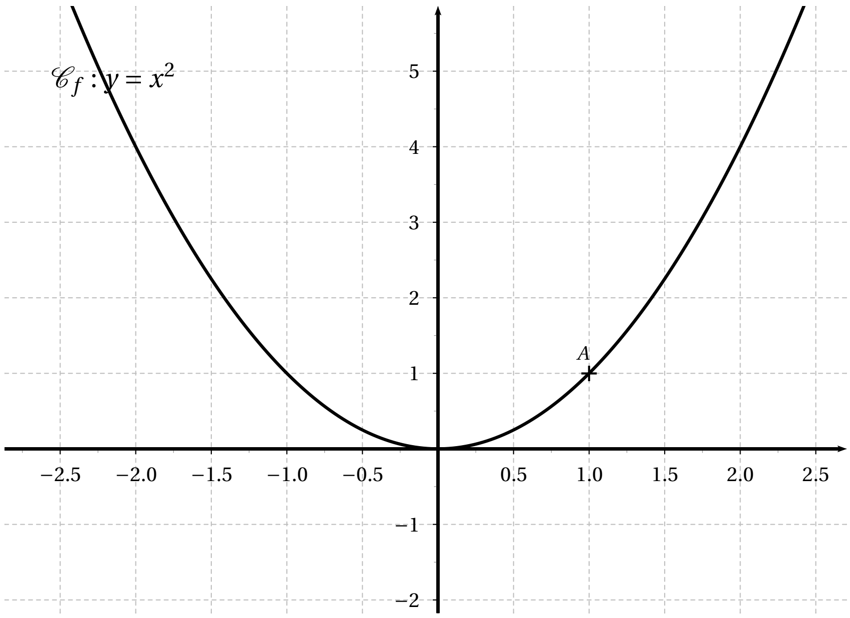
Chapitre 4

Fiche 1

Nombre dérivé
Activité d'introduction

I. Qu'est-ce qu'une tangente ?

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère de la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Soit A et M deux points distincts de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et $1+h$ où h désigne un réel non nul. La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et M.



I.1. Constater, conjecturer

À l'aide d'un logiciel, constater que la sécante (AM) admet une position limite (d) quand h se rapproche de 0. Quel semble être le coefficient directeur de la droite (d) ? Quelle semble être son équation réduite ?
La droite (d) s'appelle la **tangente à $\mathscr{C}_f$ en A**.

I.2. Comprendre

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AM).
2. De quel nombre se rapproche son coefficient directeur lorsque h se rapproche de 0 ?
3. De quel nombre se rapproche son ordonnée à l'origine lorsque h se rapproche de 0 ?

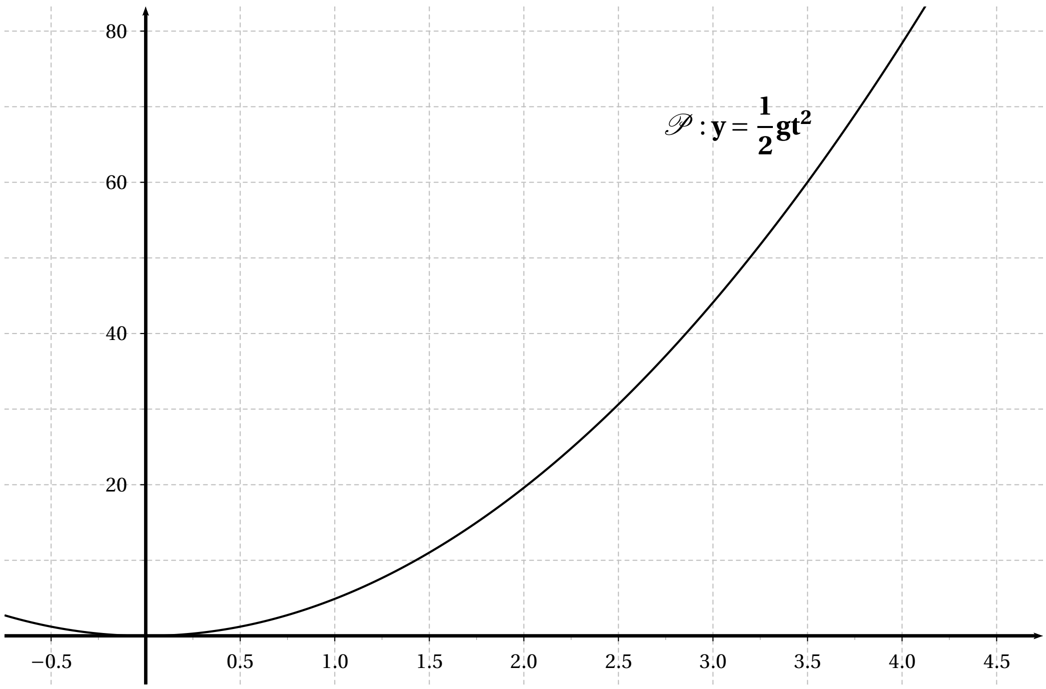
Ainsi, lorsque h se rapproche de 0, c'est-à-dire lorsque le point M se rapproche du point A :

