Chapitre 14

Fiche 1

Géométrie plane
Vecteurs directeurs- rappels

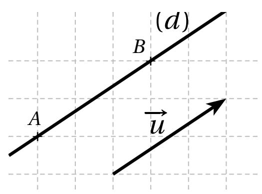
On considère que le plan est muni d'un repère.

I. Équations de droite

I.1. Vecteur directeur

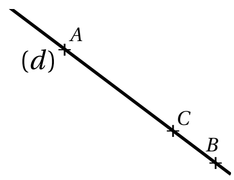
Définition 27

Soit $\vec{u}$ un vecteur, (d) une droite. On dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite (d) si et seulement si il existe deux points **distincts** A et B de (d) tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

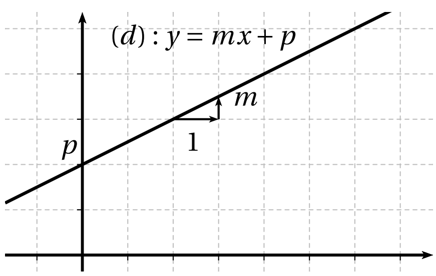


Remarques

1. Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur directeur de droite car il n'a pas de direction.
2. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d), alors, pour tout réel k non nul, $k\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d). Une droite a donc une infinité de vecteurs directeurs.
3. Sur la figure ci-contre, la droite (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $3\overrightarrow{AB}$, $-\overrightarrow{AC}$, etc.

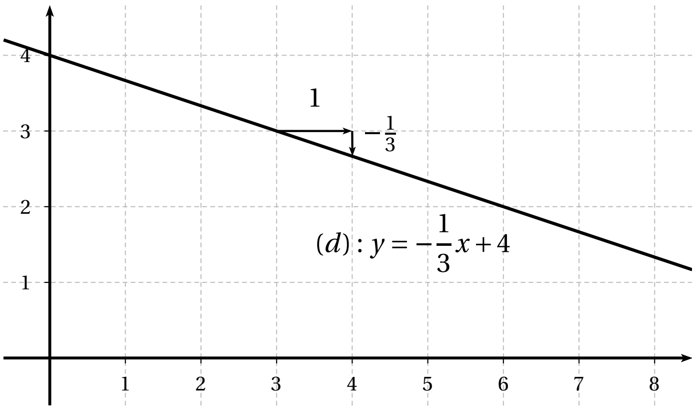


4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de deux droite (d) et (d'), alors :
$$(d)//(d') \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$
5. Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$ avec m et p deux réels dans un repère. Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).



Exemple
Un vecteur directeur de la droite (d) d'équation $y = -3x+4$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur non nul dont les coordonnées sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite. Par exemple, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.



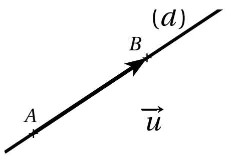
Propriété 44
Soit (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et A un point de (d).
Soit M un point. On a :

$$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$

Démonstration :

Soit B le point de (d) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Alors :

$M \in (d) \iff A,\ B$ et M sont alignés
$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires
$\iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.



□

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère $(O ; I, J)$.

Exercice 453. 1. Soit $A(2 ; -3)$ et $B(4 ; -5)$. Tracer la droite (AB).

2. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).

Exercice 454. 1. Tracer la droite (d) passant par le point A de coordonnées $(-1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. Le point B de coordonnées $(5 ; -4)$ appartient-il à la droite (d) ?

Exercice 455. 1. La droite (d) a pour équation $y = \frac{5}{7}x + 2$.

(a) Donner un vecteur directeur de (d). En déduire un vecteur directeur de (d) à coordonnées entières.

(b) Tracer la droite (d).

2. Reprendre la question 1. avec $(d) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Exercice 456.

1. (a) Tracer la droite (d) passant par $A(0\ ;\ 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   (b) Donner l'équation réduite de la droite (d).

