Chapitre 2

Fiche 1

Généralités sur les suites

Activité d'introduction

Définir une suite est extrêmement simple : une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour une suite $u : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, il est d'usage de noter u_n le nombre $u(n)$.

Partie A - Situations conduisant à des suites

Exercice 43 - Une liste de nombres.
On considère la liste des multiples de 7 : $0,\ 7,\ 14,\ 21, \ldots$ que l'on note successivement $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$
Ainsi, $u_0 = 0,\ u_1 = 7,\ \ldots$.

1. Donner les valeurs de $u_3,\ u_4,\ u_{25},\ u_{100}$ et u_{286}.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 44 - Une situation géométrique.
Pour $n \geqslant 1$, on désigne par u_n le nombre de régions déterminées dans le plan par n droites en position générale (deux à deux sécantes, et trois à trois non concourantes).

1. À l'aide de dessins, vérifier que : $u_1 = 2,\ u_2 = 4$ et $u_3 = 7$.
2. Déterminer u_4 et u_5. Peut-on conjecturer les valeurs de u_6 et u_7 ?

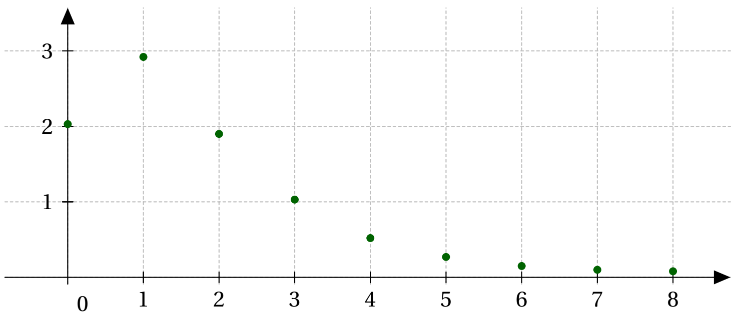
Exercice 45 - Des situations d'arithmétique.

1. On range les nombres premiers dans l'ordre croissant et on les désigne successivement par $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$. Déterminer p_n pour $1 \leqslant p_n \leqslant 16$.
2. On note d_n la n^e décimale du rationnel $\dfrac{1}{7}$. Déterminer $d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_{61}$ et d_{2002}.

Exercice 46 - Une formule explicite.
Soit $f(x) = x^2 + 1$; pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre $f(n)$.

1. Déterminer $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n.

Exercice 47 - Un graphique.
Sur le graphe ci-dessous, u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n ($n \in \mathbb{N}$).



Déterminer u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 8$.

Partie B - La notation indicielle

La notation indicée (ou indicielle) demande une certaine familiarisation.

Exercice 48 - Manipulation des indices.

1. Soit $u : n \longmapsto 2n^2 - 3$ une suite numérique. Exprimer en fonction de n les nombres u_n, u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n}, u_{n^2}, u_{2n+1} et u_{2n-1}.
2. Soit $v : n \longmapsto 3^n$ une suite numérique. Exprimer en fonction de v_n les nombres v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n-1} et v_{2n}.

Exercice 49 - Le bon choix.

Soit $v_n = 2^n$. Trouver, dans chaque cas, la bonne expression.

1. $v_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \square\ 2^n+1 \\ \square\ 2\times 2^n \\ \square\ 2^n+2 \end{array} \right.$

2. $v_{2n} = \left\{ \begin{array}{l} \square\ 2\times 2^n \\ \square\ 2^{2n} \end{array} \right.$

3. $v_{n-1} = \left\{ \begin{array}{l} \square\ 2^n-1 \\ \square\ 2^n-2 \\ \square\ 0,5v_n \end{array} \right.$

4. $v_{2n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \square\ 2\times 4^n \\ \square\ 2\times 2^n+1 \\ \square\ 2\times 2^n+2 \end{array} \right.$

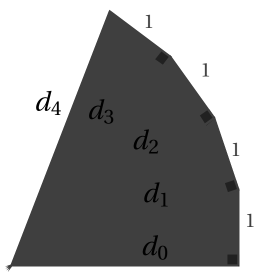
Partie C - Suites définies par récurrence

Exercice 50.

Sur la figure suivante, la suite des nombres $(d_0,\ d_1,\ d_2,\ \dots)$ se trouve entièrement déterminée par les conditions :

$$\begin{cases} d_0 = 3 \\ d_{n+1} = \sqrt{1+d_n^2} \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

qui permettent de calculer tous les termes de proche en proche. Nous dirons que la suite est **définie par récurrence**. L'égalité qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent est appelée **relation de récurrence**.



1. **Calcul exact des termes de la suite (d_n)**
   Calculer d_1, d_2 et d_3.
2. **Calcul des termes de la suite (d_n) à l'aide de la calculatrice**
   (a) A l'écran de votre calculatrice, taper 3 puis $enter$, taper ensuite $\sqrt{1+ans^2}$ où ans désigne la réponse du dernier calcul effectué par la calculatrice et valider par $enter$,appuyer ensuite successivement sur $enter$ le nombre de fois souhaité pour obtenir les 10 premiers termes de la suite.
   (b) Conjecturer l'expression de d_n en fonction de n.

Fiche 2

Généralités sur les suites

Définir une suite réelle

I. Généralités

Définition 3
Une suite réelle (ou suite numérique) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

On note souvent u_n au lieu de $u(n)$ l'image de n par u. u_n est un nombre réel appelé terme général de la suite ou terme d'indice n ou terme de rang n.
La suite (c'est-à-dire la fonction) est notée u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

— La notation (u_n) est une abréviation de $(u_0,\ u_1,\ u_2,\dots)$.

— Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ n'est définie qu'à partir de $n = 1$. La suite u se note alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

— Si une suite u est définie à partir du rang 0, le terme de rang 0 (c.-à-d. u_0) est le premier terme de la suite ; le terme de rang 1 (c.-à-d. u_1) est le deuxième terme de la suite.
Si une suite u est définie à partir du rang 2, le terme de rang 2 (c.-à-d. u_2) est le premier terme de la suite ; le terme de rang 3 (c.-à-d. u_3) est le deuxième terme de la suite.

— Attention à ne pas confondre :

  — (u_n) : la suite (i.e. la fonction),

  — u_n : le terme général (i.e. l'image de n, un nombre réel).

— Attention à la signification des indices : $u_{n+1} \neq u_n + 1$

  — u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$ (terme qui suit u_n),

  — $u_n + 1$ est la somme du terme d'indice n et de 1.

II. Modes de génération d'une suite

II.1. Moyens élémentaires

— Une phrase
Exemple : « on considère la suite des multiples de 7 » définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = 7n$.