— le coefficient directeur de la sécante (AM) se rapproche d'un nombre que l'on appelle le **nombre dérivé de la fonction f en x_A** et que l'on note $f'(x_A)$.

— la sécante (AM) se rapproche d'une droite (d) que l'on appelle la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A**.

II. Chute libre - Vitesse instantanée

On lâche une bille, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 80 mètres. Si l'on néglige les forces de frottement de l'air, la distance, en mètres, parcourue par cette bille après t secondes s'exprime par $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 9,8\text{m.s}^{-1}$. Soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative dans un repère de la fonction d .



1. À l'aide d'une calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction d pour t compris entre 0 et 5 (avec un pas de $0,1$). On ne demande pas de le recopier.
2. Calculer la vitesse moyenne de la bille (en m.s^{-1}) entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.
3. Soit M_1 le point de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 et M_3 celui d'abscisse 3. Quelle interprétation graphique peut-on donner du calcul donnant la vitesse moyenne entre les instants $t = 1$ et $t = 3$?
4. On cherche à déterminer la « **vitesse instantanée** » de la bille à l'instant $t = 1$. Pour cela, on évalue la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$ où h prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0. L'expression de cette vitesse moyenne est donc :
$$a(h) = \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1}.$$
   (a) Simplifier l'expression de $a(h)$.
   (b) Compléter le tableau suivant.

h	2	1	$0,01$	$0,01$	$0,001$
$a(h)$					

(c) Que penser des valeurs prises par $a(h)$ lorsque h se rapproche de 0 ?

On retiendra que cette valeur "limite" est appelée *vitesse instantanée* de la bille à l'instant $t = 1$.

5. Plus généralement, la vitesse instantanée de la bille à l'instant t_0 est la ***limite*** du quotient
$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}$$
***lorsque le nombre h se rapproche de* 0.**
   (a) Simplifier le quotient
$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}.$$
   (b) Démontrer que la vitesse instantanée à l'instant t_0 est donné par la formule :
$$v(t_0) = 9,8\,t_0.$$

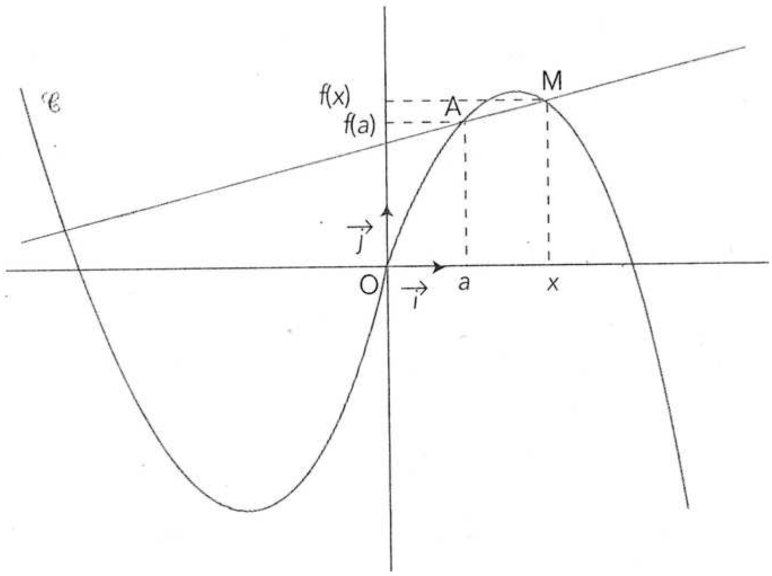
Fiche 2

Nombre dérivé
Taux de variation et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert.
On désigne par x et a deux réels distincts de I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\ I,\ J)$.

