Chapitre 3

Fiche 1

Fonctions du second degré
Définition et différentes expressions

I. Définition

Définition 4
On appelle fonction polynôme du second degré ou fonction trinôme ou trinôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b,\ c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

Exemples
Pour tout nombre réel x :

- les fonctions $x \longmapsto 4x^2 - \frac{2}{3}x + \sqrt{2}$; $x \longmapsto 5x^2 - 3$; $x \longmapsto x^2 + 2x$ sont des fonctions trinômes ;
- $x \longmapsto 2x + 1$ est une fonction affine (fonction polynôme de degré 1) ;
- $x \longmapsto 7x^3 - 2x^2 + 4$ est une fonction polynôme de degré 3 ;
- $x \longmapsto (2x+1)(x-3)$ est une fonction trinôme ;
- $x \longmapsto (x+1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction trinôme ;
- la fonction carré est la plus simple des fonctions trinômes avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.

Remarques
- Il y a unicité de l'écriture d'un polynôme sous forme développée. (admis) Ainsi, deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.
- Plus généralement, une fonction polynôme - ou polynôme - est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
où $n \in \mathbb{N}$ et a_n, a_{n-1}, ...,a_0 sont des réels fixés appelés coefficients de f.
  - Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé degré de f. (Le polynôme nul n'a pas de degré.)
  - $a_n x^n$ est le terme de plus haut degré, $a_3 x^3$ est le terme « en x^3 », a_0 est le terme de degré 0 ou terme constant.

II. Forme canonique

Propriété 6
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$. Il existe deux réels α et β uniques tels que : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelée la forme canonique de $f(x)$. On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Démonstration :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$. □

Remarque
Canonique vient du latin *canonicus* qui signifie « conforme aux règles » ou « régulier ». Le mot « canonique » sert à désigner un objet ayant les qualités d'un canon, c'est-à-dire d'une norme dominante. En effet, la forme canonique d'un trinôme est une expression donnant directement les coordonnées du sommet de la parabole et qui permet de voir rapidement si on peut factoriser le trinôme ou non.

Exemples

1. Déterminons la forme canonique du trinôme $x^2 + 6x - 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned}
   x^2 + 6x - 1 &= x^2 + 2 \times 3x - 1 \\
   &= x^2 + 2 \times 3x + 9 - 9 - 1 \\
   &= (x+3)^2 - 9 - 1 \\
   &= (x+3)^2 - 10
   \end{aligned}$$
2. Déterminer la forme canonique du trinôme $-3x^2 + 5x - 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned}
   -3x^2 + 5x - 1 &= -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) - 1 \\
   &= -3\left(x^2 - 2 \times \frac{5}{6}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36}\right) - 1 \\
   &= -3\left((x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{36}\right) - 1 \\
   &= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} - 1 \\
   &= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}.
   \end{aligned}$$

Méthode

- On met a en facteur ;
- On reconnaît le début du développement d'un carré. De façon générale, si $m \in \mathbb{R}$, $x^2 + mx$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{m}{2}\right)^2$.
- On peut aussi calculer α et β à partir des coefficients a, b, c .

Exercices

Exercice 98. Les expressions suivantes sont-elles des trinômes de degré 2 ? Si oui, donner leurs coefficients

(a) $2x^2-3x+4$

(b) $3x-9$

(c) $(x-4)(3x+2)$

(d) $4x^2-5$

Exercice 99. Les expressions suivantes sont-elles des trinômes de degré 2 ? Si oui, donner leurs coefficients

(a) $2(x-3)^2+7$

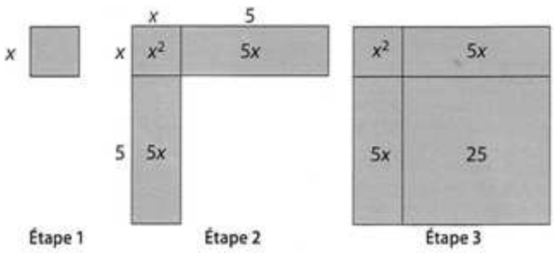
(b) $9x^2-11x$

(c) $\dfrac{x^2-5x+8}{2}$

(d) $(x-1)(x-2)(x-3)$

Exercice 100 - La méthode d'Al-Khawarizmi.