- Une situation géométrique
  Exemple : voir activité d'introduction Exercice 38.
- Un graphique
  Exemple : voir activité d'introduction Exercice 41.

II.2. 1er moyen classique : une formule explicite

Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est exprimé en fonction de n et indépendamment des autres termes de la suite, on dit que u est définie de manière explicite. On peut, dans ce cas, calculer directement chaque terme à partir de son indice.

Exemples
- $u_n = \dfrac{1}{n}$; $n \geqslant 1$
- $u_n = 2n+1$; $n \geqslant 0$
- $u_n = n^2+1$; $n \in \mathbb{N}$ (activité d'introduction Exercice 40.)
- et plus généralement :
  $u_n = f(n)$; $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
  Tous les renseignements sur f (sens de variation, extremum, graphique...) servent alors pour la connaissance de la suite.

II.3. 2e moyen classique : une relation de récurrence

On dit qu'une suite u est **définie par récurrence** lorsqu'elle est définie par :

$$\begin{cases} \text{- la donnée de ses premiers termes} \\ \text{- une relation exprimant chaque autre terme en fonction des termes précédents} \end{cases}$$

Pour calculer la valeur d'un terme, il faut procéder de proche en proche ; le calcul d'un terme nécessite d'avoir calculé les termes précédents.

Exemples
- (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \quad n \geqslant 1 \end{cases}$
  est la suite donnant le nombre de régions du plan délimitées par n droites en « position générale » (voir activité d'introduction 1.2.).
- (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$ est la suite des nombres impairs.
- (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$ dont les premiers termes sont :
  $u_2 = u_1 + u_0 = 2+1 = 3$
  $u_3 = u_2 + u_1 = 3+2 = 5$
- et plus généralement :
  soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction ; soit $a \in I$.
  On peut considérer la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercices

Suites définies explicitement

Exercice 51. Pour chacune des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{10}.

a. $u_n = 4n+5$

b. $u_n = n^2$

c. $u_n = (-2)^n$

d. $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

Exercice 52. Pour chacune des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{100}. On donnera les valeurs exactes ou arrondies au centième ou à $0,1 \times 10^{60}$ si nécessaire.

a. $u_n = 4^n - 3n$

b. $u_n = 1,05^n$

c. $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $u_n = 2 + (-1)^n$

Exercice 53. Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n avec, pour tout $n \geqslant 0$:

a. $u_n = 4n+2$

b. $u_n = n^2 + 4n$

c. $u_n = (-1)^n$

d. $u_n = 2^{n-1}$

Exercice 54. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = n^2 + 2n$.
Exprimer v_{n+1}, v_{2n} et v_{n+4} en fonction de n.

Exercice 55. Dans chacun des cas suivants, préciser à partir de quel rang la suite de terme général u_n est définie.

a. $u_n = \sqrt{2n-7}$

b. $u_n = \dfrac{n+1}{n-5}$

c. $u_n = \sqrt{n^2+n-12}$

d. $u_n = \dfrac{n-6}{n^2-2001}$

e. $u_n = \dfrac{1}{3^n-3}$

f. $u_n = \sqrt{2^n - 1000}$

Exercice 56. La suite (u_n) est définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = n^3 - 6n^2 + 12n - 8$.
Exprimer u_{n+2} en fonction de n

Exercice 57. Si pour tout entier n, $u_{n+1} = 2^{3n+2}$, que vaut u_n pour $n \geqslant 1$?

Exercice 58. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2024}$.

Exercice 59. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par :

$$u_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n)$$

1. Combien de termes comporte cette somme ?
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 60. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+1}{n}$.

1. Calculer les six premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Est-il honnête de présenter la suite (v_n)par ses six premiers termes ?

Exercice 61. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par son terme général :

$$u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une autre formule explicite pour u_n.
3. Calculer u_5 et u_6. La formule conjecturée est-elle exacte ?

Attention :
Les deux derniers exercices doivent nous alerter sur un point essentiel : la donnée des premiers termes d'une suite peut permettre des conjectures, mais ne démontre rien concernant son terme général, son comportement global, etc.

Suites récurrentes

Exercice 62. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{n+1} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 63. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = 4u_{n-1} + 2n \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1} - 3 \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 64. Donner les valeurs de $\cancel{u_1}$, u_2, u_3, u_4 et u_5.

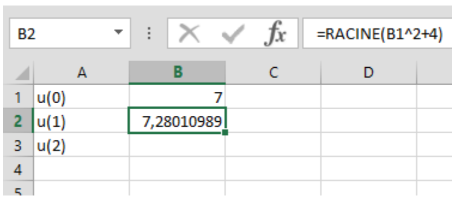
a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 65.

1. Pour chacune des suites de l'exercice 56, écrire la relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
2. Pour chacune des suites de l'exercice 57, écrire la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

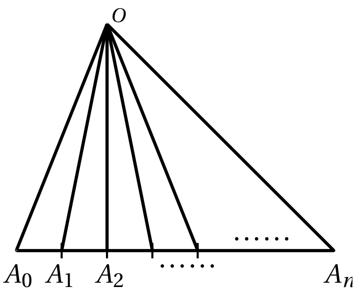
Exercice 66. Si l'on étend vers le bas la formule écrite en B2, on obtient les termes d'une suite (u_n).


B2 =RACINE(B1^2+4)

	A	B	C	D
1	u(0)	7		
2	u(1)	7,28010989		
3	u(2)			
4				
5				

Définir (u_n) par récurrence.

Exercice 67. Dans la figure suivante, u_n est le nombre de triangles dont un sommet est le point O et les deux autres sont deux des points parmi A_0, A_1, ...et A_n.



1. Vérifier que $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_{n+1} = u_n + n + 1$$
3. En déduire les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

Exercice 68. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Calculer v_1 et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
2. En déduire que la suite (v_n) est la suite (u_n) de l'exercice précédent.

Mode de génération

Dans les exercices 63 à 67 , expliciter les six premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 69. u_n est le carré du n-ième nombre premier.

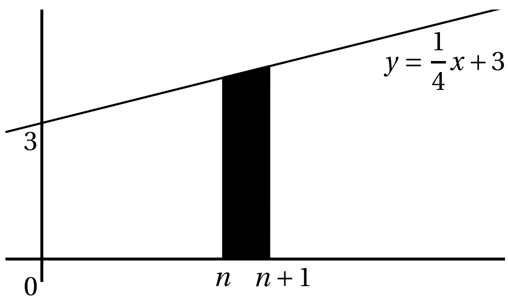
Exercice 70. u_n est le le chiffre des unités de 8^n.

Exercice 71. u_n est le n-ième chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\dfrac{7}{11}$.