2. Reprendre la question 1. avec $A(1\ ;\ -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 457. Quel est le coefficient directeur d'une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ avec :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$

Fiche 2

Géométrie plane
Équation cartésienne de droite - rappels

I. Équation cartésienne d'une droite

Propriété 45
Soit (d) une droite du plan. Il existe trois réels a, b et c avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tels que (d) admette pour équation

$$ax + by + c = 0.$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de cette droite.

Démonstration : Soit (d) une droite du plan. Soit A un point de (d) et $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d).
Soit M un point du plan. Alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - yA \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x - x_A) \times \beta - \alpha \times (y - y_A) = 0 \\ &\iff \beta x - \alpha y - x_A \beta + \alpha y_A = 0 \\ &\iff \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a = \beta \\ b = -\alpha \\ c = -x_A \beta + \alpha y_A \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de (d), on a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
On a donc établi qu'il existe trois réels a, b et c avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tels que (d) admette pour équation $ax + by + c = 0$.
De plus, comme $a = \beta$ et $b = -\alpha$, alors $\alpha = -b$ et $\beta = a$, et par conséquent, $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Donc la droite (d) admet bien pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $\square$

Propriété 46 (réciproque)
Soit a, b et c trois nombres, avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
L'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite qui admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Démonstration : Soit a, b et c trois nombres, avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
Cherchons l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $ax+by+c=0$.

- Si $\boldsymbol{b \neq 0}$
  On a alors $ax+by+c=0 \iff y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.
  Cette équation est de la forme $y=mx+p$ avec m et p deux réels. C'est donc l'équation réduite d'une droite. Elle admet le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{a}{b} \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, et par conséquent, le vecteur $-b\vec{v}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, est également un vecteur directeur de (d).
- Si $\boldsymbol{b = 0}$
  Comme $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on a alors $a \neq 0$. Par conséquent :
  $$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff ax+0y+c=0 \\ &\iff ax+c=0 \\ &\iff x=-\frac{c}{a} \end{aligned}$$
  Cette équation est celle d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. De plus, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ est bien un vecteur directeur de (d). □

Définition 28
Soit (d) une droite. Une équation de (d) de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ est appelée **équation cartésienne** de la droite (d).

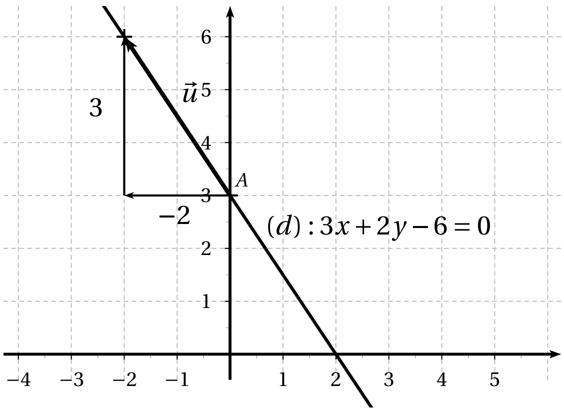
Remarque
Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. En multipliant les deux membres de l'équation par un réel k non nul, on obtient une équation équivalente : $kax+kby+kc=0$, qui est donc une autre équation cartésienne de (d).
Ainsi, toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes. On parle donc d'**une** équation cartésienne d'une droite mais de **l**'équation réduite d'un droite, car celle-ci est unique.

Exemples

1. **Construire une droite d'équation cartésienne donnée.**
   Soit (d) d'équation $3x+2y-6=0$. Construire la droite (d) dans un repère du plan.
   — Déterminons un vecteur directeur de (d) :
   D'après la propriété 2, la droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— Déterminons les coordonnées d'un point de (d) :
Soit A le point de (d) d'abscisse 0. On a $3x_A + 2y_A - 6 = 0$, donc $0 + 2y_A - 6 = 0$, donc $y_A = 3$.
Le point A de coordonnées $(0\,;\,3)$ est donc un point de (d).

