiologie.

Dans un pays, une épidémie touche 10% de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1% des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1% des cas.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.
   (a) Montrer que le traitement est donné à 10,89% de la population.
   (b) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?

Exercice 22 - Réduire les coûts.

Sur une chaîne de production d'un composant électronique, on effectue des tests qualité :

- Un premier examen visuel est effectué éliminant 5% des composants, qui sont détruits.
- Les composants restants passent un test de fiabilité qui est réussi par 90% des composants qui sont alors mis en vente.
- Parmi les composants n'ayant pas réussi le test de fiabilité, 30% peuvent être réparés facilement et mis en vente, le reste est détruit.

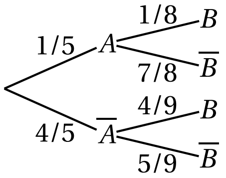
On prélève un composant au hasard sur cette chaîne.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
   On notera E l'événement « le composant réussit l'examen visuel », F « le composant réussit le test de fiabilité » et V « le composant est mis en vente ».
2. Calculer $P\left(\overline{F}\cap V\right)$, $P(V)$ et $P_V\left(\overline{F}\right)$.
3. Un composant :
   - coûte 0,05 € s'il est détruit ;
   - rapporte 0,5 € s'il est mis en vente sans réparation et 0,25 € s'il est mis en vente après réparation.

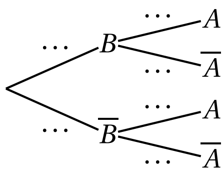
   (a) Donner la loi de probabilité de X, la variable aléatoire donnant la somme algébrique rapportée par un composant produit et éventuellement vendu.
   (b) Combien d'argent peut-on « espérer » gagner par composant ?

Exercice 23. Compléter l'arbre 2 en utilisant l'arbre 1 :

Arbre 1



Arbre 2



Exercice 24. Chez Edmond, la vaisselle se joue toujours aux jeux vidéo de la façon suivante : on lance une pièce et :

- si c'est pile, il affronte sa mère à un jeu de combat où il n'a que 30% de chance de gagner ;
- si c'est face, il affronte son père à un jeu de puzzle (avec des briques) où il a 40% de chance de perdre.

S'il perd sa partie, il fait la vaisselle, sinon, ses parents s'affrontent sur un jeu de stratégie où ils sont aussi bons l'un que l'autre pour savoir qui fera la vaisselle.
Ce soir, c'est le père d'Edmond qui est de vaisselle. Quelle est la probabilité que le premier duel ait eu lieu sur le jeu de puzzle ?

Exercice 25 - Question ouverte.
D'après l'« Enquête nationale prénatale » de 2010 réalisée par l'Inserm, la probabilité d'une grossesse donnant lieu à une naissance prématurée en France est de 6,6% mais est accentuée par le fait que la grossesse soit multiple (jumeaux, triplés, etc) ou non.
Plus précisément, cette probabilité est de 41,7% en cas de grossesse multiple contre 5,5% sinon.
Déterminer la probabilité d'une grossesse multiple.

Exercice 26. Miao veut organiser une tombola : elle prévoit de vendre des tickets dont 20% sont gagnants et 80% sont perdants.
Pour chaque gagnant, elle organisera ensuite un tirage au sort tel qu'il y ait :

- 80% de chance d'obtenir un lot de 1 € ;
- x % de chance d'obtenir un lot de 2 € ;
- $20 - x$ % de chance d'obtenir un lot de 100 €.

1. À combien Miao doit-elle fixer la probabilité d'obtention du deuxième lot pour qu'elle puisse espérer ne dépenser que 1,71 € par ticket en achats de lots.
2. Proposer une expérience aléatoire permettant de faire ce tirage au sort.

Exercice 27 - Génétique.
Le daltonisme est une maladie génétique à transmission récessive liée au chromosome X c'est-à-dire que l'allèle responsable est récessif, pour un gène présent sur le chromosome X.