I. Sécantes à une courbe

Définition 6
La droite passant par deux points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ est appelée **sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et M**.



Définition 7
On appelle taux de variation -ou taux d'accroissement- de la fonction f entre a et x le nombre :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
En posant $x = a + h$, on peut aussi l'écrire :
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarques

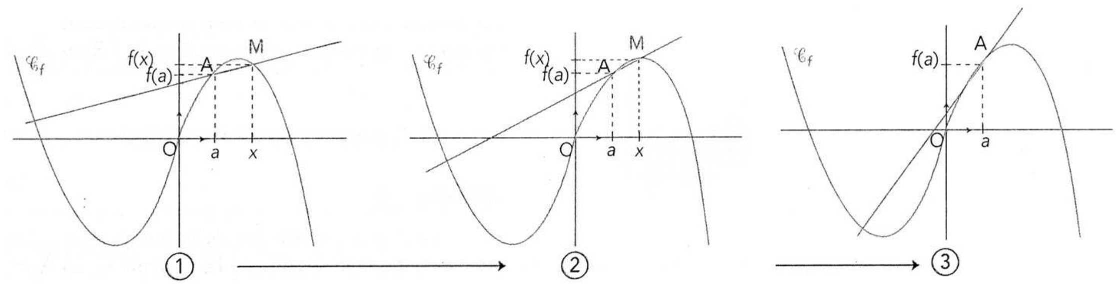
1. $x-a$ est l'accroissement de la variable entre a et x ;
   $f(x)-f(a)$ est l'accroissement de l'image entre a et x.
2. $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM). On peut le déterminer approximativement à l'aide du graphique.
3. Si la fonction f est croissante sur l'intervalle I, alors le taux d'accroissement de f entre a et x est positif.
   Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle I, alors le taux d'accroissement de f entre a et x est négatif.

II. Nombre dérivé d'une fonction

II.1. Approche intuitive

Si la sécante (AM) admet une droite (d), non parallèle à l'axe des ordonnées, pour position limite - c'est-à-dire vient se confondre avec (d) lorsque le point M de la courbe se rapproche de A, alors la droite (d) est dite **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A**.

Le coefficient directeur de la sécante se rapproche alors du coefficient directeur de la tangente (d) .



Autrement dit :
Lorsque l'on donne successivement à x des valeurs de plus en plus proches de a, le coefficient directeur de la sécante $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (appelé aussi taux d'accroissement de la fonction f entre x et a) se rapproche d'un nombre, que l'on note $f'(a)$.

On dit que le nombre $f'(a)$ est la **limite** de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **quand x tend vers a**.

En posant $x=a+h$ et en constatant que « x tend vers a » équivaut à « h tend vers zéro », le nombre $f'(a)$ est aussi la **limite quand h tend vers 0** du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ de la fonction f entre a et $a+h$.

On note :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition 8
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant le réel a. On appelle **le nombre dérivé de f en a**, s'il existe, le nombre :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple
Soit à calculer le nombre dérivé en 4, s'il existe, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

On calcule, pour $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre 4 et $4 + h$:

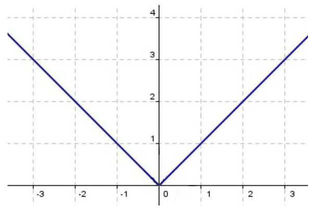
$$\begin{aligned}
\frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{(4+h)^2 + 2(4+h) - 1 - (4^2 + 2 \times 4 - 1)}{h} \\
&= \frac{16 + 8h + h^2 + 8 + 2h - 1 - 16 - 8 + 1}{h} \\
&= \frac{10h + h^2}{h} \\
&= \frac{h(10+h)}{h} \\
&= 10 + h
\end{aligned}$$

Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h \to 0} (10 + h) = 10$.
Donc le nombre dérivé de f en 4 existe et vaut 10. On note $f'(4) = 10$.

Remarque
Il y a des fonctions pour lesquelles le nombre dérivé en un réel n'existe pas.

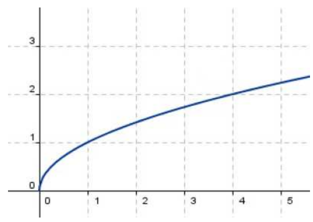
1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'admet pas de nombre dérivé en 0.
   En effet :
   - le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque $x_M < 0$ est -1 ;
   - le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque $x_M > 0$ est 1.

   On ne peut donc pas trouver de position limite aux sécantes (OM) quand M se rapproche du point O.