— On construit alors la droite :



Remarque
On peut aussi retrouver l'équation réduite de (d) :
Soit x un réel,

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 6 = 0 &\iff 2y = -3x + 6 \\ &\iff y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Ainsi, (d) est la droite de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine 3.

2. **Déterminer l'équation cartésienne d'une droite.**
Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A de coordonnées $(5\,;\,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

— **Méthode 1**
Soit M de coordonnées $(x\,;\,y)$ un point du plan. Alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x-5) \times 4 - (y-2) \times (-3) = 0 \\ &\iff 4x - 20 + 3y - 6 = 0 \\ &\iff 4x + 3y - 26 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (d) est $4x + 3y - 26 = 0$.

— **Méthode 2**
On sait que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), donc il existe un réel c tel que (d) admette pour équation cartésienne $4x + 3y + c = 0$.
De plus, le point A de coordonnées $(5\,;\,2)$ appartient à (d).
On a donc : $4x_A + 3y_A + c = 0$,
donc : $4 \times 5 + 3 \times 2 + c = 0$,
donc : $20 + 6 + c = 0$,
donc : $c = -26$.
Conclusion : une équation cartésienne de la droite (d) est $4x + 3y - 26 = 0$.

II. Exercices

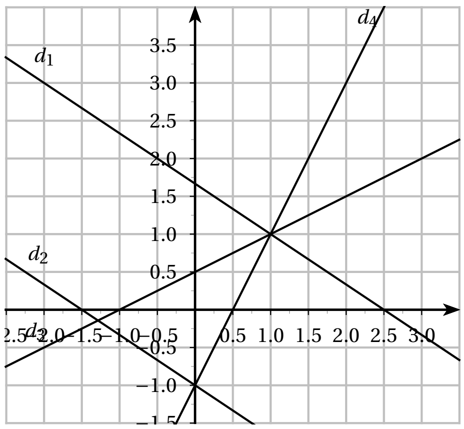
Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 458. Soit d la droite d'équation : $2x - 3y + 7 = 0$.

1. Le point $A(-2\,;\,1)$ appartient-il à d ?
2. Même question avec $B\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{2}\right)$ et $C\left(3\,;\,\frac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\frac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\frac{1}{5}$.

Exercice 459. Associer à chaque droite d_1, d_2, d_3, d_4 une équation cartésienne parmi les équations suivantes :

(1) $x - 2y + 1 = 0$	(2) $2x + 3y - 5 = 0$	(3) $2x - y - 1 = 0$	(4) $2x + 3y + 3 = 0$



Exercice 460. Soit d la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de d et la tracer dans un repère.

1. $A(-3\,;\,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
2. $A(2\,;\,-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
3. $A(0\,;\,-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\35\end{pmatrix}$
4. $A(-2\,;\,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Exercice 461. Donner une équation cartésienne de la droite passant par A et parallèle à la droite d.

1. $A(2\,;\,-3)$ et $d : 2x - y + 2 = 0$
2. $A(0\,;\,-3)$ et $d : -3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 462. Placer les points $A(-2\,;\,4)$,$B(2\,;\,2)$, $C(-5\,;\,0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
   (b) Déterminer les coordonnées de D.
2. (a) Soit $d\ :\ 6x + y - 14 = 0$. Vérifier que B et D appartiennent à d.
   (b) Trouver une équation cartésienne de la droite (AC).
   (c) Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
   (d) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.

3. (a) Calculer les coordonnées de k milieu de $[AB]$ et de L milieu de $[CD]$.
   (b) Démontrer que les points E, K et L sont alignés.
4. Pour aller plus loin.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AD) et (BC), puis les coordonnées de leur point d'intersection F.
   (b) Montrer que E, F, K et L sont alignés.

Exercice 463. Démontrer par le calcul que les trois médianes du triangle ABC où $A(2\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ -6)$ et $C(-2\ ;\ -1)$ sont concourantes et préciser leur point d'intersection.