1. On se propose de résoudre l'équation du second degré $x^2+10x=39$ que l'on notera (E).
   Voici la méthode proposée par le mathématicien perse Al-Khawarizmi.
   - Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x.
   - Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire vaut $\dfrac{10}{2}\times x$; on obtient ainsi 5 comme autre dimension.
   - Étape 3 : on complète alors le grand carré.



   (a) Exprimer l'aire du carré de deux façons différentes et en déduire que :
   $$x^2+10x=(x+5)^2-25.$$
   (b) En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x+5)^2=64$.
   Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).

   Al-Khwarizmi ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui, 64 n'a qu'une racine carrée : 8.

   (c) Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2. Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $x^2+12x=45$;
   (b) $x^2+4x-32=0$.

AI-Khawarizmi (783-850) est un mathématicien perse dont les écrits ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Il est à l'origine des mots « algorithme », « algèbre » et de l'utilisation des chiffres arabes.

Exercice 101. Mettre sous forme canonique :

(a) $2x^2+8x-2$

(b) x^2+3x+1

(c) $-x^2+2x+5$

(d) $3x^2+x-4$

Exercice 102. Mettre sous forme canonique :

(a) x^2+4x+5

(b) $3t^2+6t-9$

(c) $9a^2+18a+1$

(d) $2x^2+x+1$

Exercice 103. Soit $f(x)=-2x^2+6x-1$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
3. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Exercice 104. Soit $f(x)=x^2-5x+6$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.
4. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Fiche 2

Fonctions du second degré
Variations et représentation graphique

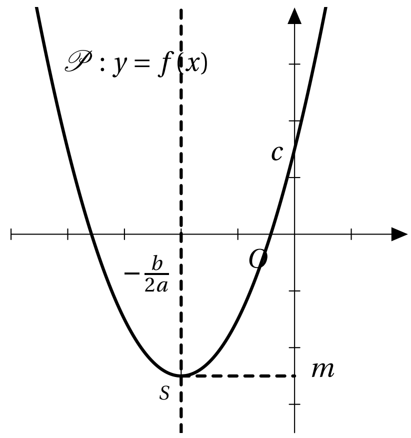
I. Sens de variation d'une fonction trinôme

Propriété 7
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le sens de variation de f est donné dans les tableaux ci-dessous :

a>0

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

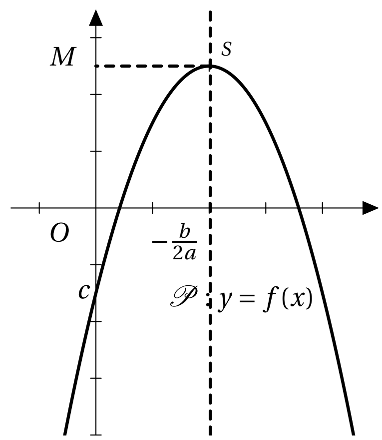
avec $m = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.



a<0

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

avec $M = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.



Démonstration : admise □

> **Définition 5**
> La courbe représentative d'une fonction trinôme s'appelle une parabole.

> **Propriété 8**
> Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$, et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique.
>
> - le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$;
> - dans un repère orthogonal, la parabole $\mathscr{P}$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$;
> - f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ en $-\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$, c'est un minimum ; si $a < 0$, c'est un maximum.

