# Chapitre 11

## Fiche 1

# La fonction exponentielle
# Définition et premières propriétés

## I. Définition de la fonction exponentielle

**Théorème 3**
Il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

**Démonstration :** Admise $\square$

**Définition 20**
La fonction **exponentielle** est la fonction notée exp définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

## II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

**Théorème 4 (Relation fonctionnelle)**
Pour tous réels $x$ et $y$ : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

**Démonstration :** Admise $\square$

**Propriété 27**
Pour tous réels $x$ et $y$ et pour tout entier relatif $n$ :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$

**Démonstration :** Admise $\square$

**Exemple (Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques)**
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(3) \times \exp(5)$

b) $\dfrac{\exp(-2)}{\exp(4)}$

c) $\exp(x) \times \exp(-x)$

d) $\left(\exp(3x)\right)^2$

**Correction :**

a) $\exp(3) \times \exp(5) = \exp(3+5) = \exp(8)$

b) $\dfrac{\exp(-2)}{\exp(4)} = \exp(-2-4) = \exp(-6)$

c) $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

d) $\left(\exp(3x)\right)^2 = \exp(2 \times 3x) = \exp(6x)$

# III. Étude de la fonction exponentielle

## III.1. Signe et variations

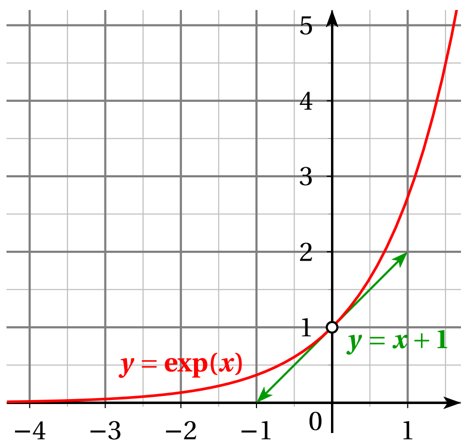
**Propriété 28**
Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est :

- strictement positive
- strictement croissante

**Démonstration :** Admise □

## III.2. Tableau de variation et courbe représentative

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| exp | $0$ ↗ | $+\infty$ |




**Remarques**

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est **asymptote** à la courbe représentative en $-\infty$.
- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

**Exemple (étudier les variations d'une fonction comportant $\exp(x)$)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times \exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée
2. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ n' a pas de solution dans $\mathbb{R}$

**Correction :**

1. $f$ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x$ un réel, $f'(x) = 1 \times \exp(x) + x \times \exp'(x) = 1 \times \exp(x) + x \times \exp(x)$
   Donc, après factorisation par $\exp(x)$ :
   $f'(x) = \exp(x) \times (1 + x)$

2. Pour étudier le sens de variation de $f$, il suffit d'étudier le signe de $f'$ sur $\mathbb{R}$.
   Or quel que soit le réel $x$, le nombre $\exp(x)$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x+1$.
   Ainsi, $f'$ est négative sur $]-\infty;-1]$ donc $f$ est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et $f'$ est positive sur $[-1;+\infty[$ donc $f$ est croissante sur $[-1;+\infty[$.
   On peut résumer l'étude par le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $-\exp(-1)$ | $\nearrow$ | |

3. D'après l'étude précédente, la fonction $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est atteint lorsque $x$ prend la valeur $-1$. Or ce minimum est $-\exp(-1)$ et la calculatrice donne comme valeur arrondie au centième de ce nombre $-0,37$ ; on peut donc conclure que, pour tout $x$ réel , $f(x) > -1$ et par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ n' a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

# Exercices

## Calculs algébriques

**Exercice 339.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(3) \times \exp(4)$

b) $\exp(4) \times \exp(-4)$

**Exercice 340.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(\exp(5) - \exp(4)\right)^2 - \left(\exp(5) + \exp(4)\right)^2$

b) $\left(\exp(2) + \exp(-2)\right)\left(\exp(2) - \exp(-2)\right)$

c) $\left(\exp(3)\right)^2$

d) $\left(\dfrac{\exp(3)}{\exp(4)}\right)^2$

**Exercice 341.** Soit $x$ un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(x) \times \exp(-x+1)$

b) $\exp(1) \times \exp(-x)$

c) $\dfrac{\exp(-1)\exp(-2)}{(\exp(2))^{-2}\exp(-x)}$

**Exercice 342.** Soit $x$ un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)^2 - \left(\exp(x) - \exp(-x)\right)^2$

b) $\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)^2 - \exp(-x)\left(\exp(3x) - \exp(-x)\right)$

## Étude de fonctions

**Exercice 343.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 344.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{\exp(x)}$.

1. Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 345.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$.

1. Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 346.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

# Fiche 2

# La fonction exponentielle
# Notation exponentielle

## Une nouvelle notation

**Définition 21**
L'image de 1 par la fonction exp est notée e. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

**Remarques**

- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme $\pi$, c'est un nombre irrationnel et transcendant. Son arrondi à $10^{-9}$ est : $\mathrm{e} \approx 2,718\,281\,828$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = \left(\exp(1)\right)^n = \mathrm{e}^n$.
  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel $x$ : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$.

On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.
La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathrm{e}^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

**Propriété 29**
Pour tous réels $x$ et $y$ et pour tout entier relatif $n$ :

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

**Exemples**

1. **Calculer avec la notation exponentielle**
   Simplifier les expressions suivantes :

   a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^2$ b) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-2}}{\left(\mathrm{e}^2\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{-x}}$

   **Correction :**

   a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{3-4+2} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

   b) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\times 3x} = \mathrm{e}^{6x}$

   c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-2}}{\left(\mathrm{e}^2\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1-2}}{\mathrm{e}^{-2\times 2-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-4-x}} = \mathrm{e}^{-3+4+x} = \mathrm{e}^{1+x}$

2. **Transformer des expressions**
   Montrer que, pour tout réel $x$ :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$$

**Correction :** Soit $x$ un réel,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

On a donc établi la première égalité.
D'autre part,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^0 - e^{-2x}}{e^0 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$$

# Exercices

## Calculs algébriques avec notation $e^x$

**Exercice 347.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$

b) $\left(e^4\right)^3 e^4$

c) $\left(e^3\right)^{-2} e^5$

d) $\dfrac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$

**Exercice 348.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^{-x})^2$

b) $\sqrt{(e^2+1)^2 - (e^2-1)^2}$

c) $ee^{2x+1}$

d) $e^{3-2x}e^{x+5}$

e) $\left(e^{5x}\right)^2$

f) $e^{9x} - 2\left(e^{3x}\right)^3$

**Exercice 349.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$

b) $e^x(e^x + e^{-x})$

c) $(e^x)^5\left(e^{-2x}\right)^2$

d) $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$

e) $\sqrt{e^{-2x}}$

f) $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

**Exercice 350.** Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = (e^x - e^{-x})\left(e^{2x} + e^x + 1\right)$

b) $B = \left(e^{3x}\right)^2 + \left(e^{-3x}\right)^2 - \left(e^{3x} - e^{-3x}\right)^2$

c) $C = \left(e^{3x}\right)^2 - e^{2x}\left(e^{2x} + e^{-2}\right)^2$

**Exercice 351.** Factoriser les expressions suivantes :

a) $xe^x - e^x$

b) $(x+3)e^{-2x} - 2e^{-2x}$

c) $e^{3x} - e^{2x}$

d) $e^{2x} + 2e^x + 1$

e) $e^{2x} - 4x^2$

f) $e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

**Exercice 352.** Démontrer que pour tout réel $x$, on a :

a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

b) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = e^{2x} + 1$

c) $\dfrac{e^x}{1 + e^x} = \dfrac{1}{e^{-x} + 1}$

d) $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

e) $\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x} + 3} = \dfrac{4}{1 + 3e^{-2x}}$

f) $1 - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

# Fiche 3

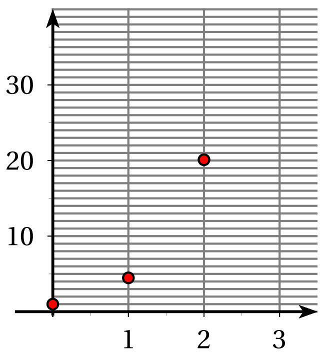
# La fonction exponentielle
# Lien avec les suites géométriques

## I. Lien avec les suites géométriques

**Propriété 30**
Soit $a$ un réel, la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \mathrm{e}^{na}$, pour tout $n$ entier naturel, est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^a$.