   Cela signifie que l'on ne peut pas trouver un nombre qui soit la limite de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ quand x tend vers 0. En effet : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = 1$.
   On dit que la courbe présente « un point anguleux » en O.

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'admet pas de nombre dérivé en 0.
   En effet le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque le point M se rapproche du point O tend vers $+\infty$.
   Cela signifie que l'on ne peut pas trouver un nombre qui soit la limite de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ quand x tend vers 0.
   On dit que la courbe admet une tangente verticale au point O.

> **Définition 9**
> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.
> On dit que **la fonction f est dérivable en a** si le nombre dérivé de f en a existe.

Exemple
Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 3.
On calcule, pour $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre 3 et $3 + h$:

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\ &= \frac{9+6h+h^2-9}{h}\\ &= \frac{6h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(6+h)}{h}\\ &= 6+h\end{aligned}$$

Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=6$.

Donc la fonction f est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Exercices

Exercice 131. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$ et h un nombre réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$.
2. Vérifier que $f(-2+h)=h^2-4h+1$.
3. Vérifier que le taux de variation entre -2 et $-2+h$ est égal à $h-4$.
4. En déduire que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$.

Exercice 132 - fonction affine.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-3$ et h un nombre réel.

1. (a) Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
   (b) Pour tout h non nul, vérifier que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à 2.
   (c) En déduire que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
2. Calculer $f'(-3)$.
3. Calculer $f'(a)$ pour a réel quelconque. Le résultat était-il prévisible ? Expliquer.

Exercice 133. On considère la fonction f définie pour tout x non nul par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Soit h un nombre réel non nul. Dans chaque cas, calculer et simplifier le taux de variation de f entre a et $a+h$ puis en déduire si f est dérivable en a et préciser, s'il existe, $f'(a)$.

(a) $a=-1$

(b) $a=0,1$

(c) $a=\dfrac{1}{4}$

(d) $a=\sqrt{2}$

Exercice 134. Soit h un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
2. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.

Exercice 135. Soit h un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x+5$.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$.
2. Montrer que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$.

Exercice 136. Dans chaque cas, montrer que la fonction f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $a=-1$;

(b) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ et $a=1$;

(c) $f(x)=x^3$ et $a=2$.

Exercice 137. Soit f la fonction définie sur pour tout x différent de -1 par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

1. Quelle est la valeur de $f(1)$?
2. Montrer que, pour tout réel h différent de -2, on a :
$$f(1+h)-f(1)=-\frac{h}{2(h+2)}.$$
3. En déduire le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, préciser $f'(1)$.

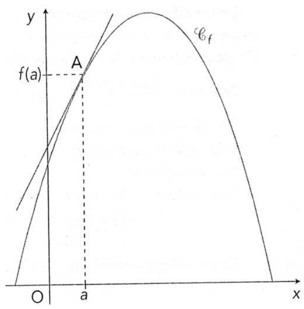
Exercice 138. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Montrer que f est dérivable en a quel que soit le réel a et déterminer $f'(a)$ pour tout réel a.

Fiche 3

Nombre dérivé
Nombre dérivé et tangente

Définition 10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a et dérivable en a. La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de $\mathscr{C}_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la **tangente en A à la courbe** $\mathscr{C}_f$.



Remarque
Dans certains cas, la position limite de la sécante (AM) est une droite (d), parallèle à l'axe des ordonnées. Alors le coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de la sécante (AM) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut en valeur absolue quand on donne à x des valeurs de plus en plus proches de a. Dans ce cas, la fonction n'admet pas de nombre dérivé en a, mais on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en A une tangente verticale, parallèle à l'axe des ordonnées. Cette tangente, comme toutes les droites parallèles à l'axe des ordonnées, n'a pas de coefficient directeur.

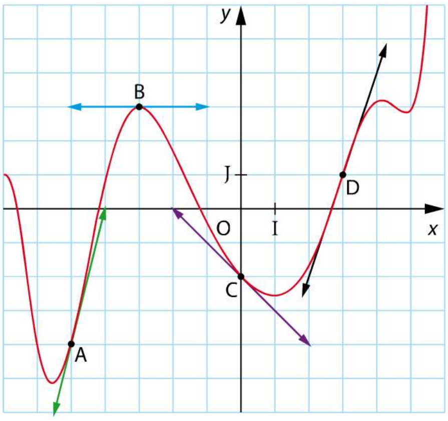
Exemple
La courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en $O(0\ ;\ 0)$ qui est l'axe des ordonnées.

