Chapitre 13

Fiche 1

Produit scalaire dans le plan
Définition par le défaut d'orthogonalité

I. Norme d'un vecteur - rappels

Définition 24
Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La longueur AB s'appelle la **norme du vecteur $\vec{u}$**. On la note $\|\vec{u}\|$. Ainsi, on a $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Si, de plus, $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un **vecteur unitaire**.

Propriété 38
1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel, alors : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$, alors :
$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2.$$

II. Activité d'introduction - Défaut d'orthogonalité

Exercice 395.

1. **Énoncé vectoriel du théorème de Pythagore**

   Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que :
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.$$
   Justifier l'affirmation suivante :
$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

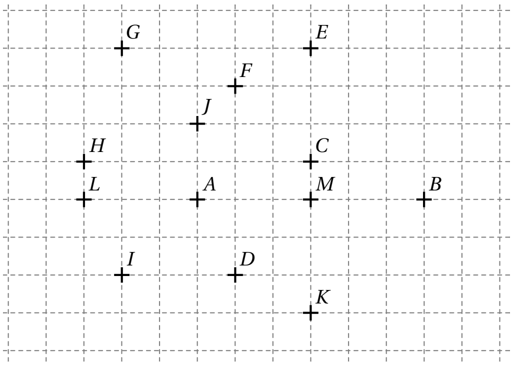
Que se passe-t-il lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont plus orthogonaux ? L'expression est-elle positive ? Négative ? C'est à ces questions que l'on se propose de répondre maintenant.

2. **Observer - conjecturer**

   Définition

   On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, qui se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ » et défini par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

On considère la figure suivante où chaque carré du quadrillage a pour côté 1 unité.



(a) Compléter le tableau suivant en prenant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{v}$	$\lVert\overrightarrow{u}\rVert^2$	$\lVert\overrightarrow{v}\rVert^2$	$\lVert\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rVert^2$	$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{AC}$	$6^2 = 36$	$3^2+1^2 = 9+1 = 10$	$3^2+1^2 = 9+1 = 10$	$\frac{1}{2}(36+10-10) = 18$
$\overrightarrow{AD}$				
$\overrightarrow{AB}$				
$\overrightarrow{AA}$				
$\overrightarrow{AE}$				
$\overrightarrow{AF}$				
$\overrightarrow{AG}$				
$\overrightarrow{AH}$				
$\overrightarrow{AI}$				
$\overrightarrow{AJ}$				
$\overrightarrow{AK}$				
$\overrightarrow{AL}$				
$\overrightarrow{AM}$				

(b) Conjecturer des réponses aux questions suivantes :

i. Dans quel(s) cas un produit scalaire est-il positif ? négatif ? nul ?

ii. Y a-t-il des points différents qui donnent le même produit scalaire ? À quelle configuration géométrique les points concernés semblent-ils appartenir ?

iii. Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ?

III. Définition - Produit scalaire et orthogonalité

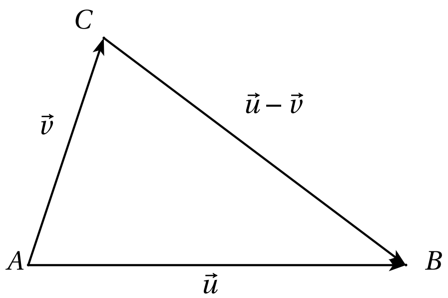
III.1. Définition

Définition 25
On appelle **produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$** le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, qui se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ » et qui est défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Remarques

1. Soit A, B et C trois points tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.



On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\end{aligned}$$

2. Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\|\overrightarrow{u}\|^2\right)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2\end{aligned}$$

On note $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$, ce nombre s'appelle **le carré scalaire de $\vec{u}$**.

III.2. Produit scalaire et orthogonalité

Définition 26

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls**. Soit A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. On dit que **les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** lorsque (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème 5 (Traduction vectorielle du théorème de Pythagore)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration : On raisonne par disjonction des cas.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, supposons, par exemple, que $\vec{u} = \vec{0}$.
   Alors :
   - D'une part, par définition,
     $$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$
   - D'autre part, le vecteur nul étant orthogonal à tout vecteur, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

   Par conséquent, les deux énoncés sont vrais donc équivalents.
2. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a montré l'équivalence dans l'activité. □

Exercices

Exercice 396. On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.
3. En déduire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercice 397. On considère trois points E, F et G du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1. $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG}$
2. $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE}$
3. $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FE}$

Exercice 398. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{a}\|$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right\|$.
2. En déduire $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$.