Exercice 72. u_n est la somme des inverses des n premiers entiers naturels non nuls.

Exercice 73. u_n est le reste de la division euclidienne de $4n+5$ par 6.

Exercice 74. Sur la figure suivante, u_n est l'aire du domaine coloré.



1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer géométriquement $u_0 + u_1 + \cdots + u_{39}$.

Fiche 3

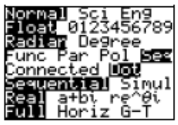
Généralités sur les suites

Prise en main des menus de la calculatrice

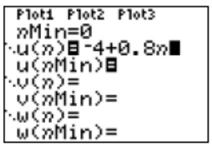
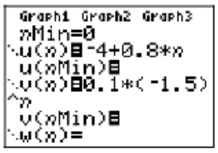
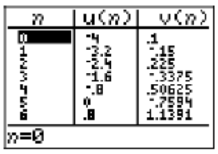
Suites	Prise en main des menus suite	TI-83+

?	1°) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$. Calculer les 15 premiers termes de chaque suite. 2°) Les suites (u_n) et (v_n) peuvent être définies par récurrence par les relations : $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$. En déduire une autre méthode calcul des 15 premiers termes de chaque suite. 3°) Afficher les valeurs u_{31} et v_{25}. 4°) Représenter graphiquement les suites u et v par un nuage de points.	**?**

Accès au mode suites

Touche **MODE**. Choisir sur la troisième ligne **Seq** et appuyer sur **ENTER**. Choisir sur la quatrième ligne **Dot** et appuyer sur **ENTER**.	

1°) Utiliser le terme général

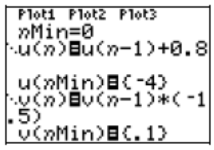
On a $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$ •Touche **Y=** .On obtient l'écran suivant (saisir éventuellement *n* Min = 0). Introduire la suite *u*. Pour la variable *n*, utiliser la touche **X,T, θ, n**. Valider avec la touche **ENTER**. Même opération pour la suite *v*. •Régler les paramètres de la table comme sur l'écran ci-contre Instruction **TBL SET** (touches **2nd** et **WINDOW**). •Afficher la table de valeurs Instruction **TABLE** (touches **2nd** et **GRAPH**). *→ Les suites u et v étant définies par une relation explicite, la donnée de u(nMin) et de v(nMin) n'est pas obligatoire.* *⇔i des valeurs de u(nMin) et de v(nMin) sont saisies, elles apparaissent dans la table sans conséquences sur les autres valeurs de u_n.*	

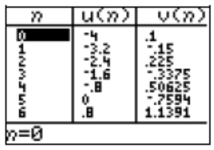
2°) Utiliser la relation de récurrence

Sur la calculatrice il faut exprimer u_n en fonction de u_{n-1}
Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ devient $u(n) = u(n-1) + 0{,}8$
et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$ devient $v(n) = v(n-1) \times (-1{,}5)$

• Touche **Y=** puis **CLEAR** pour effacer la suite déjà saisie.
Introduire les deux relations de récurrence :
→ n s'obtient avec la touche **X,T, θ, n**.
→ u et v s'obtiennent avec les touches **2nd** **7** ou **2nd** **8** .
Compléter *u(nMin)* et de *v(nMin)* par –4 et 0,1. Valider avec **ENTER**.

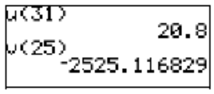
• Régler les paramètres et afficher la table de valeurs la table comme ci-contre.





3°) Afficher un terme de la suite

Retour à l'écran de calcul . Instruction **QUIT** (touches **2nd** et **MODE**).
Saisir les séquences suivantes :
2nd **7** **(** **3** **1** **)** **ENTER** et **2nd** **8** **(** **2** **5** **)** **ENTER**.



4°) Représentation graphique

• Ouvrir la fenêtre d'affichage :Touche **WINDOW**.

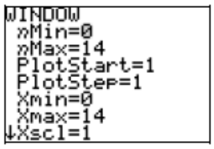
Régler les paramètres comme sur les écrans ci-contre.
Touches **⋀** et **⋁** pour passer d'une ligne à l'autre.

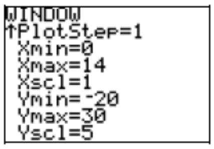
Touche **GRAPH** pour obtenir la représentation ci-contre.

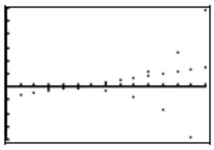
• La touche **TRACE** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés.

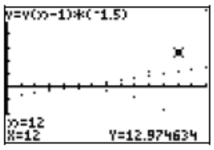
Les touches **<** et **>** permettent de passer d'un point à l'autre.

Les touches **⋀** et **⋁** permettent de passer d'une suite à l'autre.

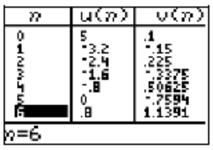
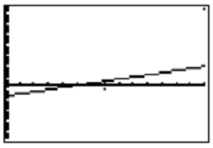
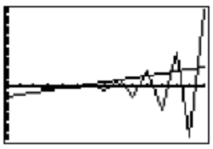
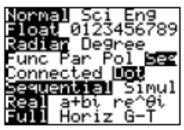








⟹ *Problèmes pouvant être rencontrés*

Problème rencontré	*Comment y remédier*
Valeur de u_0 incorrecte 	Touche **Y=** puis saisir la bonne valeur dans *u*(*n*Min) (ou pour **CLEAR** effacer la valeur erronée).
	Les suites ont été saisies en mode fonction. La calculatrice trace une droite pour *u* et ne sait pas calculer v_x pour *x* réel.
Points reliés 	Touche **MODE**. Choisir sur la cinquième ligne **Dot** . et appuyer sur **ENTER**. 

Suites	**Prise en main des menus suites**	CASIO GRAPH 35+

1°) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$. Calculer les 15 premiers termes de chaque suite.
2°) Les suites (u_n) et (v_n) peuvent être définies par récurrence par les relations : $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$. En déduire une autre méthode calcul des 15 premiers termes de chaque suite.
3°) Afficher les valeurs u_{31} et v_{25}.
4°) Représenter graphiquement les suites u et v par un nuage de points.

Accès au mode suites

Touche MENU icône  Appuyer sur **EXE**

La calculatrice note a_n et b_n les deux suites au lieu de u_n et v_n.

1) En utilisant le terme général

On a $a_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $b_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$

- On obtient l'écran suivant.

Sélectionner le sous-menu TYPE (touche **F3**) et choisir l'instruction an (touche **F1**).

Introduire la suite a . Pour la variable n, utiliser l'instruction **n** (touche **F4**) Valider avec la touche **EXE**.