Fiche 3

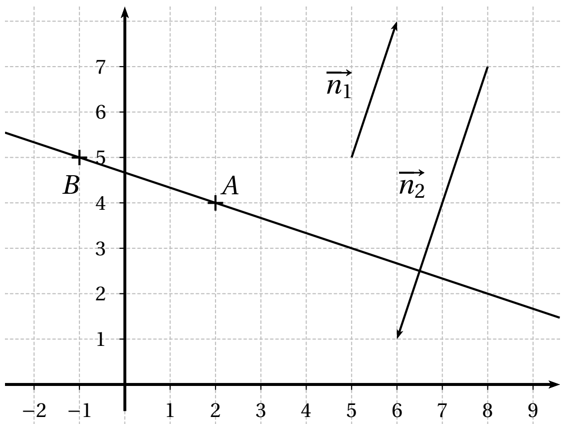
Géométrie plane
Vecteur normal et équation cartésienne

I. Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Définition 29
Soit (d) une droite. On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** (d) lorsque $\vec{u}$ est non nul et est orthogonal à un vecteur directeur de (d).

Exemple
Soit A et B les points de coordonnées $(2\,;\,4)$ et $(-1\,;\,5)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et il a pour coordonnées $\binom{-3}{1}$.
Soit $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $\binom{1}{3}$ et $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $\binom{-2}{-6}$.



On a $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AB} = -3+3 = 0$ et $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 6-6 = 0$.
Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont des vecteurs normaux à la droite (AB).

Propriété 47
Soit (d) une droite. Soit a et b deux réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) la droite (d) admet le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$ comme vecteur normal ;

(2) il existe un réel c tel que (d) admette pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

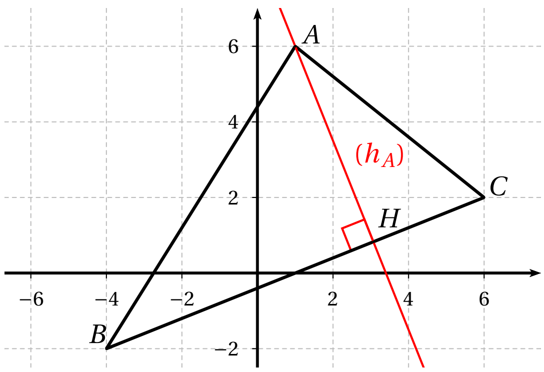
Démonstration : Soit (d) une droite. Soit a et b deux réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

- **Montrons que (1) ⇒ (2).**
  Supposons que $\vec{n}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à la droite (d).
  Soit M un point du plan et A un point de (d).
  On a alors :
  $$\begin{aligned} M \in (d) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned}$$
  Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-x_A}{y-y_A}$. Donc :
  $$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x-x_A)\times a + (y-y_A)\times b = 0 \\ &\iff ax - ax_A + by - by_A = 0 \\ &\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\ &\iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ c = -ax_A - by_A \end{cases} \end{aligned}$$
  Ainsi, la droite (d) admet pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, avec $c=-ax_A-by_A$. D'où le résultat.

- **Montrons que (2) ⇒ (1).**
  Soit c un réel tel que la droite (d) a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$.
  Alors la droite (d) admet le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{-b}{a}$ comme vecteur directeur.
  Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\binom{a}{b}$. On a $\vec{n}\cdot\vec{u} = -ab+ba = 0$.
  Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et par conséquent, $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d).
  D'où le résultat. □

Exemples

1. **Déterminer un vecteur normal à une droite.**
   D'après la propriété précédente, la droite (d) d'équation cartésienne $2x+5y-3=0$ admet $\vec{n}\binom{2}{5}$ comme vecteur normal. (Elle admet $\vec{u}\binom{-5}{2}$ comme vecteur directeur.)
2. **Déterminer une équation cartésienne avec un vecteur normal et un point.**
   Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(1\,;\,6)$, $(-4\,;\,-2)$ et $(6\,;\,2)$. On se propose de déterminer une équation de la hauteur (h_A) du triangle ABC issue de A.