Fiche 2

Produit scalaire
Expression analytique

I. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Théorème 6
Soit dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration : Voir partie exercices. □

II. Règles de calcul

Propriété 39
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel, on a :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Démonstration :

1. On utilise la définition du produit scalaire.
2. Voir partie exercices.
3. Voir partie exercices. □

Propriété 40 (Identités remarquables)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration : On utilise les règles de calcul de la propriété précédente. □

III. Autre expression utilisant les normes

Propriété 41
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

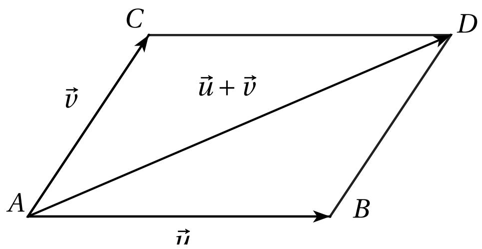
Démonstration : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$ quelconque, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) &= \frac{1}{2}\left(((x+x')^2+(y+y')^2)-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\ &= xx'+yy'\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}.\end{aligned}$$

□

Remarque
Soit A, B et C trois points tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et le point D défini par $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



On a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-AC^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-BD^2\right)\end{aligned}$$

Exercices

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 399 - Expression analytique.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$ quelconque, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

Exercice 400 - Propriétés algébriques.
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

1. Montrer que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
2. Soit k un réel. Montrer que $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Expression analytique du produit scalaire

Exercice 401. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$
2. $\vec{s}\cdot\vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+2\\1\end{pmatrix}$
4. $\vec{c}\cdot\overrightarrow{UV}$ avec $\vec{c}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24}+5\ ;\ 1)$ et $V(5\ ;\ \sqrt{2})$
5. $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 6)$
6. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MR}$ avec $C(5\ ;\ 6)$, $D(-1\ ;\ 4)$, $M(3\ ;\ 7)$ et $R(8\ ;\ 9)$
7. $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{EF}$ avec $E(0\ ;\ 1)$, $F(3\ ;\ 0)$, $S(8\ ;\ 8)$ et $T(5\ ;\ 5)$

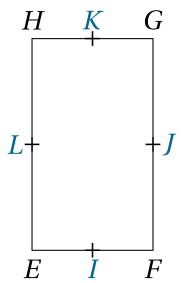
Exercice 402.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Calculer :

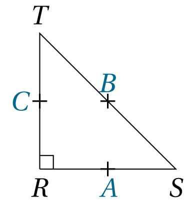
1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$
3. $(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

Exercice 403. On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF=4$ et $EH=7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



1. Reproduire la figure.
2. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :
   - (a) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FH}$
   - (b) $\overrightarrow{JL}\cdot\overrightarrow{EG}$
   - (c) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}$
   - (d) $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{EK}$
   - (e) $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IG}$
   - (f) $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{JK}$

Exercice 404. On considère le triangle isocèle et rectangle RST ci-dessous, tel que $RS=RT=4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1. $\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{RS}$
3. $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{SA}$
4. $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{CB}$

Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 405. On considère les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$.

1. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2. Même question pour :
   - (a) (AC) et (BD)
   - (b) (BE) et (CD)

Exercice 406. On considère quatre points $J(6\ ;\ 1)$, $K(2\ ;\ 4)$, $L(1\ ;\ -5)$ et $M\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ -2\right)$.

1. Le triangle JKL est-il rectangle en J ?
2. Le triangle JKM est-il rectangle ?

Exercice 407. On considère trois points $A(\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$ et $C(-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7}+2\sqrt{3})$.
Montrer que ABC est rectangle en B.

Exercice 408. On considère quatre points $Q(2\ ;\ -2)$, $R(1\ ;\ 1)$, $S(4\ ;\ 2)$ et $T(5\ ;\ -1)$.
Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

Exercice 409. On considère trois points $A(5{,}2\ ;\ 4)$, $B(6\ ;\ 3{,}1)$ et $C(1\ ;\ y)$.
Déterminer y tel que ABC soit rectangle en A.

