Chapitre 10

Fiche 1

Sens de variation d'une suite
Définition et étude du sens de variation

I. Sens de variation d'une suite

Définition 17
Soit (u_n) une suite. On dit que :
- (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$;
- (u_n) est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang ;
- (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarques
1. Une suite est dite strictement croissante (ou strictement décroissante) si l'ordre est strict dans la définition précédente,
2. Une suite est dite croissante (ou décroissante) à partir d'un rang si les inégalités précédentes sont vraies à partir d'un rang n_0.
3. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (-1)^n$, n'est ni croissante, ni décroissante.
4. si une suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) alors la suite $(-u_n)$ est décroissante (resp. croissante).

II. Différentes méthodes d'étude des variations

II.1. Méthode 1 : étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

- Pour démontrer qu'une suite est croissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
- Pour démontrer qu'une suite est décroissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est négatif.
- On peut retenir que l'étude du sens de variation d'une suite numérique revient à l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour un n quelconque.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :**
   $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 5\ ;\ n \geqslant 0 \end{cases}$
   Soit n un entier naturel quelconque, $u_{n+1} - u_n = 5$.
   Ce dernier nombre est positif.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   On peut remarquer que cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'étude des variations d'une suite arithmétique.

2. **Étudier le sens de variation de la suite définie par :**
   $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1\ ;\ n \geqslant 0 \end{cases}$
   Soit n un entier naturel quelconque, $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1$.
   Or $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ et ce dernier nombre étant le carré d'un nombre réel, il est positif.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
   La suite (u_n) est donc croissante.

II.2. Méthode 2 : comparaison à 1 du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Pour démontrer qu'une suite de **termes strictement positifs** est croissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1.
- Pour démontrer qu'une suite de **termes strictement positifs** est décroissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à 1.
- On peut retenir que l'étude du sens de variation d'une suite numérique de termes strictement positifs revient à la comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, pour un n quelconque.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $u_n = (n+1) \times 3^n$ pour tout entier naturel n.**
   Soit n un entier naturel quelconque, le nombre $(n+1) \times 3^n$ est strictement positif.
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+2) \times 3^{n+1}}{(n+1) \times 3^n} = \dfrac{(n+2) \times 3}{(n+1)}$.
   Or $n+2 > n+1 > 0$ et donc $\dfrac{(n+2)}{(n+1)} > 1$, par conséquent $\dfrac{(n+2) \times 3}{(n+1)} > 3$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1.
   La suite (u_n) est donc croissante.

2. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $u_n = -5 \times 3^n$ pour tout entier naturel n.**
   Soit n un entier naturel quelconque, le nombre -5×3^n est strictement négatif. Étudions donc le sens de variation de $(-u_n)$ dont les termes sont strictement positifs.
   $\dfrac{-u_{n+1}}{-u_n} = \dfrac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{-u_{n+1}}{-u_n}$ est supérieur à 1.

La suite $(-u_n)$ est donc croissante et par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

On peut remarquer que cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'étude des variations d'une suite géométrique de raison positive.

II.3. Méthode 3 : suite définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f

- Pour démontrer qu'une suite, définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, est croissante, il suffit de prouver que, cette fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Pour démontrer qu'une suite, définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, est décroissante, il suffit de prouver que, cette fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- On peut retenir que pour déterminer le sens de variation d'une suite numérique définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, il suffit de connaître le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
- **Attention**, cette technique ne s'applique pas au cas où la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Le sens de variation de f n'est pas nécessairement celui de la suite. Voir l'exemple 2 ci-dessous.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $u_n = n^2 + 4n + 5$ pour tout entier naturel n.**
   Soit n un entier naturel quelconque, la suite est définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
   Or cette fonction f est une fonction polynôme du second degré dont le sens de variation est obtenu grâce à la technique étudiée en seconde.
   On sait, en effet, que l'abscisse du sommet est -2, le coefficient du terme de degré 2 est positif, donc la fonction f est croissante sur $[-2\,;\,+\infty[$ et par conséquent sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

2. **Conjecturer le sens de variation de la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n et celui de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ pour tout entier naturel n.**
   On remarque que le calcul des premiers termes des deux suites donne :

n	u_n	v_n
0	10	0
1	3,3166247904	1
2	2,0776488612	1,4142135624
3	1,7543229068	1,553773974
4	1,6596152888	1,5980531825

   Les suites sont définies par une relation de récurrence utilisant la même fonction croissante et pourtant ces deux suites n'ont pas le même sens de variation que cette fonction.

Exercices

Exercice 317. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 3n$;

b) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -3u_n + 4$;

c) $u_n = 2 \times 5^{n-1}$.

Exercice 318. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3n + 5$;

b) $u_n = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;

c) $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Exercice 319. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

b) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$;

c) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;

d) $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n + 8n^2 - 42n + 55$.

Exercice 320. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = 3n - 7$;

b) $u_n = -7 \times 3^n$;

c) $u_n = (-0,37)^n$.