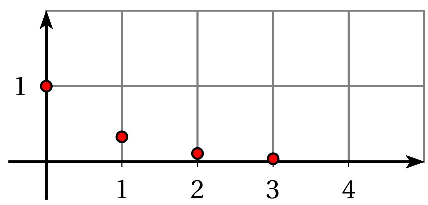
**Démonstration :** Soit $a$ un nombre réel.
Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n$ entier naturel par $u_n = \mathrm{e}^{na}$.
Alors, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a = u_n \times \mathrm{e}^a$.
Ainsi, par définition, la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^a$.
De plus, $u_0 = \mathrm{e}^{0\times a} = \mathrm{e}^0 = 1$.
Donc, pour tout entier naturel $n$, on a :
$u_n = 1 \times (\mathrm{e}^a)^n$. □

**Exemples**
- La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{1,5\times n}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{1,5}$.




**On parle de croissance exponentielle.**

- La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{-1,1\times n}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1,1}$.




**On parle de décroissance exponentielle.**

**Remarque**
Réciproquement, on admet que pour tout réel $q$ avec $q > 0$, il existe un unique réel, $a$ tel que $\mathrm{e}^a = q$. Dès lors $q^n = \mathrm{e}^{na}$. Ainsi, le terme général de toute suite géométrique de raison strictement positive peut s'écrire à l'aide de la fonction exponentielle.

**Exemples**

1. **Exponentielle et suite**

   (a) Déterminer la nature, la raison et le premier terme de la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{-6n}$.

   (b) Déterminer la nature, la raison et le premier terme de la suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{6n+1}$.

   **Correction :**

   (a) La suite est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-6}$ et de premier terme 1.

   (b) Pour $n$ entier naturel. $u_n = \mathrm{e}^{6n} \times \mathrm{e}^1$, la suite est géométrique de raison $\mathrm{e}^6$ et de premier terme $\mathrm{e}^1$.

2. **Exponentielle et somme des termes**
   Soit $n$ un entier naturel non nul, déterminer la somme $S$ en fonction de $n$ lorsque $S$ est définie par : $S = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \ldots + \mathrm{e}^n$.
   **Correction :**
   $S$ est la somme des $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e et de premier terme 1, donc
   $$S = \frac{1-\mathrm{e}^{n+1}}{1-\mathrm{e}}$$
   .

3. **Identifier une suite géométrique**
   Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = 10 \times \mathrm{e}^{3n}$.

   (a) Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) On donne $\mathrm{e}^3 \approx 20$. Justifier que la suite $(u_n)$ est croissante puis déterminer mentalement à partir de quel rang on a $u_n > 10^6$.

   **Correction :**

   (a) Soit $n$ un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} = 10 \times \mathrm{e}^{3(n+1)} = 10 \times \mathrm{e}^{3n+3} = 10 \times \mathrm{e}^{3n} \times \mathrm{e}^3 = u_n \times \mathrm{e}^3$.
   Ainsi, par définition, la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^3$.
   Son premier terme est $u_0$ avec $u_0 = 10 \times \mathrm{e}^{3\times 0} = 10$.

   (b) Pour tout entier naturel $n$, on a :
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times \left(\mathrm{e}^3\right)^{n+1} - 10 \times \left(\mathrm{e}^3\right)^n = 10 \times \left(\mathrm{e}^3\right)^n (\mathrm{e}^3 - 1) \approx 10 \times \left(\mathrm{e}^3\right)^n \times 19$.
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)$ est croissante.
   De plus :
   $u_1 \approx 10 \times 20 \approx 200$
   $u_2 \approx u_1 \times 20 \approx 4000$
   $u_3 \approx u_2 \times 20 \approx 80000$
   $u_4 \approx u_3 \times 20 \approx 16000000$
   Et $16000000 > 10^6$, donc $u_n$ dépasse le million dès le rang 4.

# Exercices

## Exponentielle et suites

**Exercice 353.** Donner la nature et la raison des suites ci-dessous.

1. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^n$.
2. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{-6n}$.
3. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{3n}$.
4. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^2 n$.

**Exercice 354.** Déterminer le sens de variation des suites de l'exercice précédent.

**Exercice 355.** Étudier le sens de variations des suites suivantes.

1. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{5n}$.
2. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
3. $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{0,5} u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**Exercice 356.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^n$$

1. Démontrer que $S_n$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer $S_n$ en fonction de $n$.
3. Pour quelle valeur de $n$ la somme $S_n$ va-t-elle dépasser un milliard ?