- Pour une femme, on distinguera le fait d'être malade (présence de l'allèle responsable sur les deux chromosomes X), porteuse de la maladie (présence de l'allèle responsable sur un seul chromosome X) et saine (absence totale de l'allèle responsable).
- Pour un homme, la présence de l'allèle sur l'unique chromosome X assure qu'il est malade.

Béatrice a un père daltonien mais elle-même n'est pas malade.
Sachant que 8 % des hommes sont daltoniens, quelle est la probabilité que Béatrice ait un enfant daltonien ?
On admettra que le daltonisme ou non d'une personne n'influence pas préférentiellement le don d'un chromosome X ou Y.

Fiche 4

Probabilités Conditionnelles - Indépendance de deux événements

Définition 2
On dit que A et B sont indépendants lorsque :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque
Attention à ne pas confondre « indépendants » et « incompatibles » qui est synonyme de disjoints c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$ et non pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple
Dans la population, il y a :

- 71% de porteurs de lunettes parmi lesquels 37% ont 55 ans ou plus ;
- 63% de personnes de moins de 55 ans.

On tire au sort une personne dans la population et on considère les deux évènements :

- A : « la personne a 55 ans ou plus » ;
- L : « la personne porte des lunettes ».

Les évènements A et L sont-ils indépendants ?

On détermine puis on compare $P(A) \times P(L)$ et $P(A \cap L)$.
D'après l'énoncé, $P(L) = 0{,}71$.
De plus, $P(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$,
donc : $P(A) \times P(L) = 0{,}37 \times 0{,}71 = 0{,}2627$.

D'autre part,
d'après l'énoncé, $P_L(A) = 0{,}37$, donc :
$$\begin{aligned} P(A \cap L) &= P(L) \times P_L(A) \\ &= 0{,}71 \times 0{,}37 \\ &= 0{,}2627. \end{aligned}$$

Comme $P(A) \times P(L) = P(A \cap L)$, on en déduit que A et L sont indépendants.

Propriété 4
Si $P(A) \neq 0$ (ou $P(B) \neq 0$) alors :
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$).

Démonstration :
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$,
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
si et seulement si $P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B$
si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. □

Remarques

1. Cette formulation rend plus naturelle la définition : il paraît normal de considérer comme « indépendants », au sens intuitif du terme, deux événements A et B dès lors que la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A. En effet, $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B, autrement dit, que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B.
2. Dans l'exemple précédent, on aurait donc pu conclure directement puisque $P(A) = P_L(A)$.

Propriété 5
Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration :
Soit A et B deux évènements indépendants.
Montrons que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$
D'où :
$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$.
De plus, comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap B\right) &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ &= P\left(\overline{A}\right) \times P(B). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Exemple
Dans l'exemple précédent, les événements A : « la personne a 55 ans ou plus » et $\overline{L}$: « la personne ne porte pas de lunettes » sont donc également indépendants.

Remarque
Plus généralement, si A et B sont indépendants alors :

- $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercices

Exercice 28. On considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}085$. Calculer $P(B)$.

Exercice 29. On considère deux évènements indépendants E et F tels que $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}53$ et $P(E \cap F) = 0{,}25$. Calculer $P(E)$.

Exercice 30. On considère deux évènements indépendants C et D tels que $P(C \cup D) = 0{,}23$ et $P(C) = 0{,}11$. Calculer $P(D)$.

Exercice 31 - Indépendants et incompatibles ?.
Deux évènements disjoints de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 32 - Couleurs aléatoires.
On considère l'algorithme suivant où la commande $entalea(n;p)$ donne un entier aléatoire entre n et p :

```
a prend la valeur entalea(1;3)
if a = 1 then
    b prend la valeur entalea(1;3)
    if b = 1 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
if a = 2 then
    b prend la valeur entalea(1;4)
    if b = 1 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
if a = 3 then
    b prend la valeur entalea(1;24)
    if b <= 7 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
```

Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

1. « a = 3 » et « l'algorithme affiche rouge ».
2. « a = 3 » et « l'algorithme affiche orange ».
3. « a = 1 » et « l'algorithme affiche rouge ».