Exercice 321. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = -\dfrac{1}{2}n + 5$;

b) $u_n = -\dfrac{1}{2} \times 5^n$;

c) $u_n = -5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Exercice 322. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{4^{n-1}}{3}$;

b) $u_n = \dfrac{4n-1}{3}$;

c) $u_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$.

Exercice 323. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{11}{10^n}$;

b) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{11}{10}$;

c) $u_0 = 1$ et $u_n - u_{n+1} = \dfrac{11}{10}$.

Exercice 324. Étudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n) à partir de celui d'une fonction.

a) $u_n = -n^2 - 3n + 9$;

b) $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$;

c) $u_n = n^3 - n$.

Exercice 325. Étudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n) à partir de celui d'une fonction.

a) $u_n = 9n^2 - 9n + 2$;

b) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$;

c) $u_n = (3n - 11)^4$.

Fiche 2

Sens de variation d'une suite
Approche de la notion de limite

I. Limite infinie - exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 6$. La suite (u_n) est arithmétique ; elle a pour raison 3 qui est un nombre strictement positif, donc la suite (u_n) est croissante.

On peut alors se poser alors la question suivante :

Quel que soit le nombre réel A, aussi grand soit-il, existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A ? Autrement dit, existe-t-il un entier n_0 à partir duquel tous les nombres u_n sont supérieurs à A ?

Examinons le cas $A = 1000$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant A &\iff 3n + 6 \geqslant 1000 \\ &\iff n \geqslant \frac{994}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{994}{3} \approx 331,3$ tronqué au dixième.
Donc, à partir du rang 332, tous les termes de la suite sont supérieurs à 1000.

On montrerait de même que pour tout réel A , il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, u_n est supérieur à A.

Définition 18
Si quel que soit le réel positif A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) quand n tend vers $+\infty$.
On note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ou $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque
Une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement monotone croissante.
Exemple : la suite de terme général $n + (-1)^n$ n'est pas monotone mais a pour limite $+\infty$.

II. Limite nulle - exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n strictement positif par $u_n = \dfrac{3}{n}$.
Pour tout entier n strictement positif, on a $u_n = f(n)$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x}$ qui est décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$; par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

En observant les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que les termes u_n « se rapprochent de plus en plus de 0 Lorsque n devient grand ». On peut alors se poser alors la question suivante :

Quel que soit le nombre a positif, aussi proche de 0 soit-il, existe-t-il rang à partir duquel tous les termes de la suite vérifient $0 < u_n \leqslant a$? Autrement dit, existe-t-il un entier n_0 à partir duquel tous les nombres u_n vérifient $0 < u_n \leqslant a$?

Examinons le cas $a = 0{,}001$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leqslant a &\iff 0 < \frac{3}{n} \leqslant 0{,}001 \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{0{,}001} \\ &\iff n \geqslant 3000 \end{aligned}$$

Ainsi, à partir du rang 3000, l'écart entre le nombre u_n et 0 est inférieur à $0{,}001$.

On montrerait de même que pour tout réel a strictement positif, il existe un rang n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, on a $0 < u_n \leqslant a$.

Définition 19
Si quel que soit le réel strictement positif ε choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement compris entre $-\varepsilon$ et ε on dit que la suite (u_n) a pour limite 0 (ou converge vers 0) quand n tend vers $+\infty$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $u_n \longrightarrow 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque
Une suite qui a pour limite 0 n'est pas nécessairement monotone.
Exemple : la suite de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais a pour limite 0.

III. Suite n'admettant pas de limite

Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (-1)^n$.
On a : $u_0 = 1\,;\, u_1 = -1\,;\, u_2 = 1\,;\, u_3 = -1\,;\, u_4 = 1\,;\ldots$

- Tous les termes sont inférieurs à 2. Par conséquent, la suite n'a pas pour limite $+\infty$.
- Tous les termes sont supérieurs à -2, par conséquent, la suite n'a pas pour limite $-\infty$.
- Il n'existe aucun nombre dont « se rapprochent » les termes de la suite.

On dit que la suite (u_n) diverge et n'admet pas de limite.

Exercices

Exercice 326. À l'aide de la calculatrice, afficher le tableau de valeurs des suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n^3$.

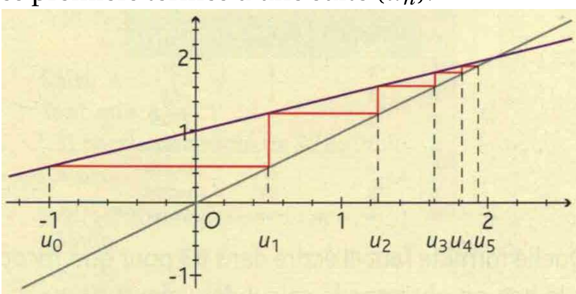
1. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Quelle semble être la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 327. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = 1{,}3^n$. On a calculé les premiers termes de la suite dans une page de tableur :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	1
3	1	0,5	1,3
4	2	0,25	1,69
5	3	0,125	2,197
6	4	0,0625	2,8561