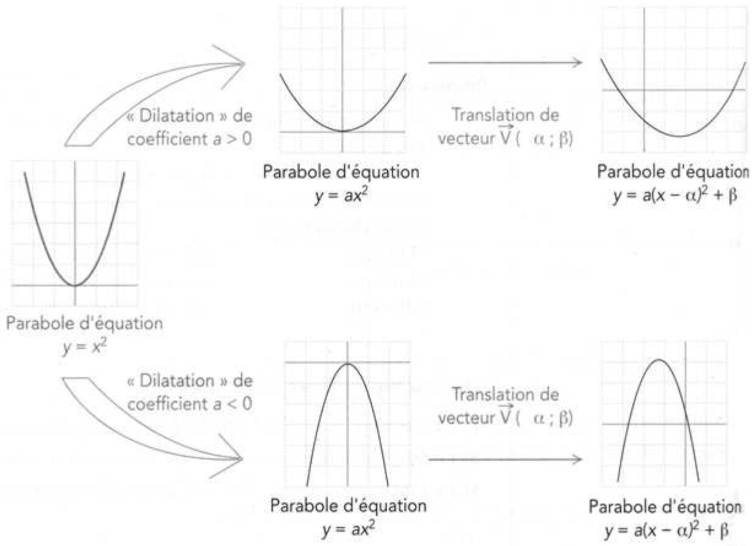
Démonstration : Conséquence directe de la propriété précédente. □

Remarques

— le sommet S de la parabole représentative de la fonction f a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$;

— autrement dit, β est l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$; il est atteint en α ;

— on peut interpréter géométriquement la forme canonique en observant comment la représentation graphique de la fonction f se déduit de celle de la fonction carré par « dilatation » de coefficient a et par translation de vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$.



II. Exemple : étude d'une fonction trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

— Déterminer les variations et l'extremum de f.
Soit x un réel, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 3$.
Le coefficient du terme de degré 2 est -2 qui est négatif, donc la fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Il est atteint en :
$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$,
et a pour valeur :
$f(-1) = -2\times(-1)^2 - 4\times(-1) + 3 = -2+4+3 = 5$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

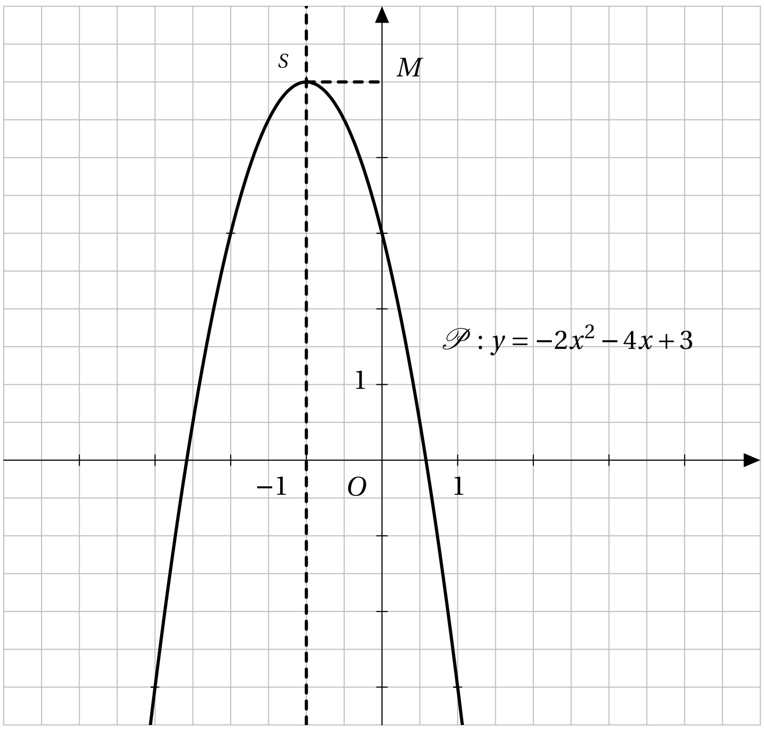
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	5	↘

— Préciser l'axe de symétrie de la parabole représentant f.
D'après ce qui précède, la parabole représentant f admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

— Tracer cette parabole.
Méthode :

- — on place le sommet S de la parabole $\mathscr{P}$,
- — on trace l'axe de symétrie (d) de la parabole,
- — on calcule les coordonnées de quelques point de $\mathscr{P}$,
- — on place ces points et leurs symétriques par rapport à (d),
- — on trace une parabole passant par ces points,
- — on contrôle ses résultats à l'aide de la calculatrice.

