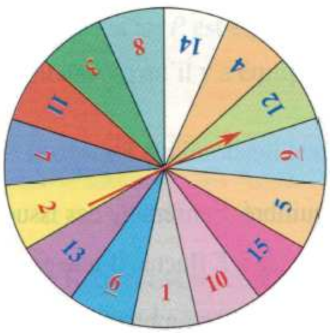
Chapitre 12

Fiche 1

Variables aléatoires
Activités d'introduction

Considérons la roulette ci-dessous, que l'on fait tourner ; lorsqu'elle s'arrête, on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros $1, 2, \ldots, 15$. On suppose que les quinze secteurs ont des angles égaux.



Supposons que l'on joue avec la règle suivante :

- on mise 2 € sur un numéro (mise perdue) ;
- si le numéro misé sort, on gagne un lot d'une valeur de 20 € ;
- si l'un des numéros voisins (sur la roulette) sort, on gagne un lot de consolation valant 3 € ;
- sinon on ne gagne rien.

Notons G le gain réalisé.

1. Définir la loi de probabilité sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 15\}$ des issues.
2. Expliquer pourquoi on peut considérer que les valeurs possibles du gain G sont : $-2, +1$ et $+18$.
3. On considère les trois événements : « le gain est -2 », noté $(G = -2)$; « le gain est $+1$ », noté $(G = 1)$; « le gain est $+18$ », noté $(G = 18)$. Calculer $P(G = -2)$.
4. Déterminer les valeurs de p_1, p_2 et p_3 figurant dans le tableau ci-après.

Gain G	-2	1	18
Probabilité	p_1	p_2	p_3

   Quelle est la probabilité de l'événement $(G \geqslant 0)$?

5. (a) Calculer le gain (ou la perte) réalisé par une personne qui jouerait 2 € sur chacun des 15 numéros possibles Calculer ensuite le « gain » moyen par numéro (en divisant par 15).
   (b) Calculer le nombre $-2p_1 + 1p_1 + 18p_3$ et comparer au résultat de la question précédente.

Le gain G, considéré dans l'exemple précédent, peut être considéré comme une fonction définie sur l'ensemble E par : $G : E \longrightarrow \{-2, 1, 18\}$. Nous nommerons **variable aléatoire** une telle fonction.
Le tableau de la question 4. définit une loi de probabilité sur le nouvel ensemble d'issues $E' = \{-2, 1, 18\}$, que nous définirons en cours : c'est la loi de la variable aléatoire G.
Le nombre $E(G) = -2p_1 + 1p_2 + 18p_3$, égal au « gain moyen pour une mise de 2 € » (voir question 5.), est l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire G.

Fiche 2

Variables aléatoires
Notion de variable aléatoire

I. Exemple

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « pile » et on perd 1 € pour chaque « face ».
L'ensemble des issues est $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$, et il est raisonnable de choisir l'équiprobabilité sur l'ensemble Ω. Notons G le gain correspondant à chaque issue ; les valeurs possibles du gain sont (en euros) :

$$-3 \text{ (3 faces)} ; 0 \text{ (2 faces, 1 pile)} ; +3 \text{ (1 face, 2 piles) et } +6 \text{ (3 piles)}.$$

Nous pouvons donc considérer G comme une fonction définie sur l'univers Ω à valeurs dans l'ensemble $\{-3 ; 0 ; +3 ; +6\}$, une telle fonction est appelée variable aléatoire définie sur Ω
Les quatre événements :

$$(G=-3)=\{FFF\} \quad , \quad (G=0)=\{FFP, FPF, PFF\}$$
$$(G=+3)=\{FPP, PFP, PPF\} \quad , \quad (G=+6)=\{PPP\}$$

ont pour probabilités respectives :

$$\frac{1}{8}, \ \frac{3}{8}, \ \frac{3}{8} \text{ et } \frac{1}{8}$$

Nous pouvons donc considérer, sur le nouvel ensemble d'issues $\{-3 ; 0 ; +3 ; +6\}$, une nouvelle loi de probabilité P' décrite par le tableau suivant :

Valeur du gain $G : x_i$	$x_1=-3$	$x_2=0$	$x_3=+3$	$x_4=+6$
Probabilité $P'(x_i)=P(G=x_i)$	$p_1=\frac{1}{8}$	$p_2=\frac{3}{8}$	$p_3=\frac{3}{8}$	$p_4=\frac{1}{8}$

Cette loi de probabilité P' sera appelée « loi de la variable G ».