Exercice 410. On considère quatre points $A(0\ ;\ 0)$, $B(6\ ;\ 2)$, $C(-1{,}5\ ;\ 4{,}5)$ et $D\left(2{,}5\ ;\ \dfrac{35}{6}\right)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze rectangle puis calculer son aire.

Exercice 411. On considère deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées, d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

1. Donner un vecteur directeur de chacune des deux droites.
2. En déduire la propriété suivante :
   Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
3. Parmi les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = 2x + 3$, $y = -2x + 5$ et $y = -\frac{1}{2}x - 6$, lesquelles sont perpendiculaires ?

Propriétés algébriques

Exercice 412. Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

1. $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v})$
2. $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
3. $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v})$
4. $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v})$

Exercice 413. Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{r} \cdot \vec{s}$, $\|\vec{r}\|$ et $\|\vec{s}\|$.

1. $\left(\frac{1}{3}\vec{r} + \vec{s}\right) \cdot (6\vec{r} - 9\vec{s})$
2. $(-\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s}) \cdot (\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s})$
3. $((1+\sqrt{3})\vec{r} + 5\vec{s}) \cdot (\vec{r} + \vec{s})$

Exercice 414. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

1. (a) Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 3\vec{v})$.
   (b) En déduire $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$.
2. En utilisant la méthode précédente, calculer :
   (a) $\|8\vec{u} + 5\vec{v}\|$
   (b) $\|-6\vec{u} - 2\vec{v}\|$

Exercice 415. En reprenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice précédent, calculer :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$
2. $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 + \|4\vec{u} + 5\vec{v}\|^2$

Exercice 416. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

1. Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u} + t\vec{v}\| = 2$? Si oui, le ou les déterminer.
2. Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u} + t\vec{v}\| = 1$? Si oui, le ou les déterminer.
3. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$.
   (b) En déduire la plus petite valeur possible de $\|\vec{u} + t\vec{v}\|$.

Exercice 417. On sait que cinq points du plan A, B, C, D et E vérifient :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = -4$

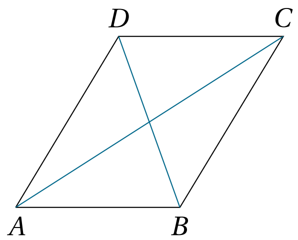
Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Exercice 418. On considère quatre points A, B, C et D du plan.

1. À l'aide d'une identité remarquable, montrer que :
   - $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right)$
   - $CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right)$
2. En déduire $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
3. (a) En utilisant la propriété précédente, montrer que les cerf-volant ont des diagonales perpendiculaires.
   (b) La réciproque est-elle vraie, autrement dit, un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est-il nécessairement un cerf-volant ?

Exercice 419 - Identité de polarisation.

1. Démontrer l'identité de polarisation :
   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$
2. On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.



   (a) En utilisant l'identité de polarisation démontrée à la question précédente, justifier que :
   $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right\|^2\right).$$
   (b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Fiche 3

Produit scalaire
Angles et projection orthogonale

I. Expression du produit scalaire utilisant distance et angle

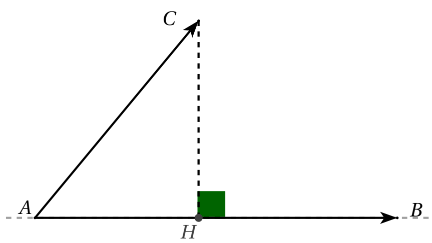
Propriété 42
Soit A, B et C trois points distincts, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

Démonstration : Voir partie exercices. □

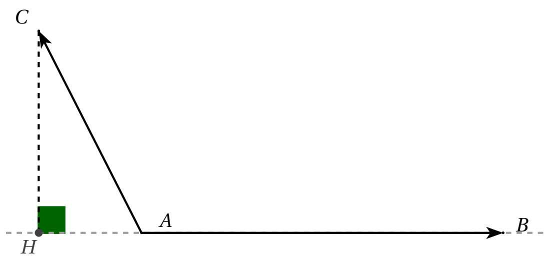
Conséquence
Soit A, B et C trois points alignés :
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