**Exercice 357.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression des sommes suivantes en fonction de $n$ :

1. $S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k} = 1 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^6 + \cdots + \mathrm{e}^{2n}$
2. $S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{0,5k} = 1 + \mathrm{e}^{0,5} + \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{1,5} + \cdots + \mathrm{e}^{0,5n}$

**Exercice 358.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une valeur approchée à $10^{-2}$ près des sommes suivantes :

1. $S = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{e}^k = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^5$
2. $S = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{e}^{0,01k} = 1 + \mathrm{e}^{0,01} + \mathrm{e}^{0,02} + \cdots + \mathrm{e}^{0,1}$

# Fiche 4

# La fonction exponentielle
# Équations et Inéquations

## I. Équations et inéquations

**Propriété 31**
Pour tous réels $x$ et $y$ :
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

**Démonstration :** Admise □

**Remarque**
On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

**Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation**

- Pour résoudre une équation faisant intervenir une fonction exponentielle, on peut transformer l'équation en une égalité entre deux images de la fonction exponentielle.
- La propriété $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ permet de se « débarrasser » de l'exponentielle et ainsi de se ramener à une équation que l'on peut résoudre.
- La propriété $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ permet de résoudre des inéquations de manière analogue.

**Exemples**
1. **Résoudre une équation ou une inéquation**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
(a) $e^{x+1} = 1$
(b) $2e^{-2x+1} - 2e = 0$
(c) $e^x < 1$
(d) $-2e^{x+2} \geqslant -2e^{-5}$
(e) $-3e^{2x+8} + 3e \leqslant 0$
(f) $e^{x+3} < 0$

**Correction :**
(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+1} = 1 \iff e^{x+1} = e^0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$
L'équation a une unique solution : $-1$
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $2e^{-2x+1} - 2e = 0 \iff 2e^{-2x+1} = 2e^1 \iff -2x+1 = 1 \iff x = 0$
L'équation a une unique solution : 0.
(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,0[$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-2e^{x+2} \geqslant -2e^{-5} \iff x+2 \leqslant -5 \iff x \leqslant -7$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,-7]$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-3e^{2x+8} + 3e \leqslant 0 \iff -3e^{2x+8} \leqslant -3e^{1} \iff 2x+8 \geqslant 1 \iff x \geqslant -\dfrac{7}{2}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[-\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$.

(f) Pour tout réel $x$, $e^{x} > 0$, donc l'inéquation n'a aucune solution.

2. **Étudier le signe d'une expression**
Soit $x$ un réel.
   (a) Étudier le signe de $-3e^{x+1}$.
   (b) i. Résoudre $e^{2x-5} - 1 > 0$ et $e^{2x-5} - 1 = 0$.
   ii. En déduire le signe de $e^{2x-5} - 1$.
   (c) Étudier de même le signe de $e^{-x} - e$.

**Correction :**

(a) Quel que soit le réel $x$, $e^{x+1}$ est strictement positif donc $-3e^{x+1}$ est strictement négatif.

(b) i. Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-5} - 1 > 0 \iff e^{2x-5} > e^{0} \iff 2x-5 > 0 \iff x > -\dfrac{5}{2}$.
De même, $e^{2x-5} - 1 = 0 \iff e^{2x-5} = e^{0} \iff x = -\dfrac{5}{2}$.
ii. On en déduit le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $e^{2x-5} - 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - e > 0 \iff e^{-x} > e^{1} \iff -x > 1 \iff x < -1$
De même, $e^{-x} - e = 0 \iff x = -1$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $e^{-x} - e$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

# Exercices

## Équations - Inéquations

**Exercice 359.** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

a) $\exp(x) = \mathrm{e}$
b) $\exp(-x) = 1$
c) $\exp(2x-1) = \mathrm{e}$
d) $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$
e) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$
f) $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$
g) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 0$
h) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$
i) $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$
j) $x\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$

**Exercice 360.** Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

a) $\exp(x) < \mathrm{e}$
b) $\exp(-x) \geqslant 1$
c) $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^x$
d) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} < 2$
e) $\mathrm{e}^x < 1$
f) $\mathrm{e}^{-x} > 0$
g) $\mathrm{e}^{-x} > 1$
h) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$
i) $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$
j) $x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} < 0$

**Exercice 361.**

1. Déterminer les racines du polynôme :
$$P(X) = X^2 + 4X - 5.$$
2. En déduire les solutions de l'équation :
$$\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x = 5.$$
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$
   (b) $\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^{x+1} - 2\mathrm{e} = 0$
   (c) $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$

**Exercice 362.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 1} > 0$
b) $-\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 2 > 0$
c) $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0$
d) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 < 0$

**Exercice 363.** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\mathrm{e}^{x^2+2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}}$
b) $2\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x + 3 = 0$
c) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > \sqrt{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
d) $\mathrm{e}^{x^2} + 1 \leqslant 2$

# Fiche 5

# La fonction exponentielle
# Exponentielle d'une fonction affine

## I. Fonctions $x \mapsto e^{ax+b}$

**Propriété 32**
Si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$ où $u$ est une fonction affine de la forme $u(x) = ax + b$, alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = a \times f(x)$.