Propriété 9
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a et dérivable en a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration : Par définition, la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point A, d'abscisse a, a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduite est donc de la forme $y = f'(a)x + p$ où p est à déterminer.
Or $A(a; f(a))$ appartient à la courbe, donc :
$f(a) = af'(a) + p$.
Donc : $p = f(a) - af'(a)$.
Ainsi : (T) a pour équation $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$
soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

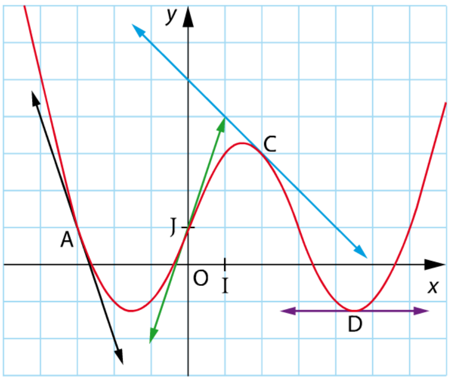
Exercices

Exercice 139. On a représenté la courbe d'une fonction f et certaines de ses tangentes.

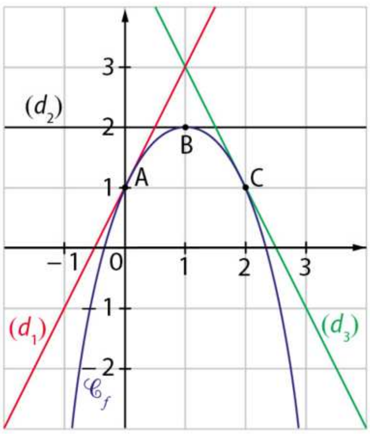


1. (a) Rappeler l'interprétation graphique de $f'(3)$.
   (b) Lire graphiquement $f'(3)$.
2. De même lire $f'(-5)$, $f'(-3)$ et $f'(0)$.

Exercice 140. La courbe ci-dessous représente une fonction g. Lire graphiquement $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(-3)$ et $g'(4,5)$.

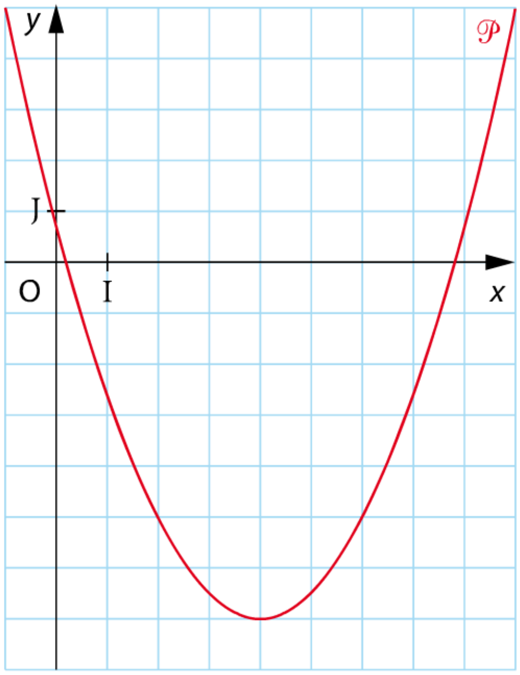


Exercice 141. La courbe de la fonction f ainsi que ses tangentes en A, B et C sont représentées ci-dessous.



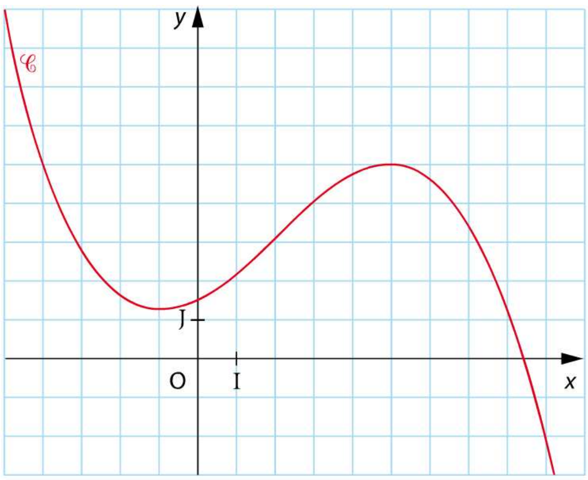
Lire la valeur des nombres dérivés de f en les abscisses respectives des points A, B et C.