   La hauteur issue de A est perpendiculaire à la droite (BC), par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{BC}\binom{10}{4}$ est un vecteur normal à la droite (h_A).
   Il y a ensuite deux façons de procéder :

   — **Méthode 1**
   Soit M un point du plan, on a alors :
   $$\begin{aligned} M \in (h_A) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \end{aligned}$$

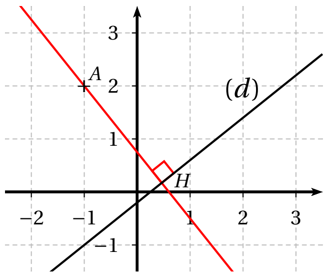
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-1}{y-6}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (h_A) &\iff (x-1)\times 10 + (y-6)\times 4 = 0 \\ &\iff 10x - 10 + 4y - 24 = 0 \\ &\iff 10x + 4y - 34 = 0 \\ &\iff 5x + 2y - 17 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur (h_A) admet pour équation cartésienne $5x+2y-17=0$.

— **Méthode 2**
Ainsi, d'après la propriété précédente, il existe un réel c tel que la droite (h_A) admette pour équation cartésienne $10x+4y+c=0$.
En divisant les deux membres de l'équation par 2, on peut dire qu'il existe donc un réel c' tel que (h_A) admette pour équation cartésienne $5x+2y+c'=0$.
De plus, $A \in (h_A)$ donc $5x_A+2y_A+c'=0$.
Par suite : $5\times 1+2\times 6+c'=0$, donc $c'=-17$.
Ainsi la droite (h_A) a pour équation : $5x+2y-17=0$.

3. **Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.**
On considère la droite (d) d'équation $4x-5y-1=0$ et le point $A(-1\ ;\ 2)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (d).



La droite (d) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{4}{-5}$.
C'est donc un vecteur directeur de la droite (AH).
Il existe donc un réel c tel que (AH) ait pour équation cartésienne $-5x-4y+c=0$.
De plus, $A \in (AH)$ donc $-5x_A-4y_A+c=0$.
Par suite : $-5\times(-1)-4\times 2+c=0$,
donc $5-8+c=0$, donc $c=3$.
Ainsi la droite (AH) a pour équation : $-5x-4y+3=0$.
Le point H est le point d'intersection des deux droites. Ses coordonnées vérifient donc les équations des deux droites.

On a donc : $\begin{cases} 4x_H-5y_H-1=0 \\ -5x_H-4y_H+3=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 20x_H-25y_H-5=0 & \ell_1 \leftarrow 5\ell_1 \\ -20x_H-16y_H+12=0 & \ell_2 \leftarrow 4\ell_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} -41y_H+7=0 & \ell_1 \leftarrow \ell_1+\ell_2 \\ -20x_H-16y_H+12=0 & \ell_2 \leftarrow 4\ell_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y_H = \dfrac{7}{41} \\ -20x_H = 16\times\dfrac{7}{41}-12 = -\dfrac{380}{41} \end{cases}$

donc $\begin{cases} y_H = \dfrac{7}{41} \\ x_H = \dfrac{19}{41} \end{cases}$ Ainsi, H a pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{41}\ ;\ \dfrac{7}{41}\right)$.

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ I,\ J)$.

Exercice 464. $ABCD$ est un carré de centre K. Donner :

a) un vecteur normal à la droite (AB) ;

b) deux vecteurs normaux à la droite (BD).

Exercice 465. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes d'équation :

a) $2x-3y+4=0$; | b) $y=-7x+3$; | c) $x=-5$; | d) $y=2$.

Exercice 466. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et qui admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

a) $A(1\,;\,-2)$ et $\vec{n}\binom{1}{-1}$; | b) $A(-3\,;\,4)$ et $\vec{n}\binom{2}{-3}$; | c) $A(2\,;\,3)$ et $\vec{n}\binom{-2}{1}$.