Exercice 33. Dans un magasin de meubles, il y a 55% de canapés dont 14% en cuir, 30% de fauteuils dont 20% en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42% en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble.
On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

Exercice 34. Lily a dans sa poche deux pièces de 20 centimes, trois de 50 centimes et une de 1 euro. Elle tire successivement (sans remise) deux pièces de sa poche. Les évènements « les deux pièces sont du même montant » et « les deux pièces lui permettent d'acheter un croissant à 1 euro » sont-ils indépendants ?

Exercice 35. Aujourd'hui Nathalie a décidé d'aller donner son sang. Ben hésite alors : « Je vais peut-être en profiter pour aller faire du vélo le long des bords de Seine ». On considère que la probabilité qu'il aille faire du vélo est 0,85.
Nathalie ayant un petit volume sanguin, il est possible qu'on ne l'autorise pas à donner son sang (elle est « refusée » une fois sur cinq) auquel cas, si Ben est parti faire du vélo, il ne sera pas là quand elle rentrera. Dans tous les autres cas, il sera là quand elle rentrera.
En admettant, que les évènements « Nathalie n'est pas autorisée à donner son sang » et « Ben choisit d'aller faire du vélo » soient indépendants, quelle est la probabilité que Ben soit là quand Nathalie rentrera ?

Exercice 36. Dans la chorale d'un lycée, il y 7 élèves de Seconde, 9 élèves de Première et n élèves de Terminale.
De plus, parmi les élèves de Seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de Première et 6 parmi les élèves de Terminale.
On tire au sort un élève de la chorale.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les évènements « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille » sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que peut-on dire de l'indépendance éventuelle des évènements :
   (a) « l'élève est en Terminale » et « l'élève est un garçon » ?
   (b) « l'élève est en Première » et « l'élève est une fille » ?

Fiche 5

Probabilités Conditionnelles - Problèmes

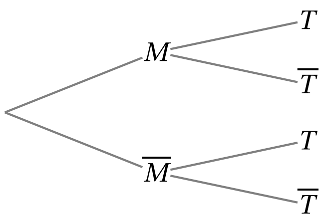
I. Sujets épreuves communes

Exercice 37. Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième. On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1% de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97% des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas. Pour une personne à qui ont fait passer le test de dépistage on associe les événements :

— M : la personne est malade,

— T : le test est positif.

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



2. Justifier que $P(\overline{M} \cap T) = 0,0198$.

3. Montrer que $P(T) = 0,0295$.

4. Calculer $P_T(M)$.

5. Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie ?

Exercice 38. Un cafetier propose à ses clients des cookies au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.On note :

— C l'événement « le cookie est au chocolat »,

— N l'événement « le cookie est aux noisettes »,

— B_1 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 1 »,

— B_2 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 2 »,

— B_3 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 3 »,

On suppose que :

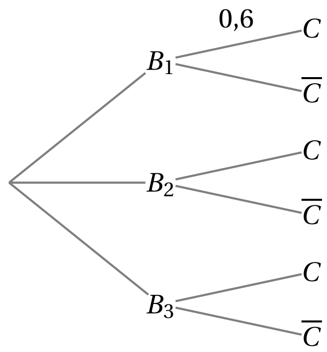
— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est de $0,49$;

— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est de $0,36$;

— $P_{B_2}(C) = 0,4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2 ;

— la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la troisième boulangerie est de $0,3$.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre $0,6$ sur la branche de B_1 à C.