Exercice 142. Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ et sa courbe $\mathscr{P}$.



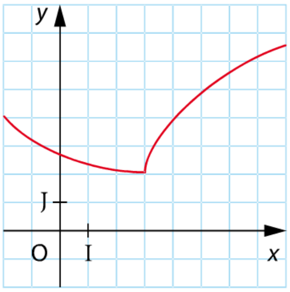
En posant votre règle sur la figure pour matérialiser des tangentes à la courbe, donner des valeurs approchées de $f'(2)$, $f'(4)$, $f'(6)$.

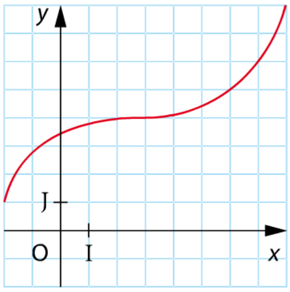
Exercice 143. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Déterminer graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a) = 0$.

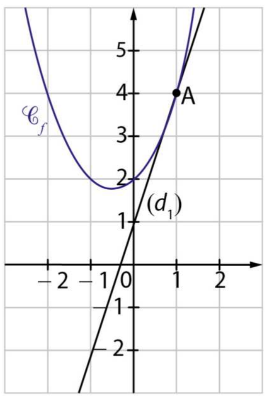
Exercice 144. Par lecture graphique, dire si les fonctions représentées ci-dessous sont dérivables en 3.





Exercice 145. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée ci-contre dans un repère. Le point A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1 et (d) la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

1. En utilisant la représentation graphique suivante, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.



2. En déduire l'équation réduite de la tangente (d) à $\mathscr{C}_f$ en A.

Exercice 146. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
2. On donne $f'(-2) = -4$. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2.

Exercice 147. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$ et sa courbe $\mathscr{P}$.

1. On donne $f'(2) = 4$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse 2.
2. Tracer $\mathscr{P}$ et (T_A) à la main.

Exercice 148. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et sa courbe $\mathscr{H}$.

1. On donne $f'(1) = -1$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{H}$ au point A d'abscisse 1.
2. Tracer $\mathscr{H}$ et (T_A) à la main.

Exercice 149. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et sa courbe $\mathscr{C}$.

1. On donne $f'(4) = \dfrac{1}{4}$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.
2. Tracer $\mathscr{C}$ et (T_A) à la main.

Exercice 150. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. Vérifier par le calcul que $f'(-1) = -4$ et que $f'(2) = 2$.
2. Déterminer l'équation réduite des tangentes (T) et (T') à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -1 et 2.
3. Construire $\mathscr{C}_f$ puis (T) et (T').

Fiche 4

Nombre dérivé
Nombre dérivé et calculatrice

OBJECTIFS

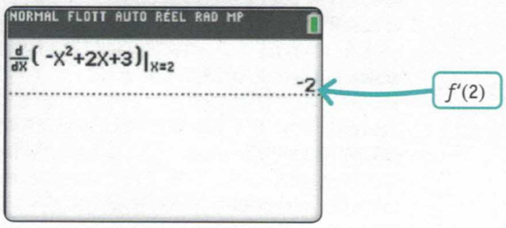
1. Afficher le nombre dérivé en 2 de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
2. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Trouver une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1.

I. Calculatrices TI

1 Afficher un nombre dérivé

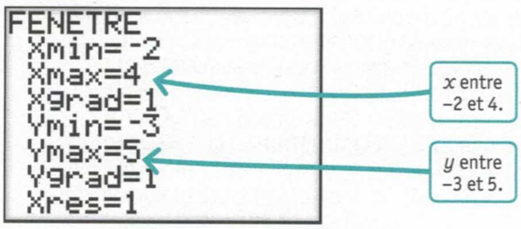
1. Se placer dans l'écran de Calcul :
- appuyer que la touche math,
- choisir l'option 8 : nbreDérivé(;
- valider par 8.