II. Produit scalaire et projetés orthogonaux

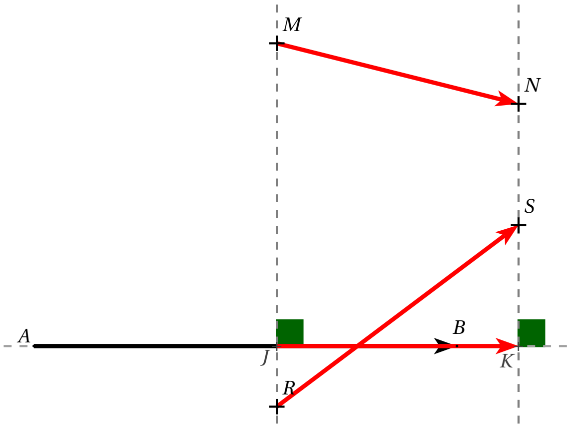
Propriété 43
Soit A et B deux points distincts,
1. Si H est le projeté orthogonal d'un point C sur la droite (AB), alors :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$
2. Si J et K sont les projetés orthogonaux respectifs de deux points M et N sur la droite (AB), alors :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$

Démonstration :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$
   Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$; par suite, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
2. Cette proposition se démontre de la même façon.
   On écrit :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KN})$, puis on utilise l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MJ}$ d'une part, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KN}$ d'autre part.
   Si J et K sont les projetés orthogonaux respectifs de deux points M et N sur la droite (AB), alors :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$

Exercices

Sauf indication contraire, on travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 420 - Cosinus et projeté orthogonal.
Soit A, B et C trois points distincts du plan tels que $\widehat{BAC}=\alpha$. On se place dans le repère orthonormé direct $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1. Exprimer en fonction de AB, AC et α les coordonnées des points B, C et H.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.
3. Valider les conjectures émises dans l'activité de la fiche 1.

Produit scalaire et angles

Exercice 421. A, B et C étant trois points du plan, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec :

1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=5$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2$ et $\cos\widehat{BAC}=0{,}1$
2. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=23$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=11$ et $\cos\widehat{BAC}=0{,}93$
3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=5$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=8$ et $\widehat{BAC}=30^\circ$
4. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=7$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2$ et $\widehat{BAC}=300^\circ$
5. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=12$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\widehat{BAC}=45^\circ$
6. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=9$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\overrightarrow{AB}=-1{,}5\overrightarrow{AC}$

Exercice 422. A, B et C étant trois points du plan, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec :

1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\dfrac{5}{6}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $\widehat{BAC}=150^\circ$
2. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\widehat{BAC}=45^\circ$
3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{8}$ et $\widehat{BAC}=180^\circ$
4. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2}+1$ et $\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\overrightarrow{AB}$

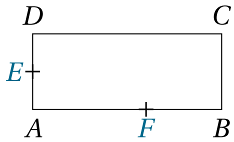
Exercice 423. On considère un triangle ABC avec $AB=5$ et $BC=6$ et $\widehat{ABC}=60^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Exercice 424. On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$, RS et RT.
   (b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à 0,01 degré près.
2. Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3. En déduire $\widehat{STR}$.

Exercice 425. On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB=5$ et $AD=2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F\in[AB]$ avec $AF=3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01°près :

a) $\widehat{BAC}$ b) $\widehat{DFB}$ c) $\widehat{DFC}$ d) $\widehat{CEF}$

Exercice 426. On considère un triangle OMN tel que $OM=5$, $ON=8$ et $\widehat{MON}=45°$ radians.
Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

Exercice 427. On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ=4$, $IK=5$ et $JK=8$.

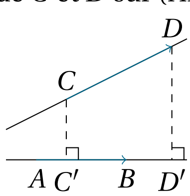
1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{KI}\cdot\overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à 0,1 près.

Exercice 428. On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB=7$, $BC=8$ et $AC=12$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à 0,1 près.
2. Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

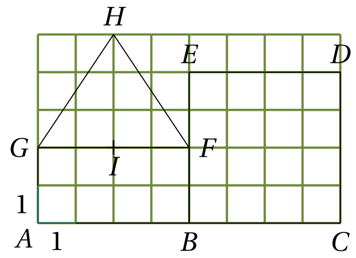
Produit scalaire et projection orthogonale

Exercice 429. Projection de deux points sur une droite Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



1. Montrer l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

Dans les trois exercices suivants, on se réfère à la figure suivante :



Exercice 430. En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants (on reproduira la figure et on pourra introduire de nouveaux points) :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}$ e) $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI}$ d) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FH}$ f) $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{FD}$

Exercice 431 - Décomposition de vecteurs.

