Chapitre 6

Fiche 1

Équations et inéquations du second degré Résolution d'équations et factorisation

I. Définition

Définition 12
Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c le réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2-4ac$.

Remarque
Δ est appelé discriminant du trinôme car son signe permet de faire une discrimination entre les équations selon leur nombre de solutions.

II. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

Notons (E) l'équation $ax^2+bx+c=0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a vu chapitre 3 - Fiche 1 que :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Donc

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (E) &\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0 \\ &\iff a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \end{aligned}$$

On raisonne par disjonction des cas :

1^er^ cas : $\Delta < 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Par conséquent l'équation $ax^2+bx+c=0$ (E) n'a pas de solution.
De plus, $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$ ne peut pas se factoriser (s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré). (Sinon, l'équation aurait au moins une solution.)

2^e^ cas : $\Delta = 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ et donc

$(E) \iff \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc l'équation (E) a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

De plus, $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_0)^2$

3e cas : $\Delta > 0$

On a alors :

$$(E) \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

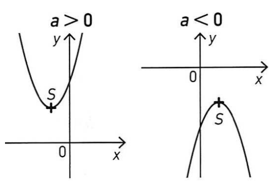
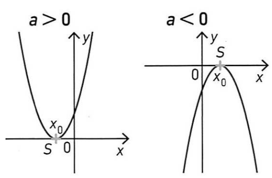
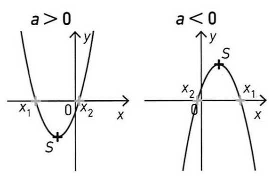
Donc l'équation (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x-x_1)(x-x_2)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 13

Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. Le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ :

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de l'équation	pas de solution réelle	une solution « double » $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Représentation graphique	 la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses	 la parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point	 la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points
Forme factorisée du trinôme	pas de factorisation en produit de facteurs de degré 1	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

Démonstration : Voir ci-dessus □

III. Exemples

Résoudre les équations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 = 0$ (1)
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28$
$\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$
Remarque : Penser à diviser les membres de l'équation si possible pour simplifier les calculs.
Ici, (1) $\iff x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0$
Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times \dfrac{3}{2} = 7$
$\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} = 0$ (2)
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 6 \times \dfrac{2}{3} = 16 - 16 = 0$
$\Delta = 0$, donc l'équation (2) a une solution :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

c. $x + 3x^2 = -1$ (3)
On a :
(3) $\iff 3x^2 + x + 1 = 0$
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 = 1 - 12 = -11$
$\Delta < 0$, donc l'équation (3) n'a pas de solution.

d. $2x^2 - 5x = 0$ (4)
Il n'y a pas de terme constant : inutile de calculer le discriminant : on factorise !
On a :
$$\begin{aligned}(4) &\iff x(2x-5) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$
Donc l'équation (4) a deux solutions : 0 et $\dfrac{5}{2}$.

e. $x^2 + 3 = 0$ (5)
Il n'y a pas de terme de degré 1 : inutile de calculer le discriminant !
On a :
(5) $\iff x^2 = -3$
Donc l'équation (5) a n'a pas de solution.

On déduit des calculs précédents les factorisations suivantes :

$2x^2 - 2x - 3 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

$6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} = a(x - x_0)^2 = 6\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

$2x^2 - 5x = a(x - x_1)(x - x_2) = 2x\left(x - \dfrac{5}{2}\right)$

IV. Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est appelée racine ou zéro du trinôme.
- Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
- Si l'équation s'écrit $ax^2+bx = 0$ ou $ax^2+c = 0$, il est inutile de calculer le discriminant (voir exemples d) et e).
- On peut bien sûr contrôler graphiquement les solutions trouvées avec la calculatrice ou un logiciel comme Geogebra.

Exercices

Équations du second degré

Exercice 178. Résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 - 12x + 18 = 0$
b) $x^2 - x + 6 = 0$
c) $3x^2 + 4x - 1 = 0$
d) $2x^2 - x + 1 = 0$

Exercice 179. Déterminer les racines des trinômes suivants.

a) $2x^2 + 3x - 2$
b) $3x^2 - 4x + 1$
c) $8x^2 - 2x - 1$
d) $\dfrac{1}{3}x^2 + x - 6$

Exercice 180. Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles d'équations suivantes avec l'axe des abscisses.

a) $y = x^2 - 4x + 3$
b) $y = 3x^2 + 2x + 3$
c) $y = -x^2 - 9x - 20$
d) $y = x^2 + 2x$

Exercice 181 - Avec ou sans discriminant.

1. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles que l'on peut résoudre sans utiliser le discriminant ?
   a) $x^2 + 6x = 0$
   b) $2x^2 - 2x + 6 = 0$
   c) $3x^2 + 4 = 0$
   d) $x^2 + 2x + 1 = 0$
   e) $2x^2 - 8 = 0$
   f) $(2x - 1)(x + 4) = 0$
   g) $3x^2 - 4x = 0$
   h) $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} = 0$
2. Résoudre toutes ces équations.

Exercice 182. Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3$
b) $(2x + 1)(x - 4) = x^2 - 4x - 6$
c) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 5x - 2$
d) $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6)$

Exercice 183. On considère la courbe $\mathscr{P} : y = x^2 + 3x + 3$ et la droite $(d) : y = x + 2$.

1. Représenter $\mathscr{P}$ et (d) sur le même graphique.
2. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 3 = x + 2$.
3. Résoudre cette équation et contrôler la cohérence des résultats obtenus.

Exercice 184. On considère les courbes $\mathscr{P} : y = x^2 - 4x$ et $\mathscr{P}' : y = 3x^2 + 4x - 2$.

1. À l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ et contrôler la cohérence des résultats obtenus.

Factorisation du trinôme

Exercice 185. Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a) $3x^2 - 6x - 9$
b) $-x^2 - 12x + 28$
c) $-x^2 + 5x - 10$
d) $3x^2 + \sqrt{2}x + 6$

Exercice 186. Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a) $x^2 - 4x - 1$
b) $x^2 - x - 6$
c) $3x^2 + 7x + 2$
d) $16x^2 + 24x + 9$

Exercice 187.

1. Factoriser, en un produit de trois polynômes de degré 1, le polynôme $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 9x$.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 188. Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Pour quelles valeurs de x est-elle valable ?

Fiche 2

Équations et inéquations du second degré Signe du trinôme - Résolution d'inéquations

I. Signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$,

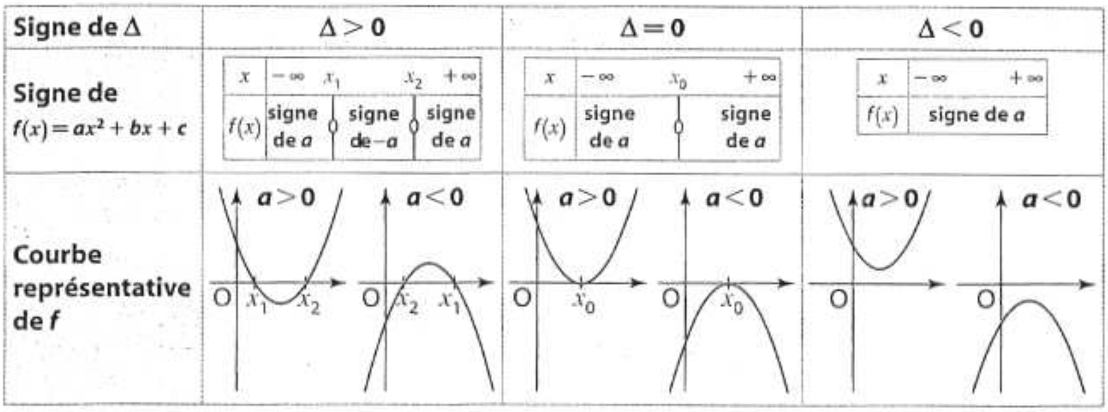
- Si $\Delta < 0$,
  on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

  L'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme.
  Ainsi, si $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Ainsi, en supposant que $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

D'où la propriété suivante :

Propriété 14
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le signe de f est donné par les tableaux suivants :



Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de $-a$; 0 ; signe de a	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de a	x : $-\infty$; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a
Courbe représentative de f	$a > 0$; $a < 0$	$a > 0$; $a < 0$	$a > 0$; $a < 0$

Démonstration : Voir ci-dessus. □

On peut retenir cette propriété en disant que :
« $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre les racines, s'il y en a ».