**Démonstration :** Admise □

**Exemples**

1. La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2x+1}$ est la fonction $x \mapsto 2 \times e^{2x+1}$.
2. La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-8x+2}$ est la fonction $x \mapsto -8 \times e^{-8x+2}$.

## II. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

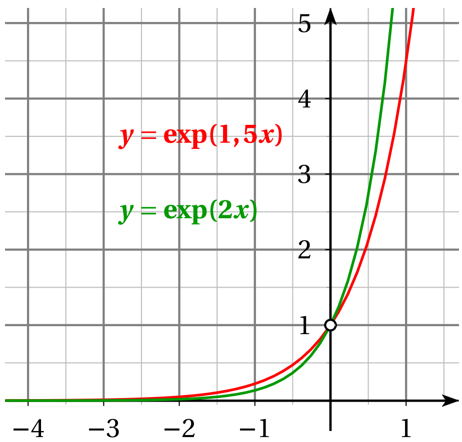
**Propriété 33**
Quel que soit le réel $k$ , la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto k \times e^{kx}$.
À retenir : pour ces fonctions, $f'(0) = k$ et $f' = k \times f$.

**Démonstration :** Admise □

**Propriété 34**
si $k > 0$, la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** Admise □

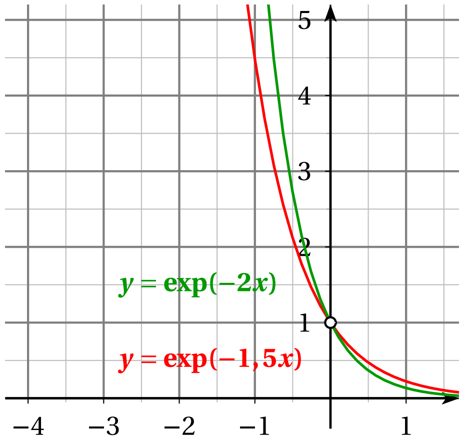
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $e^{kx}$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |



**Propriété 35**
si $k < 0$, la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** Admise □

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $e^{kx}$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




**Exemple (Étude de variations)**

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x+4}$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de $f$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (c) Étudier les variations de $f$.
2. Étudier les variations de $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -7e^{-x}$.
3. Étudier les variations de $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{3x} - 3x$.

**Correction :**

1. (a) $f(x)$ est de la forme $e^{ax+b}$ donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour $x$ réel, $f'(x) = a \times e^{ax+b} = -3e^{-3x+4}$
   (b) Soit $x$ un réel, $e^{-3x+4} > 0$ donc $f'(x) < 0$.
   (c) La fonction $f'$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x$ réel, $g'(x) = -7 \times (-1)e^{-x} = 7e^{-x}$ donc $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x$ réel, $h'(x) = 3e^{3x} - 3$.
   Résolvons l'équation $h'(x) = 0$. Soit $x$ un réel,
   $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
   Résolvons l'inéquation $h'(x) > 0$. Soit $x$ un réel,
   $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} - 3 > 0 \Leftrightarrow e^{3x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
   On en déduit le tableau de signes suivant pour $h'(x)$ et les variations de $h$. On complète le tableau avec $h(0) = e^{3\times 0} - 3 \times 0 = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | $1$ | ↗ | |

# Exercices

## Calculs de dérivées

**Exercice 364.** Soit $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = e^{-5x+2}$

b) $f(x) = e^{3x-1}$

**Exercice 365.** Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

c) $f(x) = e^{2x+1}$

d) $f(x) = xe^{x+1}$

e) $f(x) = e^{-2x+1}$

f) $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{3x+1}$

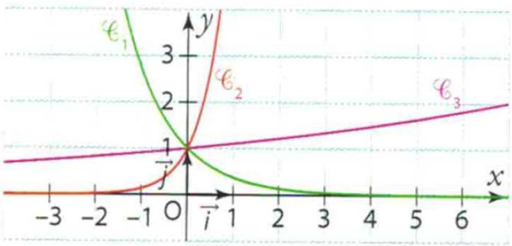
g) $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

## Études de variations

**Exercice 366.** On considère les fonctions $f$, $g$ et $k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-x}$ $\qquad g(x) = e^{2x}$ $\qquad h(x) = e^{\frac{x}{10}}$

1. Associer à chaque fonction sa courbe parmi les suivantes.




2. En s'appuyant sur la question précédente, conjecturer les limites en $+\infty$ des suites ci-dessous :
   (a) $(u_n)$ définie par $u_n = e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $(v_n)$ définie par $v_n = e^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $(w_n)$ définie par $w_n = e^{0,1n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 367.** Déterminer les variations de $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}(1+x)$.