Exercice 467. On considère la droite (d) d'équation $3x+y+5=0$ et le point $A(1\,;\,2)$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (d). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 468. Soit $A(-1\,;\,1)$, $B(5\,;\,6)$ et $C(8\,;\,-3)$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 469. Soit $A(-1\,;\,2)$, $B(0\,;\,-3)$ et $C(3\,;\,1)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice (d') du segment $[AC]$.
3. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

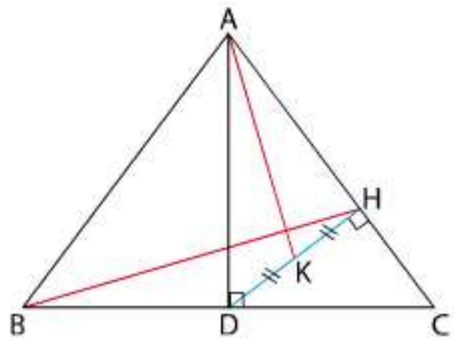
Exercice 470. On considère trois points $F(2\,;\,5)$, $G(4\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.

1. Déterminer une équation de la hauteur (h_F) issue de F dans le triangle FGH.
2. Déterminer une équation de la hauteur (h_H) issue de H dans le triangle FGH.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

Exercice 471. On considère les points $A(0\,;\,4)$, $B(-3\,;\,0)$ et $C(2\,;\,0)$. Soit (d) et (d') les droites perpendiculaires à (BC) respectivement en B et en C. La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (d) en P et la perpendiculaire à (AC) passant par O coupe (d') en Q.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $H\left(0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées des points P et Q.
4. Étudier l'alignement des points P, Q et H.

Exercice 472. ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB=5$ et $BC=6$. On nome D le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADC et K le milieu de $[DH]$.



Soit U le point de $[DC]$ tel que $DU = 1$ et V le point de $[DA]$ tel que $DV = 1$.

1. Justifier que $(D\,;\,U,\,V)$ est un repère orthonormé.
2. Déterminer une équation de la droite (DH).
3. Déterminer les coordonnées des points H et K.
4. Démontrer que (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

Fiche 4

Géométrie plane
Équations de cercles

I. Équation de cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ I,\ J)$.

I.1. Propriétés

Propriété 48 (cercle défini par son centre et son rayon)
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;\ y_\Omega)$ et de rayon R. Soit $M(x\,;\ y)$ un point. Alors

$$M \in \mathscr{C} \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

On dit que cette équation est une **équation cartésienne du cercle** $\mathscr{C}$.

Démonstration : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;\ y_\Omega)$ et de rayon R.
Soit $M(x\,;\ y)$ un point.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff M\Omega = R \\ &\iff M\Omega^2 = R^2 \\ &\iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2 \end{aligned}$$

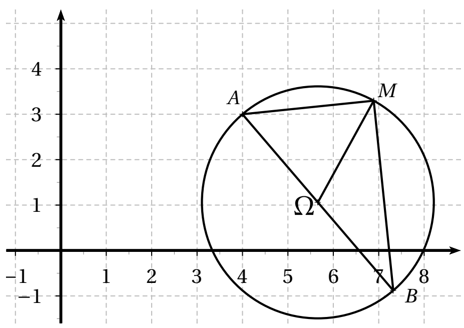
D'où le résultat. □

Propriété 49 (cercle défini par son diamètre)
Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point. Alors :

$$M \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Démonstration :
Géométrique Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point.