II. Exemples

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ (1)

On a démontré que le trinôme $2x^2 - 2x - 3$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $]-\infty\,;\, x_1] \cup [x_2\,;\, +\infty[$.

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} \leqslant 0$ (2)

On a démontré que le trinôme $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$ a une racine : $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2 - 4x + \frac{2}{3}$		$+$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

c. $3x^2+x+1>0$ (3)
On a démontré que le trinôme $3x^2+x+1$ n'a pas de racine.
De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+x+1>0$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est $\mathbb{R}$.

d. $-6x^2-10x+3<-4+x$ (4)
Soit $x \in \mathbb{R}$,
(4) $\iff -6x^2-11x+7<0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = 121+4\times 6\times 7 = 121+168 = 289 = 17^2$.
On a $\Delta>0$, donc le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11-17}{-12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$,
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11+17}{-12} = -\dfrac{28}{12} = -\dfrac{7}{3}$.
De plus le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2-11x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{7}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercices

Exercice 189.

1. Dresser les tableaux de signes des trinômes suivants.
   (a) $2x^2-5x+7$
   (b) $-x^2+6x+9$
   (c) $-4x^2-11x+3$
   (d) x^2+3x+5
2. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Exercice 190. Dresser les tableaux de signes des trinômes suivants.

a) x^2-4
b) $4x^2-8$
c) $(x-2)(x+3)$
d) $-3x^2+x+10$

Exercice 191 - Sans discriminant.
Résoudre les inéquations suivantes sans calculer de discriminant.

a) $x^2-1<0$
b) $4-2x^2\leqslant 0$
c) $3x^2+4x\leqslant 0$
d) $x<\dfrac{1}{x}$

Exercice 192. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{2}x^2+3x-8>0$
b) $x^2+3x-5<x+4$
c) $2(x+1)^2-3x>2$
d) $3x+\dfrac{1}{2x}\leqslant\dfrac{5}{2}$

Exercice 193 - Position relative de courbes.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2+5x+\frac{7}{2} \text{ et } g(x)=-x^2-3x.$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$.
2. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
3. Contrôler graphiquement ces résultats.

Exercice 194 - Fonction bornée.
Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)<5$ et $f(x)>-6$.

3. En déduire quelles valeurs de y_{min} et de y_{max} choisir pour tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.

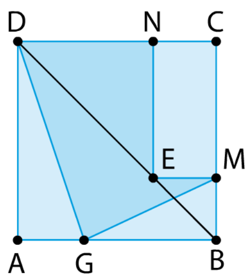
Exercice 195. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

1. Lire sur la calculatrice le signe de $g(x)$.
2. (a) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = (x-1)(ax^2 + bX + c)$.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 196. Soit f définie par $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$ pour tout $x > 0$.

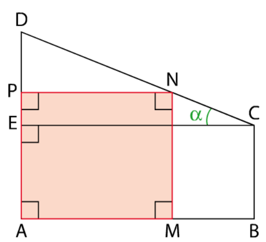
1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 8$.
2. Quel est le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$?

Exercice 197. $ABCD$ est un carré de côté 6 cm et E un point de la diagonale $[BD]$. G est un point de $[AB]$ tel que $AG = 2$ cm. M et N sont les projetés orthogonaux de E sur $[BC]$ et $[CD]$.



On pose $EM = x$. Pour quelles valeurs de x l'aire de $DNEMG$ est-elle supérieure à la moitié de celle du carré ?

Exercice 198. On souhaite poser des panneaux solaires sur un toit qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère $ABCD$. Les panneaux solaires occuperaient le rectangle $MAPN$. On a $AM = 8$ m, $AD = 7$ m et $CB = 3$ m.



On note h la longueur AP en m et $\mathscr{A}(h)$ l'aire du rectangle $MAPN$ en m^2.