$f(0) = 3$ et $f(1) = -3$, par conséquent les points de coordonnées $(0\ ;\ 3)$ et $(1\ ;\ -3)$ appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$.



Exercices

Exercice 105.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :
   (a) $y = x^2 - 4x + 5$
   (b) $y = -(x+4)(x-2)$
   (c) $y = 3x^2 - 4$
   (d) $y = -x^2 + x$
2. Contrôler les résultats obtenus à la calculatrice.

Exercice 106. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'axe de symétrie de la parabole et en donner une allure :

(a) $y = 2x^2 - 1$

(b) $y = -2x^2 + 6x - 4$

(c) $y = (-2x+1)(-8x-4)$

Exercice 107. Tracer les paraboles d'équations :

(a) $y = x^2 - 4x + 5$

(b) $y = -2x^2 + 2x + 1$

(c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2$

(d) $y = -x^2 + x$

Exercice 108. Tracer les paraboles d'équations :

(a) $y = \dfrac{x^2}{4} - x - 3$

(b) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{5}{2}$

(c) $y = 2(x-1)^2 + 2$

(d) $y = -\dfrac{1}{2}(x+4)(x-2)$.

Exercice 109. Sans développer, donner l'allure des paraboles :

(a) $\mathscr{P}_1 : y = x(-x+4)$

(b) $\mathscr{P}_2 : y = 2(x-1)^2 + 4$

Exercice 110.

1. Sans calculatrice, donner une allure possible de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -2x^2 - 4x + 8$.
2. Lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 - 4x + 8 = 0$.

Exercice 111. Soit $g(x) = 3(x-1)(x+3)$.

1. Donner l'expression développée de $g(x)$.
2. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{P}$ représentant g.
3. Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des abscisses.

Exercice 112 - Intersections.
Sur la calculatrice, tracer les courbes représentant les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6.$$

(a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $(x+3)(x-5) = 0$.

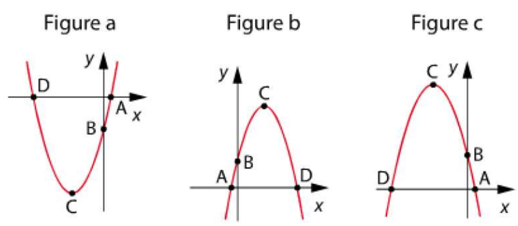
(c) En déduire les solutions exactes de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 113 - Paraboles en famille.
Pour tout réel m, on considère la parabole notée $\mathscr{P}_m$ d'équation $y = 2x^2 - 6mx + 12m$.

1. Écrire l'équation $\mathscr{P}_0$ ($\mathscr{P}_0$ désigne la parabole $\mathscr{P}_m$ obtenue pour $m = 0$) et la tracer sur votre calculatrice.
2. Tracer $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sur le même graphique.
3. Démontrer qu'un même point A appartient à toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$.

Exercice 114 - Sans calculatrice.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -(2x-1)(x+5)$.

1. Laquelle des courbes tracées ci-dessous peut représenter graphiquement la fonction h ?



2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D placés sur la figure.

Exercice 115 - Minimum ou maximum ?.
Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur de x il est atteint.