II. Définition

Définition 22
Une **variable aléatoire finie** X est une fonction définie sur un ensemble Ω muni d'une probabilité P, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$, qui prend un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On note :

$$p_i = P(X = x_i)$$

L'association pour $1 \leqslant i \leqslant n$ des p_i aux x_i permet de définir une loi de probabilité P_X sur l'ensemble $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, appelée la loi de la variable aléatoire X ainsi

$$p_i = P(X = x_i) = P_X(x_i)$$

Ainsi le rôle de la variable aléatoire X est de transporter la probabilité P définie sur Ω sur un autre ensemble E qui est l'ensemble des valeurs prises par X.

$$\boxed{\Omega, P} \xrightarrow{X} \boxed{E, P_X} \quad \text{avec} \quad p_i = P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Exercices

Exercice 376. Un joueur tire au hasard une boule dans une urne contenant 1 boule verte, 2 boules bleues et 3 boules rouges.

1. Déterminer la probabilité des évènements V :« Tirer une boule verte », B :« Tirer une boule bleue » et R :« Tirer une boule rouge ».
2. La boule verte rapporte 5 euros, une boule bleue rapporte 2 euros et une boule rouge fait perdre 3 euros. On nomme G le gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles valeurs G peut-il prendre ?
   (b) Quel est l'évènement $(G = 5)$? Déterminer sa probabilité.
   (c) Donner la loi de probabilité de G.

Exercice 377. On s'intéresse aux familles de trois enfants. On prend au hasard une de ces familles et on note le sexe de chaque enfant dans l'ordre décroissant des âges. Ainsi FFG désignera l'issue : « les deux premiers enfants sont des filles et le dernier est un garçon ».

1. (a) Écrire toutes les issues possibles.
   (b) On choisit la loi équirépartie sur l'ensemble de ces issues. Quelle est la probabilité d'obtenir l'issue FFG ?
2. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de filles dans la famille.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Compléter : $(X = 1) = \{FGG, ...\}$
   (c) Déterminer $P(X = 1)$.
   (d) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 378. La roue d'une loterie s'arrête de façon équiprobable sur l'un des numéros de 0 à 10. Le joueur, qui lance la roue, gagne un nombre d'euros égal au nombre de consonnes figurant dans l'écriture en français du numéro obtenu.

1. le gain du joueur déterminer une variable aléatoire X. déterminer la loi de probabilité de X.
2. pour faire une partie, le joueur doit payer 2 euros. Reprendre la première question avec la variable aléatoire Y qui donne le gain algébrique du joueur, en tenant compte de sa mise.

Exercice 379. Pour une mise de $0,50$ euros, on lance un dé cubique supposé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Tout numéro pair (respectivement impair) fait gagner (respectivement perdre) le nombre d'euros qui lui correspond. Soit G le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de G.

Exercice 380. On lance deux dés tétraédriques supposés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Une issue est par exemple R1V4 si la face cachée du dé rouge est celle du 1 et la face cachée du dé vert est celle du 4.

1. (a) Combien y a -t-il d'issues possibles ?
   (b) Quelle la loi de probabilité peut-on choisir sur l'ensemble de ces issues ?

   Soit S la variable aléatoire associant à chaque issue la somme des 2 nombres figurant sur les faces cachées.
2. (a) Compléter : $(S = 4) = \{R1V3; \dots\}$
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $(S = 4)$
3. Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 381. Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, 2, 3$ et 4 avec des probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 proportionnelles aux nombres $1, 2, 3$ et 4. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 382. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,1$	$0,2$	$0,2$

1. On note $(X \leqslant 3)$ l'événement : $(X = 2)$ ou $(X = 3)$. Déterminer $P(X \leqslant 3)$.
2. Déterminer $P(X > 5)$, $P(X \geqslant 5)$, $P(X < 5)$.