- Si $M = A$ ou $M = B$,
  alors M appartient au cercle $\mathscr{C}$;
  de plus, $\overrightarrow{MA}$ ou $\overrightarrow{MB}$ est nul
  et par conséquent $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- Si $M \neq A$ et $M \neq B$,
  $$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff MAB \text{ est un triangle rectangle en } M, \\ &\iff (MA) \perp (MB) \\ &\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0. \end{aligned}$$
  □



Démonstration :
Analytique. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0\\
&\iff x^2-(x_A+x_B)x+y^2-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+x_Ax_B+y_Ay_B=0\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-x_Ax_B-y_Ay_B\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{x_A^2+x_B^2+2x_Ax_B+y_A^2+y_B^2+2y_Ay_B-4x_Ax_B-4y_Ay_B}{4}\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{x_A^2+x_B^2-2x_Ax_B+y_A^2+y_B^2-2y_Ay_B}{4}\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\
&\iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

I.2. Exemples

I.2.a. Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;\,-3)$.
Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 3.

D'après la première propriété, le cercle $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne :
$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=3^2$$
soit
$$(x-1)^2+(y+3)^2=9$$
ou encore
$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=9$$
C'est-à-dire
$$x^2+y^2-2x+6y+1=0$$

I.2.b. Déterminer une équation de cercle défini par son diamètre

Dans un repère orthonormé, on considère les points $E(4\,;\,-2)$ et $F(-1\,;\,1)$.
Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[EF]$.
Soit $M(x;y)$ un point. D'après la deuxième propriété, on a : $M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$.
Or $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées $\binom{4-x}{-2-y}$ et $\overrightarrow{MF}$ a pour coordonnées $\binom{-1-x}{1-y}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C} &\iff (4-x)(-1-x)+(-2-y)(1-y)=0\\
&\iff -4-4x+x+x^2-2+2y-y+y^2=0\\
&\iff x^2-3x+y^2+y-6=0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne : $x^2-3x+y^2+y-6=0$.

I.2.c. Identifier un cercle d'après une équation

- Un cercle étant toujours entièrement déterminé par son centre et son rayon, dans un repère orthonormé, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ et de rayon R ($R>0$) a pour équation :
$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$
Après développement, on obtient une équation de la forme :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \text{ , avec } a, b, c \text{ réels.}$$

- La question se pose alors naturellement de savoir si, réciproquement, toute relation de la forme :
$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \text{ , avec } a, b, c \text{ réels.}$$
est une équation d'un cercle. On se propose d'étudier cette réciproque sur deux exemples.

Exemple 1
Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des points$M(x\,;\,y)$ vérifiant : $x^2+y^2-4x+6y-5=0$.
On peut écrire successivement :
$M \in \mathscr{E}_1 \iff (x^2-4x)+(y^2+6y)-5=0$
$\iff (x-2)^2-4+(y+3)^2-9-5=0$
$\iff (x-2)^2+(y+3)^2=18$.
Soit Ω le point de coordonnées $(2\,;\,-3)$; on a : $\Omega M^2=(x-2)^2+(y+3)^2$.
Ainsi : $M \in \mathscr{E}_1 \iff \Omega M^2=18$
ou encore : $M \in \mathscr{E}_1 \iff \Omega M=3\sqrt{2}$.
Par conséquent, $\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

Exemple 2
Soit $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant : $x^2+y^2-2x+5y+13=0$.
En procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve :
$$M(x\,;\,y) \in \mathscr{E}_2 \iff (x-1)^2+(y+2,5)^2=-5,75$$
Comme la somme de deux carrés est un réel positif, aucun point M ne vérifie la condition ci-dessus.
Par conséquent, $\mathscr{E}_2$ est l'ensemble vide.

Il résulte de ce qui précède que :

- Tout cercle a une équation de la forme :$x^2+y^2+ax+by+c=0$, avec a, b, c réels.
- L'énoncé réciproque est faux : l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avec a, b, c réels n'est pas toujours un cercle.

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 473.
1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(2\,;\,-4)$ et de rayon $R=2$.
2. Déterminer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Exercice 474. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$

a) de centre $\Omega(-3\,;\,4)$ et de rayon 5 ;
b) de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et passant par $A(4\,;\,-4)$;
c) de diamètre $[AB]$ avec $A(4\,;\,-4)$ et $B(8\,;\,1)$.