Même opération pour la suite b Valider avec la touche **EXE**.

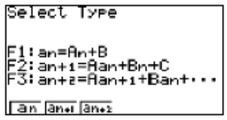
→ *Commentaire : Les suites a et b sont ici définies par une relation explicite, la donnée de a_0 et b_0 n'est donc pas obligatoire.*

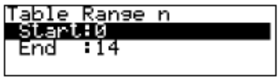
•Régler les paramètres de la table comme sur l'écran ci-contre

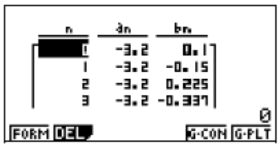
Instruction **RANG** (touche **F5**).

•Afficher la table de valeurs

Instruction **TABLE** (touche **F6**).







2) En utilisant la relation de récurrence

On a $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ soit $a_{n+1} = a_n + 0.8$
et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$ soit $b_{n+1} = b_n \times (-1{,}5)$

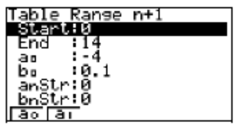
- Sélectionner le sous-menu **TYPE** (touche **F3**) et choisir l'instruction a_{n+1} (touche **F2**).

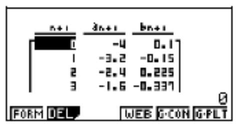
Introduire les deux relations de récurrence : utiliser l'instruction na_n (touche **F4**) et choisir a_n (touche **F2**) et b_n (touche **F3**).

Valider avec la touche **EXE**.

•Régler les paramètres de la table comme ci-contre.

•Afficher la table de valeurs comme ci-contre.

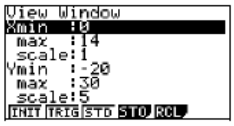




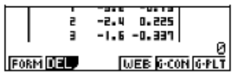
3) Représentation graphique

•Régler la fenêtre d'affichage :
instruction **V-Window** (touches **SHIFT** **F3**).

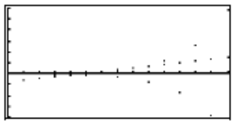
Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre.
Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.



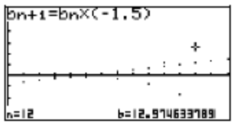
Puis touche **EXIT** puis instruction **TABL** (touche **F6**).



Puis choisir **G-PLT** (touche **F6**).

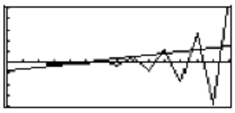


On obtient la représentation ci-contre



•L'instruction **TRACE** (touche **F1**) permet d'obtenir les coordonnées des points représentés.
Les touches < et > permettent de passer d'un point à l'autre.
Les touches ⋀ et ⋁ permettent de passer d'une suite à l'autre.

⟹ *Problèmes pouvant être rencontrés*

Problème rencontré	*Comment y remédier*
Points reliés 	Dans le sous-menu TABL , sélectionner G-PLT

Fiche 4

Généralités sur les suites

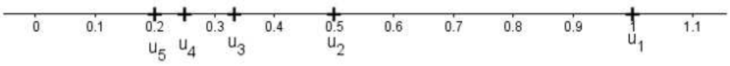
Représentations graphiques

On peut représenter une suite u :

I. En plaçant sur un axe les points d'abscisse u_n , $n \in \mathbb{N}$

Exemple : soit (u_n) définie par :

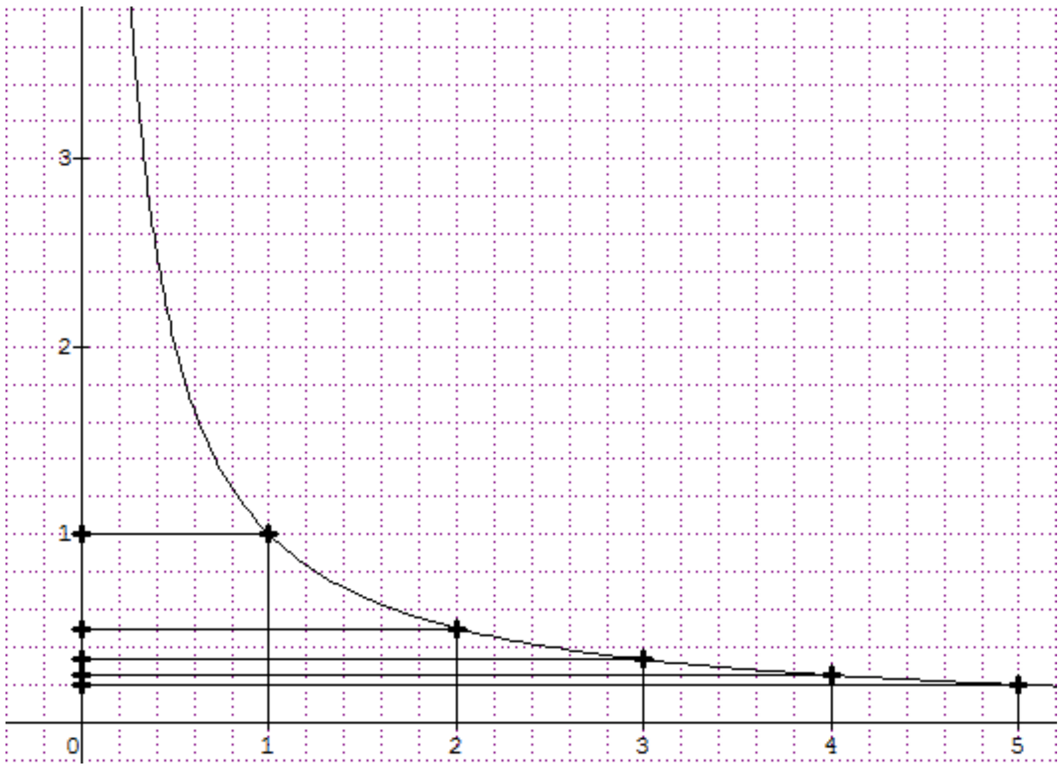
$$u_n = \frac{1}{n} \ ; \ n \geqslant 1$$



II. En plaçant dans un repère les points de coordonnées $(n \ ; \ u_n)$

— **Suite donnée par son terme général**
Exemple :
Soit (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \ ; \ n \geqslant 1$$