Fiche 3

Variables aléatoires
Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

I. Définition

Définition 23
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2,..., x_n avec les probabilités p_1,...,p_n. On appelle :

- **Espérance** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- **Variance** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

- **Écart-type** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

I.1. Remarques

1. Ces paramètres sont les valeurs théoriques, dans le modèle probabiliste, des paramètres statistiques :
   - l'espérance est la valeur théorique de la moyenne $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$;
   - la variance et l'écart-type correspondent à la variance et à l'écart-type empiriques $V = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$ et $\sigma = \sqrt{V}$.
2. Lorsque les valeurs prises par la variable aléatoire X représentent des gains ou des pertes à un jeu, alors l'espérance $E(X)$ représente le gain moyen par partie.
   - Si $E(X) > 0$ alors le jeu est favorable au joueur ;
   - Si $E(X) < 0$ alors le jeu est défavorable au joueur ;
   - Si $E(X) = 0$ alors le jeu est équitable.

   Lorsque la dispersion est grande, cela traduit le risque de « gagner gros » ou de « perdre gros ».

II. Propriété - Formule de Kœnig (ou de Kœnig-Huyghens) (admise)

Propriété 36
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2,..., x_n avec les probabilités p_1,...,p_n.
La **variance** de la variable aléatoire X est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

On écrit ainsi :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

III. Propriété (admise)

Propriété 37
Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels, on a :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \text{ et } V(aX+b) = a^2V(X)$$

IV. Exemple

On considère l'ensemble $\Omega = \{-2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6\}$ et on définit la loi de probabilité suivante sur Ω :

Valeur de X	-2	0	1	3	5	6
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$

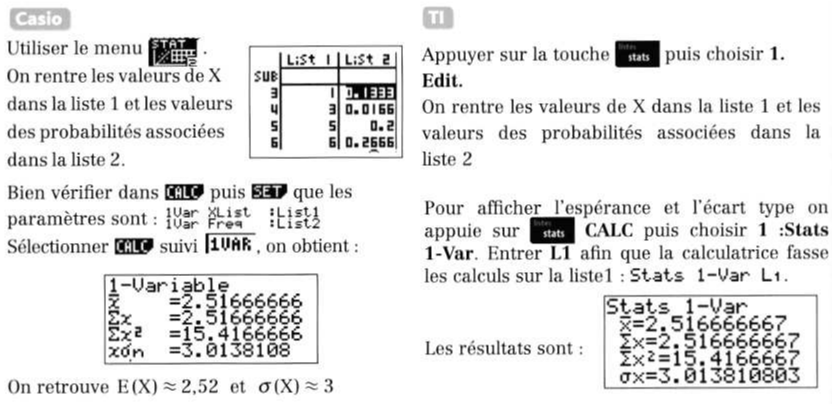
1. Calculer l'espérance, la variance puis l'écart-type de cette loi.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ &= -2 \times \frac{2}{15} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{60} + 5 \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{14}{15} \\ &= \frac{151}{60} \\ &\approx 2,52 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 \\ &= (-2)^2 \times \frac{2}{15} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{15} + 3^2 \times \frac{1}{60} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 6^2 \times \frac{14}{15} - \left(\frac{151}{60}\right)^2 \\ &= \frac{32699}{3600} \\ &\approx 9,08 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

Et ainsi,
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{32699}{3600}} \approx 3,01$ arrondi au centième.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, les paramètres de la loi de probabilité.



Exercices

Exercice 383. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	1	2
$P(X=x_i)$	$0,25$	$0,3$	?

1. Quelle est la probabilité manquante ?
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 384. Xavier et Yves jouent à deux jeux différents. les variables X et Y donnant leurs gains respectifs ont les lois de probabilités données ci dessous :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=k)$	$0,1$	$0,3$	$0,1$	$0,3$	$0,1$	$0,1$
$P(Y=k)$	$0,3$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	$0,1$	$0,2$

Comparer en terme d'espérance de gain et de risque les jeux de Xavier et Yves.

Exercice 385. Boris possède une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir « PILE » est le double d'obtenir « FACE ». Boris propose à Michel de lancer la pièce : si Michel obtient « FACE » Boris lui donne x euros ; si Michel obtient « PILE » il donne y euros à Boris. (x et y désignent des entiers naturels).

1. Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires M et B donnant les gains algébriques de Michel et Boris lors du lancer d'une pièce.
2. comment choisir x et y pour que le jeu soit équitable pour Michel ? L'est il alors pour Boris ?