(a) $f(x) = 3x^2 + 4$

(b) $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$

(c) $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$

Exercice 116. Dresser le tableau de variation de la fonction :

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 6$

(b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$

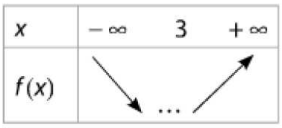
(c) $k(x) = (x-1)(x+2)$

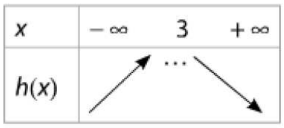
(d) $h(x) = 3x^2 - 3$

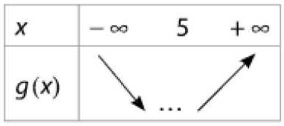
Exercice 117. Soit $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ pour tout x réel.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Calculer $f(2)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$.
4. Tracer la parabole représentant f.
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

Exercice 118 - Chercher l'intrus. Voici les tableaux de variation de trois fonctions.







Retrouver, parmi les expressions suivantes, une expression possible de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. Justifier.

(a) $5(x-1)(x-5)$

(b) $-x^2 + 6x - 1$

(c) $(7-x)(3-x)$

(d) $-(x+1)^2 + 3$

Exercice 119 - Coefficients du trinôme.
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-2	0	2	5	8
$f(x)$	13	1	-15	-23	-20	1

Sans calcul, mais en justifiant, donner la valeur de c, le signe de a puis celui de b.

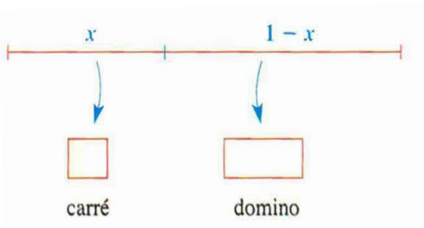
Fiche 3

Fonctions du second degré
Problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation consiste à rendre optimale une certaine grandeur.
Il s'agit ici de se ramener à déterminer le maximum ou le minimum d'une certaine fonction trinôme, à l'aide des résultats dégagés dans ce chapitre : forme canonique, variations du trinôme.

Exercice résolu

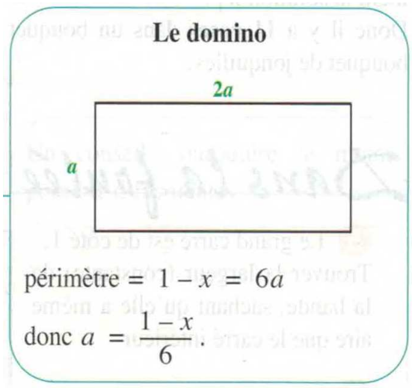
Énoncé du problème : Carré et Domino
On coupe une ficelle de 1 m de longueur pour entourer deux surfaces : un carré et un domino (rectangle deux fois plus long que large).



Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des deux aires soit minimale ? maximale ?

Recherche

Le choix de la variable semble être indifférent : nous pouvons prendre pour x la longueur entourant le carré (en mètre) ; $1-x$ est la longueur restante.
Ainsi, le côté du carré est $\frac{x}{4}$.
D'autre part, le rectangle est deux fois plus long que large, et son périmètre est $1-x$, donc ses dimensions sont $\frac{1-x}{6}$ et $\frac{1-x}{3}$. Nous pouvons donc exprimer l'aire de chaque figure et étudier la somme des aires.



Remarque
L'énoncé insinue que la fonction exprimant la somme des deux aires admet effectivement un maximum et un minimum. Ce n'est pas une évidence, et nous verrons d'ailleurs que si la ficelle est effectivement coupée, ce maximum n'existe pas (voir la conclusion et la remarque finale).

Solution rédigée

a) **Modélisation**

Notons x la longueur de ficelle (en mètre) entourant le carré.

Le carré a pour côté $\dfrac{x}{4}$, donc pour aire $\dfrac{x^2}{16}$ (en m^2).