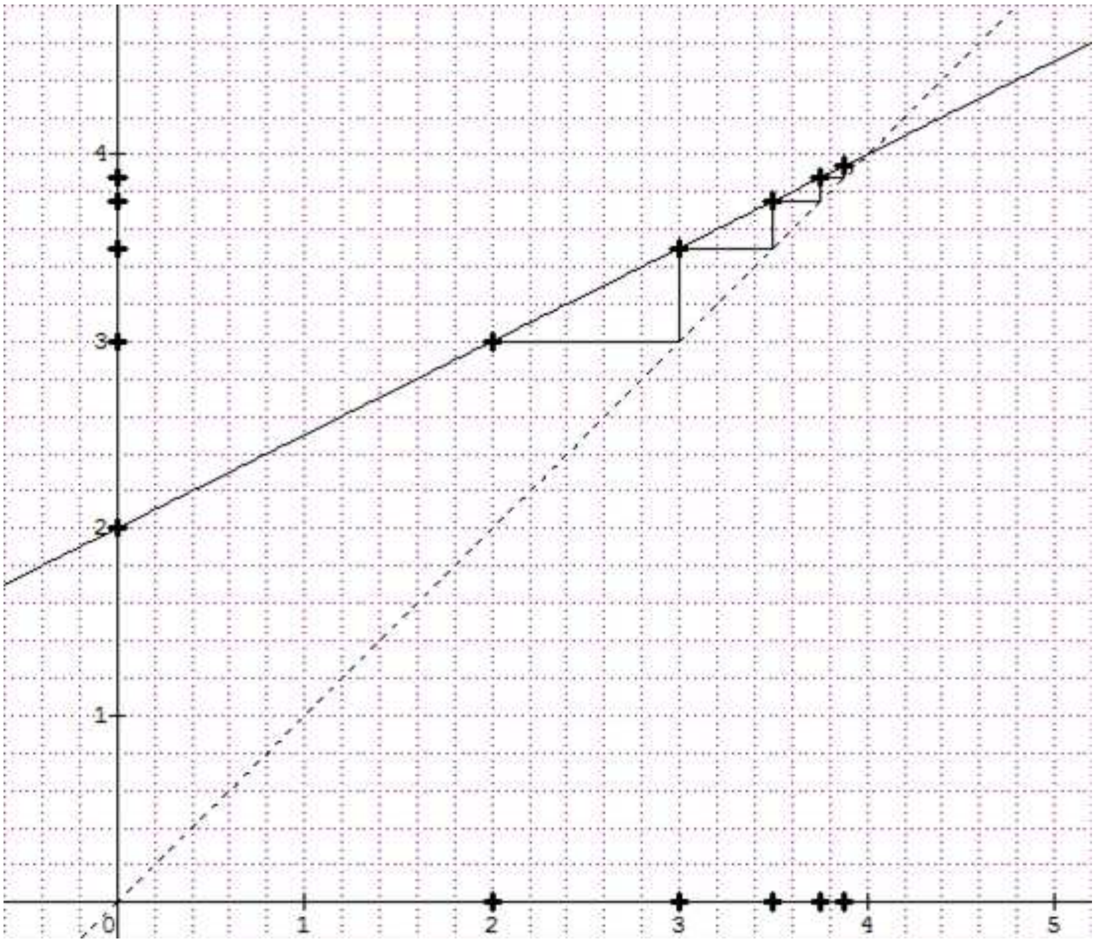


Les termes de la suite sont les ordonnées des points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses entières.

— **Suite donnée sous forme récurrente**

Exemple : Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

u_n est défini par $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \geqslant 0$ avec $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + 2$; $x \in \mathbb{R}$.

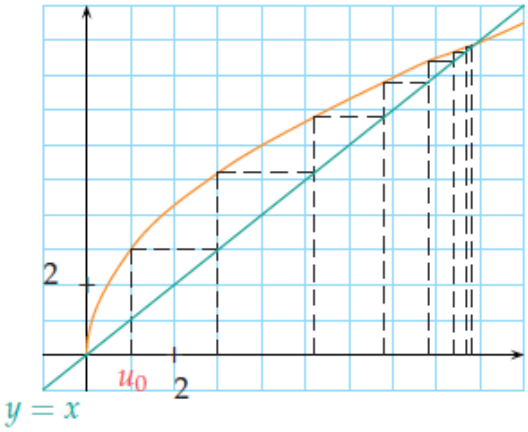


Méthode de construction :

- On trace la droite (d) : $y = \frac{1}{2}x + 2$ et la première bissectrice d'équation $y = x$.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
  $u_1 = f(u_0)$, donc u_1 est l'ordonnée du point de (d) qui a pour abscisse u_0.
- On recommence le procédé pour construire u_2.
  - Il faut commencer par placer u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, on « reporte » u_1 - qui est placé sur l'axe des ordonnées - en utilisant la droite d'équation $y = x$.
  - $u_2 = f(u_1)$, donc u_2 est l'ordonnée du point de (d) qui a pour abscisse u_1.
- On poursuit ainsi.

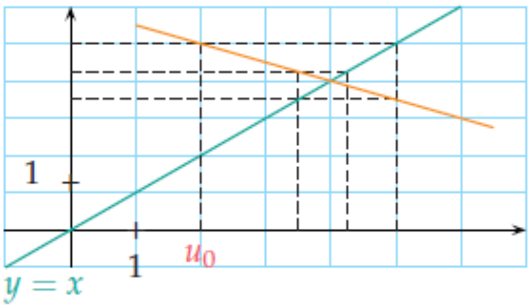
Exercices

Exercice 75. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geqslant 0 \end{cases}$.
On a construit ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n).



Lire graphiquement une valeur approchée de u_4.

Exercice 76. On a construit ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n).
Lire graphiquement une valeur approchée de u_3.



Exercice 77. Représenter graphiquement les trois premiers termes des suites ci-dessous définies par :

1. $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $u_n = \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $u_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

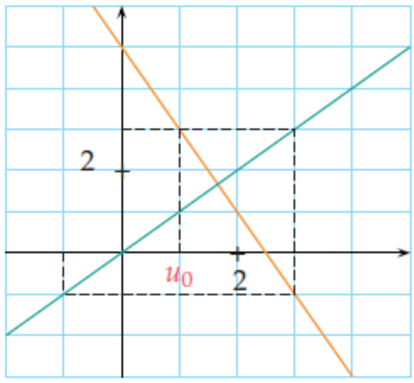
Exercice 78. Représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites définies ci-dessous dans un repère adapté :

1. $u_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{2}n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $u_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 79. Construire les trois premiers termes des suites définies pour tout entier naturel n par les relations de récurrence suivantes :

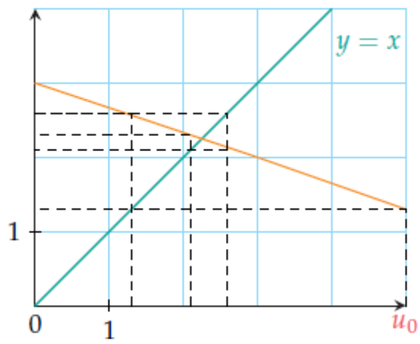
1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \ ; \ n \geqslant 0 \end{cases}$
dans un repère orthogonal (1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour deux unités en ordonnée).
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 5 \ ; \ n \geqslant 0 \end{cases}$
dans un repère orthonormé d'unité 1 cm .