**Exercice 368.** Soit $f$ la fonction définie par :
$f(x) = 2(x^2-x+1)e^x$.

1. Déterminer les variations de $f$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1.

**Exercice 369.** Soit $f$ la fonction définie par :
$f(x) = 2e^{-x} + 2x - e^{-1}$.

1. Déterminer les variations de $f$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1.

**Exercice 370.** Étudier le sens de variations des suites suivantes.

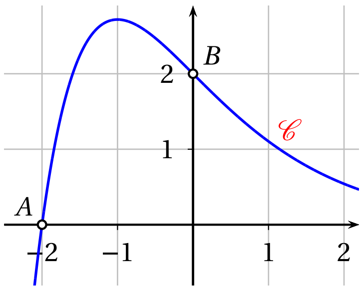
1. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{5n}$.
2. $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-n}$.

# Fiche 6

# La fonction exponentielle Exercices de synthèse

**Exercice 371.** Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(0\,;\,2)$ représente une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$




1. À l'aide du graphique, déterminer $a$ et $b$ en justifiant.
2. En déduire le tableau de variation de $f$.

**Exercice 372.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 1$$

telle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;\,4)$ et $B(-1{,}5\,;\,1)$ dans un repère du plan.

1. Déterminer une expression de $f(x)$.
2. Montrer que pour tout réel $x$ :
$$f(x) = 2\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{3}{\mathrm{e}^x} + 1.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $x$ :
$$f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire le tableau de variation de $f$.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A$.

**Exercice 373.**

1. **Partie A - Résultats préliminaires**
   (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ au point d'abscisse 0.
   (b) Soit $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$.
      i. Étudier les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
      ii. En déduire que pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

iii. Conclure sur la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

2. **Partie B - Étude d'une fonction**
Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
   (a) i. Justifier, à l'aide des résultats de la partie A, que la fonction $h$ est définie sur $\mathbb{R}$.
      ii. Calculer la dérivée de $h$.
      iii. Étudier le sens de variation de $h$.
   (b) i. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
      ii. Montrer que $h(x) - x = \dfrac{x(1+x-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
      iii. Utiliser la question précédente et la partie A pour étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $(\mathscr{T})$.
   (c) Contrôler les résultats précédents en traçant la droite $(\mathscr{T})$ et la courbe $\mathscr{C}$ sur votre calculatrice.

### Exercice 374 - Taux d'alcoolémie.

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,4]$ par :
$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-1{,}25t}.$$

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $I$.
2. Montrer que $f'(t) = 3(1 - 1{,}25t)\mathrm{e}^{-1{,}25t}$.
3. Établir le tableau de variation de $f$ sur $I$.
4. Faire un tableau de valeurs de $f(t)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25.
5. Représenter $f$ dans un repère orthogonal (prendre l'unité à 3 cm en abscisses et à 10 cm en ordonnées).
6. On admet que $f(t)$ modélise le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) en fonction du temps $t$ (en heures) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $t = 0$.
   Le taux maximum toléré est 0,5 g/L.
   (a) Cet homme est-il en infraction avec la loi s'il conduit un véhicule juste après l'absorption ?
   (b) Déterminer graphiquement son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu.
   (c) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.

### Exercice 375 - Croissance de von Bertalanffy.

La fonction de croissance de von Bertalanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kilogrammes) à l'âge $t$ (en années) des éléphantes africaines.
Son expression est :
$$W(t) = 2\,600\left(1 - 0{,}51\mathrm{e}^{-0{,}075t}\right)^3.$$

1. Évaluer la masse d'un nouveau-né.
2. On appelle $W'(t)$ est le taux de croissance à l'instant $t$.
   Évaluer le taux de croissance d'un nouveau-né.
   *Indication : pour calculer $W'$, on pourra écrire $W = 2600u^3 = 2600u^2 \times u$ avec $u :\ t \longmapsto 1 - 0{,}51e^{-0{,}075t}$ et appliquer plusieurs fois successivement la formule de dérivation d'un produit.*