Le rectangle a pour dimensions $\dfrac{1-x}{6}$ et $\dfrac{1-x}{3}$, donc son aire est $\dfrac{(1-x)^2}{18}$. Nous sommes-donc conduits à étudier le maximum et le minimum éventuels de la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{18}(1-x)^2 \text{ sur } [0\,;\,1].$$

b) **Traitement mathématique**

$f(x)$ est un polynôme ; après développement et réduction, on obtient :

$$f(x) = \frac{17}{144}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{18}.$$

Nous reconnaissons un trinôme du second degré ; avec $a = \dfrac{17}{144}$; $b = -\dfrac{1}{9}$ et $c = \dfrac{1}{18}$.

Comme $a > 0$, la fonction f admet un minimum.

Il est atteint en :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{9}}{2\times\frac{17}{144}} = \frac{1}{9}\times\frac{144}{17}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{17},$$

et a pour valeur (après calculs) :

$$\beta = f(\alpha) = \frac{17}{144}\times\left(\frac{8}{17}\right)^2 - \frac{1}{9}\times\frac{8}{17} + \frac{1}{18} = \frac{1}{34}.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:

x	0		$\frac{8}{17}$		1
$f(x)$	$\frac{1}{18}$	$\searrow$	$\frac{1}{34}$	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$

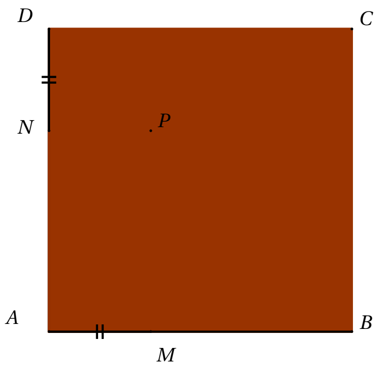
c) **Exploitation des résultats**

On déduit du tableau de variations que :

- La somme des aires est minimale lorsque $x = \dfrac{8}{17} \approx 0,47$ m, arrondi au centième.
- La somme des aires est maximale lorsque $x = 1$, c'est-à-dire lorsque la ficelle n'est pas coupée ; dans ce cas, seul le carré est formé.
  Si l'on impose que la ficelle soit effectivement coupée, alors $x \in]0\,;\,1[$, et la fonction f n'a pas de maximum sur $]0\,;\,1[$.

Exercices

Exercice 120 - Trouver une aire maximale.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$. P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.



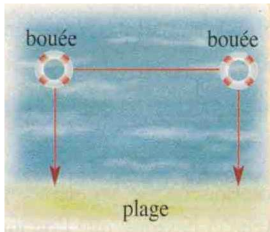
Objectif : trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.

1. Sur quel intervalle est définie la fonction f ?
2. Exprimer $f(x)$ puis vérifier que f est une fonction polynôme du second degré.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. (a) Déduisez-en la position de M pour laquelle l'aire de $AMPN$ est maximale, précisez la valeur de cette aire.
   (b) Quelle particularité présente alors le rectangle $AMPN$?

Exercice 121 - Optimiser une recette. Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance.
Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de $0,1$ €, il vend 10 billets de plus.
Il engage une campagne de promotion.

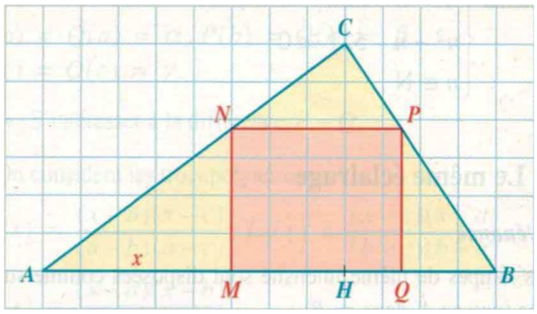
1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Que peut-on en penser ?
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de $0,1$ €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimez en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifiez que :
   $$r(x) = -x^2 + 40x + 2100.$$
   (c) Donnez le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle $[0\,;\,70]$.
   (d) Déduisez-en la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

Exercice 122 - Baignade surveillée. Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.