Exercice 80. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Quelle relation de récurrence définit (u_n) ?
3. Lire graphiquement la valeur de u_2.
4. Vérifier par le calcul.

Exercice 81. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Quelle relation de récurrence définit (u_n) ?
3. Lire graphiquement la valeur de u_2.
4. Vérifier par le calcul.

Fiche 5

Généralités sur les suites

Représentations graphiques de suites à la calculatrice

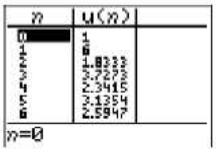
Suites	Représentations graphiques	TI-84+ français

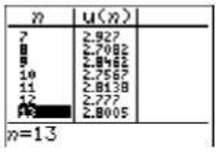
On considère la suite u définie par: $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \frac{5}{u_n}$

1°) Réaliser une table des valeurs des nombres u_n . Conjecturer le comportement de la suite u.
2°) Obtenir les points de coordonnées $(n,\ u_n)$ pour n entre 0 et 10. Peut-on préciser la conjecture ?
3°) Réaliser la construction sur l'axe des abscisses des premiers termes de la suite u. Peut-on préciser la conjecture ?

Tabuler la suite

Saisir la suite u
Régler les paramètres de la table et afficher les valeurs des termes u_n.
On observe une stabilisation « alternée » autour de 2,8.





Représentation graphique par un nuage de points

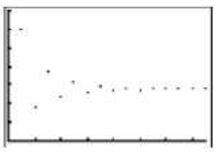
Régler la fenêtre d'affichage :Touche **WINDOW**.

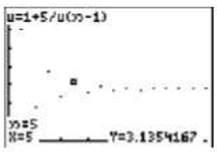
Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre.
Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.

Puis touche **graphe**. On obtient la représentation ci-contre

La touche **trace** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés. Les touches < et > permettent de passer d'un point à l'autre.

Même stabilisation observée





Représentation graphique en escalier

Instruction FORMAT (touches 2ND et ZOOM) et sur la première ligne, choix **Esc** (escalier).

Régler la fenêtre d'affichage comme ci-contre.

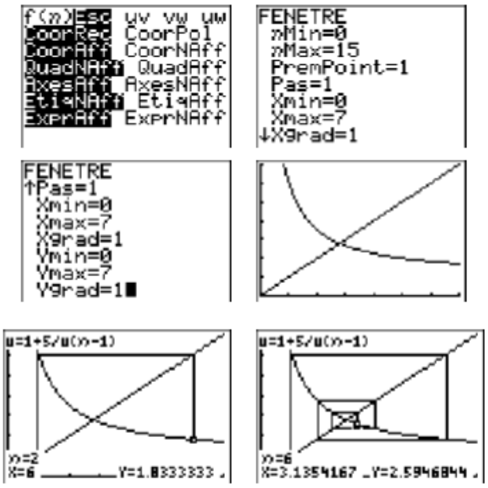
Puis touche GRAPH

La calculatrice affiche alors la courbe d'équation $y = 1 + \frac{5}{x}$ et la droite d'équation $y = x$.

Activer la fonction TRACE. Chaque appui sur la touche ▶ permet de visualiser une étape de la construction des termes de la suite u.
La suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$.

→: la lecture du terme u_n se fait en y lors de l'affichage de la valeur de n.

→: pour effacer une construction instruction DRAW (2ND PRGM *)et choix* **1 : EffDessin**



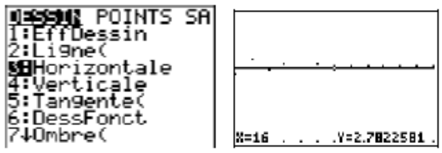
⇒ *Compléments*

Préciser la conjecture sur le nuage de points

Sur l'écran graphique on peur placer une ligne horizontale mobile qui permet de tester d'éventuelles valeurs de limites :

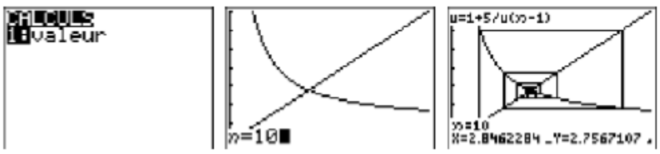
Instruction DRAW (2ND PRGM)

puis choix **3 : Horizontale**
La ligne obtenue se déplace avec les curseurs ▲ et ▼ son équation se lit à l'écran.



Construction en escalier jusqu'à un rang donné

En mode suite et format escalier l'instruction CALC (touches 2ND et TRACE) puis choix **1 : valeur** permet de lancer la construction jusqu'à la valeur de n affichée (ici n = 10). La valeur de u_n est lue en Y. Une construction antérieure doit être effacée.



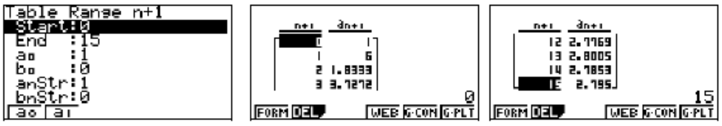
Suites	Représentations graphiques	CASIO GRAH 35 +

On considère la suite u définie par: $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{5}{u_n}$

1°) Réaliser une table des valeurs des nombres u_n . Conjecturer le comportement de la suite u.
2°) Obtenir les points de coordonnées (n, u_n) pour n entre 0 et 10. Peut-on préciser la conjecture ?
3°) Réaliser la construction sur l'axe des abscisses des premiers termes de la suite u. Peut-on préciser la conjecture ?

Tabuler la suite

Saisir la suite u
Régler les paramètres de la table et afficher les valeurs des termes u_n.
On observe une stabilisation « alternée » autour de 2,8.



Représentation graphique par un nuage de points

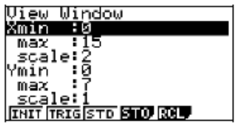
Régler la fenêtre d'affichage : Instruction **V-Window**.

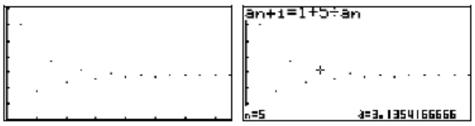
Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre.
Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.

Puis dans le sous-menu **TABL**, choisir l'instruction **G.PLT** (touche **F6**).
On obtient la représentation ci-contre

L'instruction **Trace** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés. Les touches < et > permettent de passer d'un point à l'autre.