1. Exprimer par une phrase l'information donnée par le nombre $0,6$ sur la branche de B_1 à C.
2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessus.
3. Définir par une phrase l'événement $B_1 \cap C$ et calculer sa probabilité.
4. Montrer la probabilité $P(C)$ d'avoir un cookie au chocolat est égale à $0,543$.
5. Calculer la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 39. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant : Chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer. À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

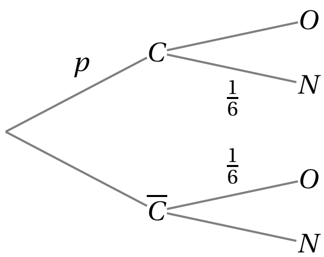
— « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

— N : l'événement l'adolescent a répondu « non » ;
— O : l'événement l'adolescent a répondu « oui » ;
— C : l'événement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis ;
— $\overline{C}$: l'événement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $p(O) = \frac{3}{5}$.On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis. On a donc $p(C) = p$.

1. Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.
2. On a ci-dessous l'arbre de probabilités représentant la situation. Compléter cet arbre .



3. (a) Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation : $\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}$.
   (b) En déduire la valeur de p.
4. Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?

II. Sujets d'approfondissements

Exercice 40. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement cinq boules rouges, trois vertes et une rouge, quatre vertes. On choisit une urne au hasard, puis on prélève au hasard une boule dans cette urne. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 41. La loi de Hardy-Weinberg (1908)

.
Lorsqu'un gène peut prendre deux formes A et a, un individu peut avoir l'un des trois génotypes : AA, Aa ou aa. On considère une population (génération 0) dans laquelle les proportions respectives de ces trois génotypes sont p_0, q_0 et r_0. On admet que les couples se forment au hasard quant aux génotypes considérés (appariement aléatoire).

1. Exprimer, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait le génotype AA, puis celles notées q_1 et r_1, qu'il ait le génotype Aa ou aa.
2. Montrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment seulement à l'aide de $\alpha = p_0 - r_0$. En déduire que p_2, q_2 et r_2 (ces mêmes proportions à la génération 2) et conclure.

Exercice 42. Évaluations des méthodes de diagnostiques

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif, appelée sensibilité du test, notée Se.

— la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif, appelée spécificité du test, notée Spe.

On appelle prévalence de la maladie la proportion de malades dans la population à laquelle est appliquée le test. On note p cette prévalence.

1. Indiquer la sensibilité, la spécificité et la prévalence du test de l'exercice 37. Dans le cas général, exprimer en fonction de p, Se et Spe la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif. Cette probabilité est appelée valeur prédictive positive. Elle est notée VPP.
2. La VPP est elle une fonction croissante ou décroissante de p ?
3. Exprimer en fonction de p, Se et Spe la probabilité qu'un individu soit sain sachant qu'il a un test négatif.Cette probabilité est appelée valeur prédictive négative. Elle est notée VPN.
4. La VPN est elle une fonction décroissante ou croissante de p ?
5. Exprimer $VPP/(1-VPP)$ en fonction de $p/(1-p)$.
6. Exprimer $(1-VPN)/(VPN)$ en fonction de $p/(1-p)$.
7. Un test diagnostique T_3 est composé de deux tests diagnostiques successifs T_1 et T_2. On suppose que les deux tests sont indépendants. **On considère le test T_3 comme positif si l'individu est testé positif aux deux tests.**
   (a) Exprimer la sensibilité du test 3 en fonction des sensibilités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins sensible que ces deux tests ?
   (b) Exprimer la spécificité du test 3 en fonction des spécificités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins spécifique que ces deux tests ?
8. Un test diagnostique T_4 est composé de deux tests diagnostiques successifs T_1 et T_2. On suppose que les deux tests sont indépendants. **On considère le test T_4 comme positif si l'individu est testé positif à au moins l'un des tests.**
   (a) Exprimer la sensibilité du test 4 en fonction des sensibilités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins sensible que ces deux tests ?
   (b) Exprimer la spécificité du test 4 en fonction des spécificités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins spécifique que ces deux tests ?