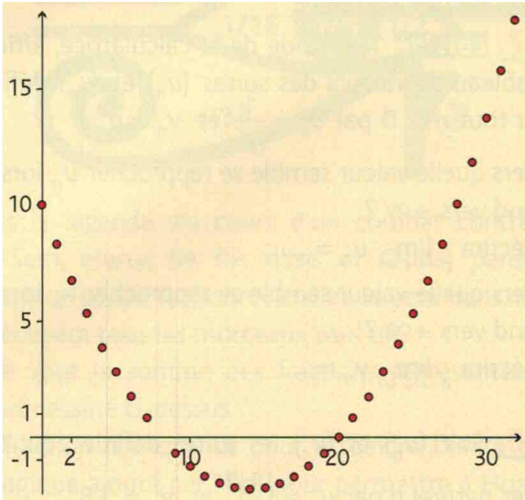
1. Quelle formule faut-il écrire en B2 pour que, recopiée vers le bas, on obtienne le calcul des valeurs des termes de la suite (u_n) ?
2. Même question avec les valeurs des termes de la suite (v_n) pour la cellule C2.
3. Afficher les valeurs des termes des deux suites jusqu'à $n = 50$.
4. Quelle semblent être les valeurs de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Exercice 328. On a représenté graphiquement les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 329. On a représenté graphiquement les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 330.

1. À l'aide d'une calculatrice, afficher le tableau de valeurs des suites (u_n) et (v_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Toujours à l'aide de la calculatrice, afficher la représentation graphique des suites pou n compris entre 0 et 100 en choisissant, à l'aide du tableau de valeurs, une fenêtre adaptée.
2. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Quelle semble être la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 331. Soit (u_n) et (v_n) les suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n - 5 \end{cases}.$$

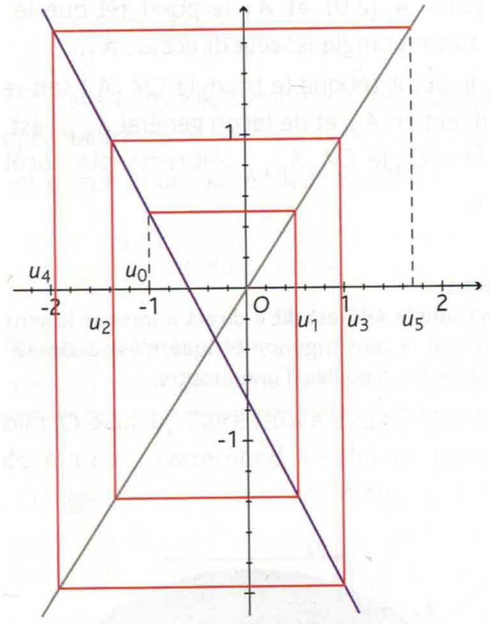
On a calculé les premiers termes de chacune des suites dans une page de tableur :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	3	2
3	1	1	-3,5
4	2	-3	-7,625
5	3	-11	-10,71875
6	4	-27	-13,039063
7	5	-59	-14,779297

1. Quelle formule faut-il écrire en B3 pour que, recopiée vers le bas, on obtienne le calcul des valeurs des termes de la suite u_n ?
2. Même question avec les termes de la suite (v_n) pour la cellule C3.

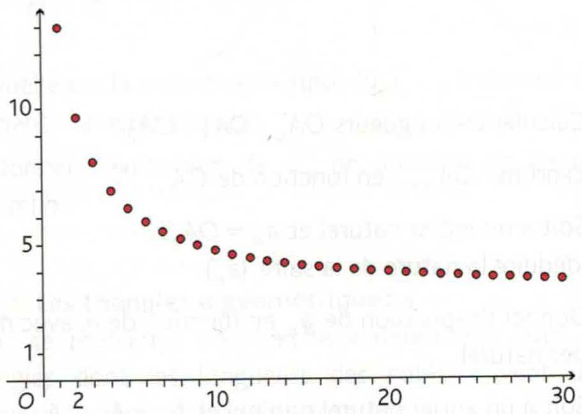
3. Afficher les valeurs des termes des deux suites jusqu'à $n = 50$.
4. Quelle semblent être les valeurs de $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$?

Exercice 332. On a construit sur le graphique suivant les premiers termes d'une suite (u_n).



D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 333. On a représenté sur le graphique suivant les premiers termes d'une suite (u_n).



D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 334.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 4. Conjecturer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 4. Conjecturer la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 335. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) lorsque $r > 0$.
2. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) lorsque $r < 0$.

Exercice 336. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{n}\,;\ v_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } w_n = \frac{2}{n^2} \text{ pour } n > 0.$$

1. À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.
2. Conjecturer alors la limite en $+\infty$ des suites définies pour $n > 0$ par :
$$r_n = 3 + \frac{1}{n}\,;\ s_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 337. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = n\,;\ v_n = n^2 \text{ et } w_n = (-n)^3 \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.
2. Conjecturer alors la limite en $+\infty$ des suites définies pour $n > 0$ par :
$$r_n = -n^2\,;\ s_n = (-n)^3 - 100 \text{ et } t_n = n^2 + n.$$

Exercice 338. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = (-1)^n\,;\ v_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } w_n = 3 + (-1)^n.$$

À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.