Exercice 386. Une boîte contient 10 boules numérotées. Le tableau suivant en montre la composition.

Numéro	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

On paie 10 euros pour pouvoir tirer une boule au hasard et recevoir la somme, en euros, inscrite sur la boule.

1. Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de G et l'espérance $E(G)$.
2. peut-on rendre ce jeu équitable en changeant dans le tableau uniquement le numéro d'une seule boule ?

Exercice 387. Un exercice est composé de cinq questions pour lesquelles, on doit répondre obligatoirement par « vrai » ou « faux ». Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse retire 1 point. En cas de score final négatif, la note est ramenée à zéro.
On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat ayant répondu au hasard.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle note peut espérer le candidat ?
3. On décide de ramener la note de chaque candidat sur 20. Quelle note peut espérer cette fois le candidat ?

Exercice 388. Victor joue au jeu suivant : on tire une lettre au hasard dans le mot « Mathématiques ».

- Si la lettre obtenue est une voyelle, il gagne 9 euros.
- Sinon, il perd 8 euros

Partie 1

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Victor après une partie.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Faut-il conseiller à Victor de jouer à ce jeu ?

Partie 2

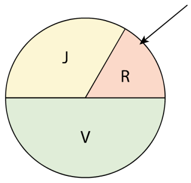
Victor décide de jouer trois parties successives.

1. Faire un arbre représentant la situation.
2. Déterminer la probabilité que Victor gagne les quatre parties.
3. On note Y son gain algébrique après quatre parties.
   (a) Déterminer l'espérance de Y.
   (b) Victor a-t-il intérêt à multiplier le nombre de parties ?

Exercice 389. Les deux frères BOLA, Tim et Tom, ont chacun organisé une tombola.
Tim propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent : 1 lot de 250 €, 4 lots de 50 € et 25 lots de 2 €.
Tom propose également 100 billets, mais annonce 5 lot de 20 €, 10 lots de 15 €, 15 lots de 10 € et 2à lots de 5 €. et 20 lots de 5 €.
Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 €.
Soit X et Y les gains algébriques respectifs liés à l'achat d'un billet chez Tim et Tom.

1. Calculer pour chaque tombola et comparer ;
   (a) la probabilité d'avoir un billet gagnant ;
   (b) la probabilité de gagner au moins 5 € ;
   (c) la probabilité de gagner au moins 40 €.
2. Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X et Y. Comparer et interpréter.
3. Calculer la variante et l'écart type de X et de Y. Que pourrait-on conseiller à Eva, qui hésite entre Tim et Tom, sachant qu'elle n'a pas le goût du risque ?

Exercice 390.
Une roue de loterie est divisée en trois secteurs : un rouge (R), un jaune (J) et un vert (V), d'angles au centre respectifs : 60°, 120° et 180°.
Lorsqu'elle s'arrête de tourner, un repère fléché indique l'une des trois couleurs avec une probabilité proportionnelle à l'angle du secteur concerné.



1. Déterminer là loi de probabilité sur l'ensemble des issues $\Omega = J, V, R$.
2. Le joueur perd 2 € si la flèche indique la partie verte, gagne $0,50$ € si la flèche indique la partie jaune et x euros si la flèche indique la partie rouge.
   Soit G le gain algébrique du joueur.
   (a) Calculer $E(G)$.
   (b) Comment choisir x pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 391. On considère le jeu suivant : le joueur place une mise m sur la table, $m > 0$, puis tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte tirée est :

- un as, le joueur gagne 4 fois sa mise ;
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise ;
- une dame, le joueur gagne sa mise ;
- un valet, le joueur gagne sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise. On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée et on nomme X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (en tenant compte de la mise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ en fonction de m.
3. Existe-t-il une valeur de m telle que le jeu soit équitable ?

Fiche 4

Variables aléatoires
Exercices supplémentaires

Exercice 392. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$,$P(1,3<X<3,5)$.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 393. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
$0,92$	$0,06$	$0,016$	$0,004$

   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 394 - D'après Baccalauréat 96.

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues parmi les trois boules extraites. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de l'urne, en remettant, après chaque tirage, la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours des trois tirages. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et son écart type.