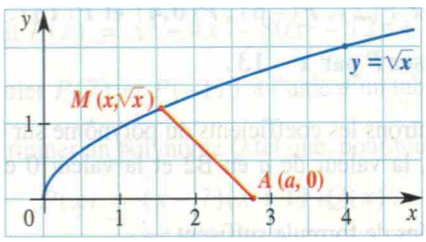
Déterminer les dimensions du rectangle, de sorte que l'aire de baignade soit maximale.

Exercice 123 - Le plus grand rectangle. Sur la figure ci-dessous, l'unité est le carreau. À tout point M du segment $[AM]$, tel que $AM = x$, on associe le rectangle $MNPQ$.



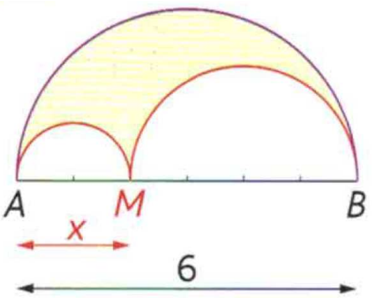
1. Exprimer MN en fonction de x ; en déduire QB, puis MQ en fonction de x.
2. Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ du rectangle est-elle maximale ?

Exercice 124. Soit a un réel tel que $a > \frac{1}{2}$.
Quelle est la plus courte distance du point $A(a, 0)$ à un point M situé sur la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$?



Indication : minimiser AM revient à minimiser AM^2.

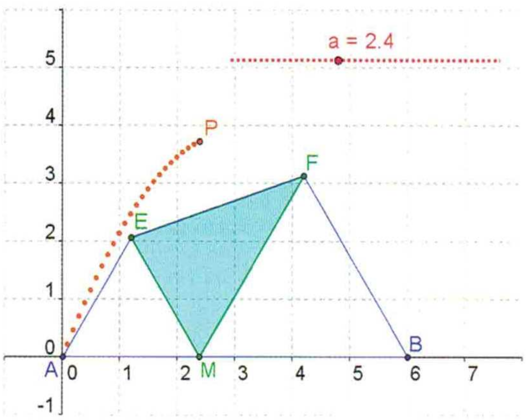
Exercice 125 - Arbelos d'Archimède. On appelle « arbelos d'Archimède »le domaine délimité par les trois demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$, comme sur la figure suivante.



On désigne par $\mathscr{P}(x)$ le périmètre de l'arbelos et par $\mathscr{A}(x)$ l'aire de l'arbelos.

1. Montrer que $\mathscr{P}(x)$ est constant pour $x \in [0\,;\,6]$.
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \dfrac{\pi}{4}(6x - x^2)$, avec $x \in [0\,;\,6]$.
3. Que vaut $\mathscr{A}(0)$? $\mathscr{A}(6)$?
4. En déduire que l'aire de l'arbelos est maximale pour une certaine valeur de x que l'on précisera.

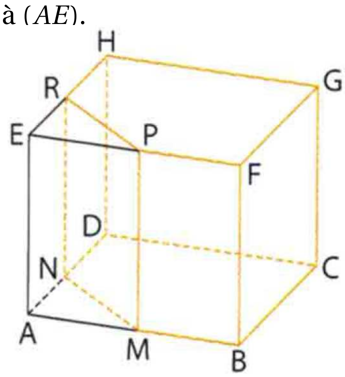
Exercice 126 - avec des triangles. Sur la capture d'écran ci-dessous, les triangles AME et MBF sont équilatéraux. On souhaite montrer qu'il existe une position du point M sur le segment $[AB]$ telle que l'aire du triangle EMF soit maximale. On fixe $AB = 6$.