Même stabilisation observée





Représentation graphique en escalier

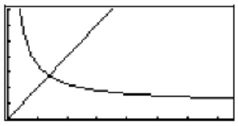
Dans le sous-menu **TABL** choisir l'instruction **WEB** (touche **F4**).
La calculatrice affiche alors la courbe d'équation $y = 1 + \dfrac{5}{x}$ et la droite d'équation $y = x$.

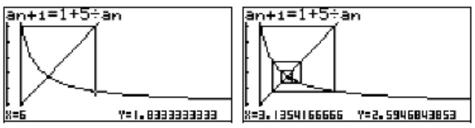
Chaque appui sur la touche **EXE** permet de visualiser une étape de la construction des termes de la suite u.

La suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$.

→ *la lecture du terme u_n se fait en x.*

→ *pour effacer une construction touches* **F4** *puis sélectionner* **Cls**





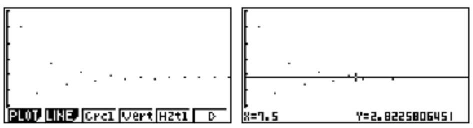
⇒ *Compléments*

Préciser la conjecture sur le nuage de points

Sur l'écran graphique on peut placer une ligne horizontale mobile qui permet de tester d'éventuelles valeurs de limites :

Instruction **Sketch** (touche **F4**).

puis choisir **HZtl touches F6 puis F5**
La ligne obtenue se déplace avec les curseurs ⋀ et ⋁ son équation se lit à l'écran.



Fiche 6

Généralités sur les suites

Suites numériques et algorithmique

I. Exercices

Exercice 82. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. L'algorithme ci-dessous affiche la valeur du terme u_N de cette suite lorsque l'on saisit la valeur de N.

Variables	U est un réel
	N est un entier naturel
Entrée	Saisir N
Traitement	U prend la valeur $3 \times N - 5$
Sortie	Afficher U

1. Quelle valeur est affichée en sortie pour $N = 6$?
2. Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?

Exercice 83. Soit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = n^2 - 3n + 1$ et $v_n = (u_n)^2$ et $w_n = v_n - u_n$.

Variables	u, v et w sont des réels
	p est un entier naturel
Entrée	Saisir ....
Traitement	Affecter à u la valeur ....
	Affecter à v la valeur ....
	Affecter à w la valeur ....
Sortie	Afficher ....

1. Calculer u_4, v_4 et w_4.
2. Compléter l'algorithme ci-dessus afin qu'il affiche la valeur des termes u_p, v_p et w_p lorsque l'on saisit la valeur de p.

Exercice 84. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = 2u_n$.

1. On a calculé u_3 et trouvé $u_3 = 6$. Calculer u_4 et v_4.
2. Léo veut écrire un algorithme qui affiche la valeur des termes u_{n+1} et v_{n+1} quand on entre la valeur de u_n. Il propose l'algorithme ci-dessous.

Variables	u et v sont des réels
Entrée	Saisir u
Traitement	u prend la valeur $u + 2$
	v prend la valeur $2u$
Sortie	Afficher u et v

(a) Qu'affiche cet algorithme quand on entre la valeur de u_3, soit 6 ?

(b) Ces résultats sont-ils ceux que l'on attend ?

(c) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

Exercice 85. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = 3n - 5$.

1. Calculer U_0 et U_1.
2. On donne ci-dessous un algorithme. On saisit $N = 5$.

Variables	U est un réel
	I et N sont des entiers naturels
Entrée	Saisir N
Traitement	**Pour** I variant de 0 à N **faire**
	U prend la valeur $3 \times I - 5$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

(a) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I	0	1	2			
Valeur de U	-5	-2				

(b) Quelle valeur affiche l'algorithme en Sortie ? À quoi correspond-elle ?

Exercice 86. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 1$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. On donne ci-dessous un algorithme.

Variables	U est un réel
	I et N sont des entiers naturels
Entrée	Saisir N
Initialisation	U prend la valeur 2
Traitement	**Pour** I variant de 1 à N **faire**
	| U prend la valeur $2 \times U - 1$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

   (a) Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 4$ en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I		1	2		
Valeur de U	2	3			

   (b) Quelle(s) valeurs(s) affiche l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N=4$?

3. On modifie la phase de traitement de l'algorithme en déplaçant l'instruction « Afficher U » comme ci-contre. Quelle(s) valeurs(s) affiche alors l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N = 4$?

Pour I variant de 1 à N **faire**
| U prend la valeur $2 \times U - 1$
| Afficher U
Fin Pour

4. Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.
   (a) Dans la question 2, l'algorithme affiche :
   - ☐ la valeur de U_N
   - ☐ la valeur de U_{N+1}
   - ☐ toutes les valeurs de U_1 à U_N
   - ☐ toutes les valeurs de U_0 à U_N

   (b) Dans la question 3, l'algorithme affiche :
   - ☐ la valeur de U_N
   - ☐ la valeur de U_{N+1}
   - ☐ toutes les valeurs de U_1 à U_N
   - ☐ toutes les valeurs de U_0 à U_N

Exercice 87. Une commune disposait de 200 vélos en libre-service au 1er janvier 2015. Elle estime que, chaque année, 15% des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $(2015 + n)$.

On a ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.
On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation	N prend la valeur 0
	U prend la valeur 200
Traitement	**Tant que** $N < 4$ **faire**
	| U prend la valeur $0{,}85 \times U + 42$
	| N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher U

1. Compléter le tableau ci-dessous. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de U	200	212			
Valeur de N	0	1			
Condition $n < 4$	vraie				

2. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?
3. Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

Exercice 88. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{est impair} \end{cases}$$

1. (a) Calculer les termes u_1 à u_8 de la suite (u_n).
   (b) Quels seront les termes suivants de la suite (u_n) ?
2. La suite (u_n) est appelée suite de Syracuse. On conjecture que, quelle que soit la valeur de u_0, il existe au moins un entier naturel k tel que $u_k = 1$ (ce résultat n'est toujours pas démontré). Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche, lorsque l'on entre la valeur de u_0, la plus petite valeur de k pour laquelle $u_k = 1$.

Variables	k est un entier naturel et U est un nombre réel
Entrée	Saisir U
Initialisation	k prend la valeur 0
Traitement	**Tant que** .... **faire**
	| **Si** U est pair
	| | **Alors** U prend la valeur ....
	| | **Sinon** U prend la valeur ....
	| **Fin Si**
	| k prend la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

Fiche 7

Généralités sur les suites

Approfondissements

I. Exercice résolu

Trouver une formule explicite de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}.$$

Recherche d'une conjecture raisonnable

Tout commence par un examen des premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{11}$

Nous observons une certaine régularité :

- lorsque n est pair, u_n est de la forme $\frac{2n}{n+1}$;
- lorsque n est impair, c'est moins explicite, mais le numérateur est n. Essayons, pour obtenir encore un un numérateur égal à $2n$, de modifier les fractions : nous obtenons alors la suite : 0, $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{7}, \frac{14}{8}, \frac{16}{9}, \ldots$
  Nous pouvons donc conjecturer que $u_n = \frac{2n}{n+1}$ pour tout n.