1. (a) Montrer que :
   $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}=\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IH}\right)$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}$.
2. En décomposant les deux vecteurs de la même manière qu'à la question précédente, calculer :
   (a) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}$. (b) $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{EI}$.

Exercice 432. En utilisant le produit scalaire, calculer les mesures des angles suivants, on donnera le résultat en degrés arrondi à 0,1 près.

a) $\widehat{AFB}$ b) $\widehat{IFD}$ c) $\widehat{HFG}$

Exercice 433. On considère trois points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 7)$ et B', le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

1. Exprimer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.
2. En déduire CB' puis BB'.
3. Calculer l'aire de ABC.

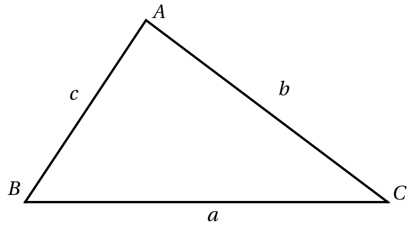
Fiche 4

Produit scalaire
Théorème d'Al-Kashi

Théorème d'Al-Kashi ou Pythagore généralisé

Théorème 7
Soit ABC un triangle, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$



On note généralement $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$.
On a alors :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$.

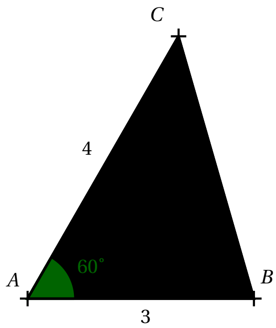
Démonstration : Soit ABC un triangle, on a :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= BA^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} + AC^2 \\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.
\end{aligned}$$

□

Remarque
Le théorème de Pythagore est ainsi un cas particulier de ce théorème, le cosinus d'un angle droit étant nul.

Exemple
ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer BC et $\widehat{ABC}$.



D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\
&= 9 + 16 - 24 \cos(60°) \\
&= 25 - 12 \\
&= 13
\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{13}$.

De même, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$.

Donc : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \dfrac{9+13-16}{2\times 3\times\sqrt{13}} = \dfrac{6}{6\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

Donc : $\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{13}}{13}\right) \approx 74^\circ$ à 1° près.

Exercices

Exercice 434. Calculer si possible les longueurs des autres côtés et des autres angles du triangle ABC.

1. $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 7$
2. $AB = 8$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 75^\circ$
3. $AB = 5$, $BC = 9$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$
4. $AB = 8$, $AC = 6$ et $\widehat{ACB} = 60^\circ$

Exercice 435. Le triangle ABC est tel que $AB = 4$, $BC = 4\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 24$. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$, puis déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 436. ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 7$.

1. Calculer ses trois angles à $0,1^\circ$près.
2. (a) Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de A
   (b) En déduire l'aire de ABC à $0,1$ près.
3. Calculer la longueur de la médiane issue de B à $0,1$ près.

Exercice 437.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1. Calculer $\widehat{AHB}$ à $0,1$ près.
2. Calculer $\widehat{AKG}$ à $0,1$ près.

Résolution de triangle

Exercice 438. En géométrie, résoudre un triangle consiste à en donner les longueurs des côtés et les mesures des angles.

1. On considère un triangle ABC avec $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45^\circ$.
   (a) Déterminer la longueur BC avec le théorème d'Al-Kashi.
   (b) Déterminer les mesures des angles de ABC. On arrondira à $0,1^\circ$près.
2. Résoudre le triangle ABC avec $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 20^\circ$. On arrondira les longueurs à $0,1$ cm et les mesures des angles à $0,1^\circ$près.

Exercice 439. On considère un triangle ABC avec $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

1. Tracer un triangle correspondant à ces conditions.
2. Écrire le théorème d'Al-Kashi faisant intervenir l'angle $\widehat{ABC}$ et remplacer par les valeurs connues.
3. (a) Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 21 = 0$.
   (b) Résoudre le triangle ABC.