1. Si possible, reproduire à l'aide du logiciel GeoGebra cette figure dans laquelle le point M a pour coordonnées $(a;0)$, a étant un curseur qui parcourt les nombres entre 0 et 6. Conjecturer le maximum de l'aire du triangle EMF.
2. En posant $x = AM$, exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du triangle EMF en fonction de x.
3. En déduire que cette fonction admet un maximum que l'on précisera.

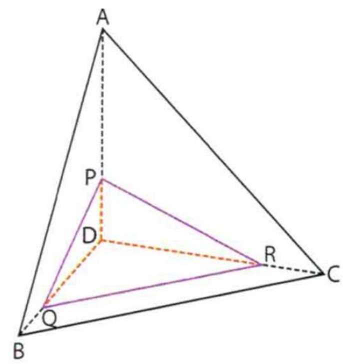
Indication : En prolongeant les droites (AE) et (BF), on comprend mieux les choses.

Exercice 127. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 8 cm. Pour tout point M de $[AB]$ on construit le point N de $[AD]$ tel que $DN = AM$. On note $x = AM$ (en cm). Les droites (MP) et (NR) sont parallèles à (AE).



1. Exprimer le volume $V(x)$ du solide $MBCDNPFGHR$ en fonction de x.
2. Justifier que V admet un minimum sur $[0\,;\,8]$. Préciser ce minimum et pour quelle position de M il est atteint.

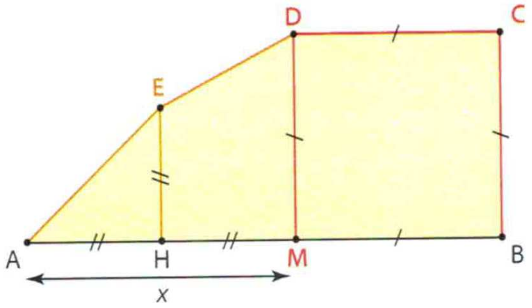
Exercice 128. On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que : - les arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$ sont de même longueur (6 cm) ; - les arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$ sont deux à deux perpendiculaires.
Sur ces arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$, on place les points P, Q et R tels que $DP = BQ = CR = x$(en cm).



On s'intéresse au volume $V(x)$ du tétraèdre $DPQR$.

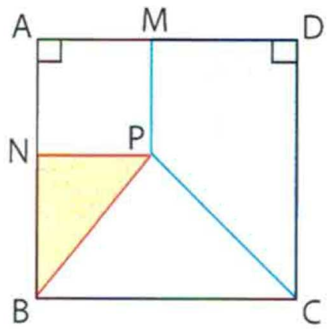
1. Exprimer, en fonction de x, l'aire de la base DQR et la hauteur DP du tétraèdre $DPQR$.
2. En déduire que $V(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$.
3. Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,6]$,
$$V(x) - V(2) = \frac{1}{6}(x-8)(x-2)^2.$$
4. En déduire le volume maximal de $DPQR$.

Exercice 129. $[AB]$ est un segment de longueur 8 cm. M est un point variable de $[AB]$. On construit, suivant le schéma, le carré $MBCD$, le triangle rectangle isocèle AHE et le trapèze rectangle $HMDE$. On pose $AM = x$. On s'intéresse aux variations de l'aire de $ABCDE$.



1. Exprimer, en fonction de x, les aires de AHE, $HMDE$ et $MBCD$.
2. En déduire que l'aire du polygone $ABCDE$ est égale à : $x^2 - 14x + 64$.
3. On note $f(x)$ l'aire du polygone $ABCDE$. Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
4. Dresser le tableau de variation de f. Pour quelle valeur de x l'aire de $ABCDE$ est-elle minimale ? Quelle est la valeur de cette aire minimale ?

Exercice 130. $ABCD$ est un carré de côté 20 cm. M est point de $[AB]$ distinct de A et de D.



À partir de M, on construit le carré $ANPM$. Étudier les variations de l'aire coloriée lorsque M décrit le segment $[AB]$, $M \neq A$, $M \neq D$.