Exercice 475. On considère les points $A(10\,;\,7)$ et $B(4\,;\,-1)$.

1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B.

Exercice 476. Les équations suivantes sont des équations de cercle.
Donner le centre et le rayon de chaque cercle.

a) $(x-3)^2+(y-5)^2=12$

b) $(x+2)^2+y^2=4$

c) $x^2+y^2-4x+y-5=0$

d) $y^2=4-x^2$

Exercice 477. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que :

a) $x^2+y^2-3y=0$

b) $x^2+y^2-4x+8=0$

Exercice 478. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que :

a) $2x-5y+3=0$

b) $x^2-y+3x-4=0$

c) $2x^2+4y-1=0$

d) $x^2+y^2-6y-4=0$

Exercice 479. Soit $A(2\,;\,0)$, $B(-3\,;\,1)$ et Γ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $MA^2+MB^2=63$.

1. Vérifier que le point $C\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{9}{2}\right)$ appartient à Γ.
2. Déterminer une équation de Γ puis identifier Γ.

Fiche 5

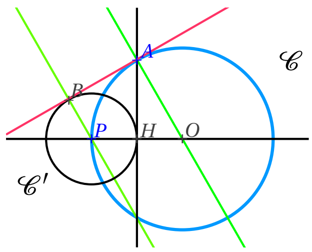
Géométrie plane Problèmes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 480.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ et l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $x^2+y^2=5$.
2. (a) Vérifier que le point $E(2\,;\,5)$ appartient à $\mathscr{C}$ et que le point $F(1\,;\,-2)$ appartient à $\mathscr{C}'$. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire sur ces cercles ?
3. (a) Montrer que si un point $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, alors $2x+y-5=0$.
   (b) Exprimer y en fonction de x et en déduire l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   (c) Qu'est la droite d'équation $2x+y-5=0$ pour ces deux cercles ? Le démontrer.

Exercice 481. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, et les points $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et $P(-1\,;\,0)$. Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OP), le cercle $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre P passant par H. La parallèle à (OA) passant par P coupe $\mathscr{C}'$ en B et B', B étant situé du même côté que A par rapport à (OP).



1. Émettre une conjecture sur la droite (AB).
2. Vérifier que P et A appartiennent à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation de la droite d parallèle à (OA) et passant par P.
4. Donner les coordonnées de H puis une équation du cercle $\mathscr{C}'$.
5. En déduire les coordonnées de B.
6. Démontrer la conjecture émise sur la droite (AB).

Exercice 482.

1. **Un exemple**.
   On considère la droite d d'équation cartésienne $2x-y+1=0$ et le point $M(1\,;\,2)$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d passant par M.
   (b) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite d et calculer la longueur HM.
2. **Une formule**.
   La droite d passe par A et $\vec{n}$ est un vecteur normal à d. H projeté orthogonal de M sur d.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\overrightarrow{HM}.\vec{n}$.

(b) En déduire que $HM = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$

(c) Retrouver, en appliquant cette formule, la distance HM obtenue à la question la question 1.

(d) Démontrer que la distance de $M_0(x_0; y_0)$ à la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est égale à

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice 483. $ABCD$ et $BEFG$ sont deux carré avec A, B, G alignés.
On prend comme unité de longueur BG et on se place dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BJ})$ tel que $C(0 ; c)$, avec $c > O$.
Lorsque ces deux droites sont sécantes, H est le point d'intersection de (DG) et (CF).

1. Faire une figure traduisant les données et placer le point J.
2. Donner les coordonnées de A, B, C, D, E, F et G.
3. Déterminer une équation cartésienne de (FC).
4. Déterminer une équation de (DG).
5. Lorsque ces deux droites sont sécantes, en déduire les coordonnées de H et étudier en fonction de c l'orthogonalité des droites (BH) et (CG).