2. Compléter l'instruction en respectant le modèle : nbreDérivé(variable, fonction, valeur).
Valider par entrer.

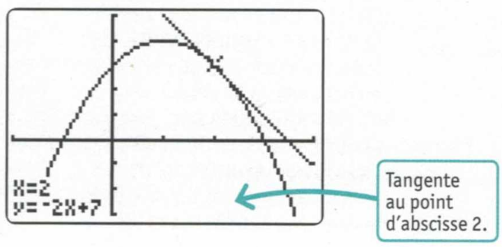


2 Tracer la tangente en un point

1. Se placer dans l'éditeur de fonctions $f(x)$.
- Saisissez l'expression de $f(x)$ dans Y1.
  Valider par entrer.
- Régler la fenêtre d'affichage en appuyant sur fenêtre.
  Paramétrer comme indiqué.



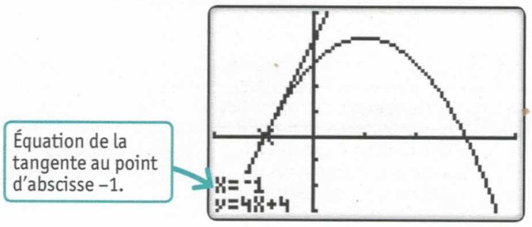
2. Se placer dans le module graphique graphe.
- Appuyer sur 2nde prgm (dessin).
- Sélectionner l'option 5 : Tangente(; valider par 5.
- Appuyer sur 2 puis validez par entrer.



③ Trouver une équation de la tangente en un point

1. Reprendre la configuration du paragraphe ② **2.**
Effacer la tangente tracée par :
2nde prgm (dessin) option 1 : EffDessin (1).

2. Procéder alors comme au paragraphe ② **2.**
- 2nde prgm (dessin) ;
- option 5 : Tangente(5 ;
- (-) 1 entrer.

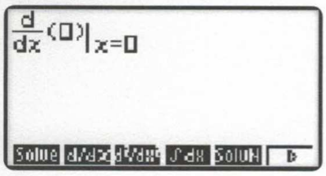


II. Calculatrices Casio

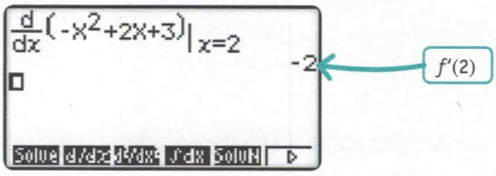
① Afficher un nombre dérivé

1. Sélectionner le menu RUN-MAT.
- Définir l'option de calcul.
  Appuyer sur OPTN F4 (CALC).
- Choisir le type : F2 (d/dx).

Aide d/dx est un symbole indiquant la dérivation.

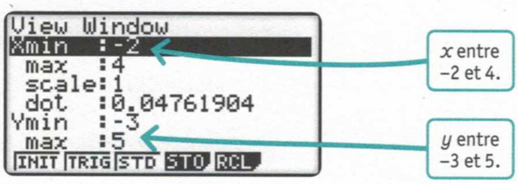


2. Compléter les informations demandées.
- Saisir l'expression de $f(x)$.
- Déplacer le curseur vers la droite à l'aide de la touche de direction puis saisir la valeur 2.
- Valider par EXE.

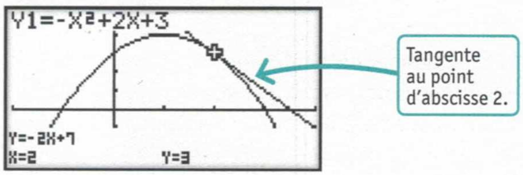


② Tracer la tangente en un point

1. Sélectionner le menu GRAPH.
- Saisir l'expression de la fonction.
  Valider par EXE.
- Régler la fenêtre d'affichage en appuyant sur SHIFT F3 (V-Window).
  Paramétrer comme indiqué.

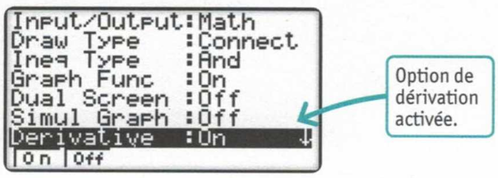


2. Aller dans le menu GRAPH puis faire afficher la courbe en appuyant sur F6 (DRAW).
- Sélectionner l'instruction Sketch (SHIFT F4) puis l'option Tang (F2).
- Déplacer le curseur à l'aide des touches de direction jusqu'à obtenir $x = 2$ puis valider par EXE.



③ Trouver une équation de la tangente en un point

1. Vérifier que le réglage suivant est activé.
Pour cela, appuyer sur SHIFT MENU (SET UP).



2. Reprendre la configuration du ② **2.**
- Déplacer le curseur jusqu'à obtenir $x = -1$ puis valider par EXE.