Solution rédigée

Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \frac{2n}{n+1}$.

- d'une part, $v_0 = 0$
- d'autre part, $\frac{4}{4 - v_n} = \frac{4}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{4(n+1)}{2n+4} = \frac{2(n+1)}{n+2} = v_{n+1}$.
  La suite (v_n) vérifie donc la même relation de récurrence que (u_n).

On admet le théorème suivant :

> Deux suites ayant le même terme initial et vérifiant la même relation de récurrence sont égales.

On peut alors appliquer ce théorème pour ces deux suites : pour tout n entier naturel , $u_n = v_n = \frac{2n}{n+1}$

II. Exercices

Recherche de formules explicites

Exercice 89. Trouver une formule explicite des suites (u_n) et (d_n) définies par :

- $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$
- $\begin{cases} d_0 = 3 \\ d_{n+1} = \sqrt{1+d_n^2} \end{cases}$

Exercice 90. Pour chacune des suites suivantes :

- Calculer les cinq premiers termes et conjecturer une formule explicite de u_n.
- Valider cette conjecture.

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1 \end{cases}$
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$
3. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
4. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
5. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4 \end{cases}$
6. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{11} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$
7. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
8. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)^2 \end{cases}$
9. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

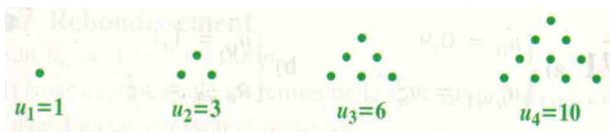
Exercice 91. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$

1. Lorsque $u_0 = 0$, calculer les premiers termes, conjecturer, valider.
2. Lorsque $u_0 = 1$, démontrer que $u_n = 2^n + n$.
3. Lorsque $u_0 = 6$, démontrer que $u_n = 3 \times 2^{n+1} + n$.

Exercice 92. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{6}(n^2 - 3n + 8) \end{cases}$

1. Calculeru_2,u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturer une formule explicite de u_n.
3. Calculer u_6. Alors ?

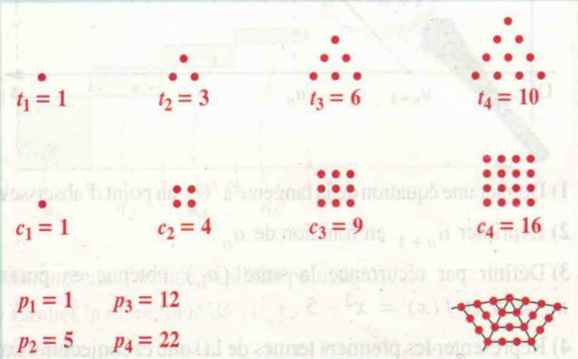
Exercice 93. On considère la suite (u_n) où u_n est le nombre de points d'un réseau triangulaire à n étages comme sur la figure ci-dessous.



1. Calculer u_5, u_6 et exprimer u_{n+1}en fonction de u_n et de n.
2. On conjecture une formule de la forme $u_n = an^2 + bn + c$. Calculer a, b et c.
3. Démontrer cette conjecture. **Grand oral : Vous pouvez vous intéresser aux nombres polygonaux.**

Pythagore, Gourou des nombres

Né à Samos (VIe siècle av. J.-C.), Pythagore fonde à Crotone (Sud de l'Italie) une secte qui mêle science et religion et qui développe une conception à la fois mystique et géométrique des nombres. Ainsi les Pythagoriciens développent-ils une classification des entiers en fonction de certains assemblages : les nombres triangulaires t_n.



On définit de même la suite des nombres « n-gonaux ». Le tableau ci-dessous rassemble les premières valeurs :

Nombre	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
triangulaire	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
octogonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
nonagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
décagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Si u_n et v_n désignent respectivement le n-ième nombre $(k-1)$-gonal et k-gonal, on peut vérifier, par exemple que :
$v_n = u_n + t_{n-1}$; $v_n = t_n + (k-3)t_{n-1}$;
$v_n = n + (k-2)t_{n-1}$; etc.

Représentation graphique des termes d'une suite définie par récurrence

Exercice 94. Pour chacune des suites suivantes; représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$
3. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$
4. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$
5. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
6. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = -1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
7. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,9 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
8. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,1 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

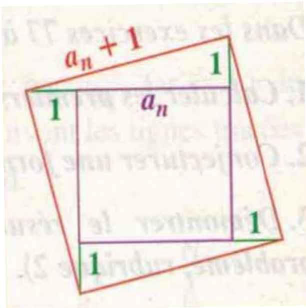
Exercice 95. On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ (n radicaux).

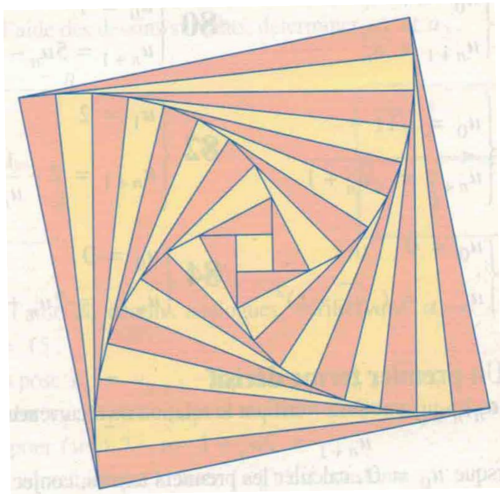
1. Définir (u_n) par récurrence
2. Représenter graphiquement les premiers termes.

Exercice 96. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2+1}$, $u_2 = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2+1}}$ $u_n = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{2 + \cfrac{1}{2+1}}}}$ (n traits de fractions).

1. Définir (u_n) par récurrence
2. Représenter graphiquement les premiers termes.

Exercice 97. À partir d'un carré C_0 de côté 1, on construit les carrés C_1, C_2,...,C_n de la manière suivante : les sommets de C_{n+1} sont construits sur les supports des côtés de C_n à l'extérieur et à la distance 1 des sommets de C_n.





On note a_n la longueur du côté de C_n. les dix premiers carrés sont représentés ci-dessous.

1. Définir par récurrence la suite (a_n)
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite et conjecturer son comportement.