Fiche 5

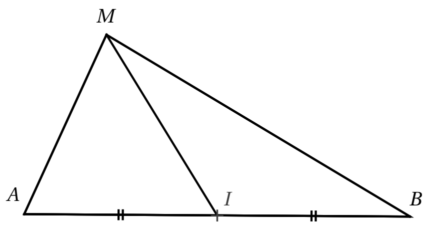
Produit scalaire
Théorème de la médiane

Théorème de la médiane

Théorème 8
Soit A, B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration :



On a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 \end{aligned}$$

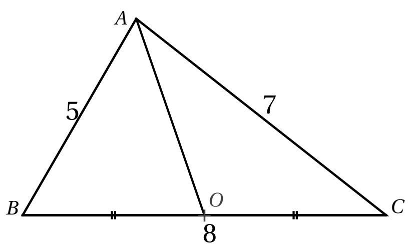
Comme I est le milieu du segment $[AB]$, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
De plus,

$$\overrightarrow{IA}^2 = IA^2 = \frac{AB^2}{4} \text{ et } \overrightarrow{IB}^2 = IB^2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Par conséquent :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Exemple
ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$ et O est le milieu de $[BC]$.
Calculer AO.



D'après le théorème de la médiane,

$$AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Donc $\quad 2AO^2 = 25 + 49 - \frac{64}{2}$

Donc $\quad 2AO^2 = 74 - 32 = 42$

Donc $\quad AO^2 = 21$

Donc $\quad AO = \sqrt{21}$

Exercices

Exercice 440. Un triangle a pour côtés $AB = 8$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Déterminer les longueurs des trois médianes.

Exercice 441. On considère un segment $[AB]$ de longueur 4. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$?

Exercice 442. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 6$ et $BC = 5$. Soit I le milieu de $[AB]$.

1. calculer CI
2. Déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 61$. Vérifier que $C \in \mathscr{L}$.

Exercice 443. $ABCD$ est un rectangle de centre O. Un point M est placé à l'intérieur du rectangle de telle sorte que $MA = 30$ m, $MB = 18$ m et $MC = 6$ m. On souhaite connaître MD.

1. Faire une figure en choisissant une échelle adaptée.
2. Démontrer que $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
3. En déduire MD.

Exercice 444. Soit $[AB]$ un segment de longueur 2 et I le milieu de $[AB]$. On cherche Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 5$.

1. Démontrer, à l'aide de la relation de Chasles que pour tout point M du plan,
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$
2. Démontrer que M appartient à Γ si et seulement si $IM = \sqrt{6}$.
3. En déduire la nature de Γ.

Exercice 445.

1. Soit I, le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que :
$$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2.$$
3. Démontrer le théorème de la médiane :
Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout M du plan,
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$
4. Montrer que $MA^2 + MB^2 = k$ est équivalent à $MI^2 = \dfrac{2k - AB^2}{4}$.
5. (a) En déduire pour quelles valeurs de k il existe des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$.
   (b) Quel est alors l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

Exercice 446. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1. En s'inspirant du travail fait dans l'exercice précédent, déterminer l'ensemble des points M, vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ dans le cas où $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$ dans un repère orthonormé.
2. Donner, dans le cas général, l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Fiche 6

Produit scalaire
Exercices et problèmes

Exercice 447. On considère un carré de côté a et l'on désigne par I le milieu du côté $[BC]$. Évaluer l'angle $\widehat{IAC}$ à $0,01^\circ$près.

Exercice 448. $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB = 3$ et $AD = 6$. E et F sont les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD)

1. Calculer de deux façons $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BD puis EF.

Exercice 449. $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB = a$ et $AD = b$. E et F sont les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD)

1. Calculer de deux façons $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BD puis EF.

Exercice 450. $ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $AB = 2a$ et $CD = a$ et de hauteur $AD = h$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a et h.
2. Peut-on choisir h de telle sorte que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires.

Exercice 451. Soit $ABCD$ est un rectangle avec $AB = a$ et $AD = b$. On nomme E le milieu de $[AB]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (DE) et (AC) soient perpendiculaires.

Exercice 452. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. On construit les triangles BAE et CAF rectangles isocèles en A à l'extérieur du triangle ABC.
On pose $\theta = \widehat{BAC}$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ en fonction de b, de c et de θ.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Montrer que la médiane (AI) du triangle ABC est la hauteur issue de A dans le triangle AEF