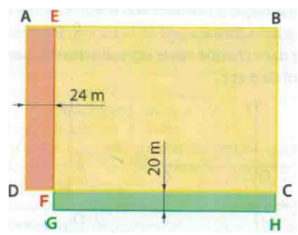
1. Calculer $\tan\alpha$.
2. En déduire que $PN = 14 - 2h$.
3. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(h)$ du rectangle $MAPN$ en fonction de h. Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\mathscr{A}$.
4. Comment doit-être h pour que $\mathscr{A}(h) \geqslant 24$ m^2 ?
5. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$ et donner l'aire maximale de $MAPN$.

Exercice 199 - Carrés Imbriqués.
Dans un carré de 10 cm de côté, on a colorié une bande de largeur x cm et un carré de côté x centré comme sur la figure suivante.

Déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire de la partie colorée est inférieure à l'aire de la partie blanche.

Exercice 200. On doit partager de manière égale une somme de 30 000 € entre un certain nombres de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacun serait augmentée de 1 250 €. Combien sont-ils ?

Exercice 201 - Remembrement.
Un agriculteur, propriétaire d'un champ rectangulaire $ABCD$ d'une superficie de 4 ha 32 a. doit dans le cadre d'un remembrement, céder une bande $AEFD$ de largeur 24 m et recevoir en échange une bande $FCHG$ de largeur 20 m de façon à conserver la même superficie.



Quelles étaient les dimensions initiales de son terrain ?
On rappelle que 1 ha = 100 a et que 1 ha = 10000 m^2

Exercice 202. L'aire d'un tringle rectangle est 429 cm^2 et son hypoténuse a pour longueur 72,5 cm. Quel est son périmètre ?

Fiche 3

Équations et inéquations du second degré
Inéquations du second degré

Exercice 203. Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 3x$, voici ce que propose Nathalie :

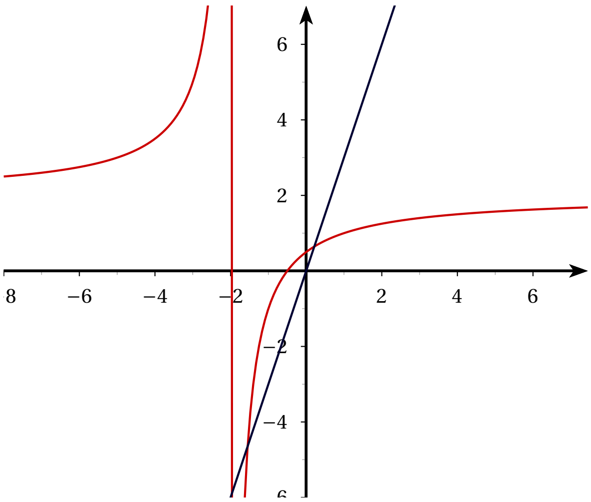
« *Je multiplie par* $x+2$: $2x+1 \leqslant 3x^2+6x$. *Je regroupe dans un même membre :* $-3x^2-4x+1 \leqslant 0$. *Je calcule le discriminant* $\Delta = 16+12 = 28$. *Je calcule les racines :*

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$

et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

Comme $a = -3$, *l'ensemble des solutions est* $\left]-\infty\,;\, \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\,;\,+\infty\,;\right[$. »

Son voisin Olivier commence par observer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ et $x \mapsto 3x$



1. En quoi l'observation d'Olivier n'est-elle pas compatible avec le raisonnement de Nathalie ?
2. Où est l'erreur commise par Nathalie ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée.

Exercice 204. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2}{x+2} > 1$
2. $\dfrac{-3x+1}{2-x} \geqslant \dfrac{-4x+5}{x+3}$

Exercice 205.

1. Tracer avec la calculatrice les courbes des fonctions carré et inverse.
2. Conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < \dfrac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer des réels b et c tels que pour tout réel x,
$$x^3-1 = (x-1)(x^2+bx+c).$$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 206. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x^2+15x-18)(x^2+12x+36) > 0$
2. $(x^2-x-2)(9x^2-9x-54) < 0$

Exercice 207. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $1-2x \leqslant \dfrac{3}{x+2}$
2. $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x+2}$
3. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{2x-1}{x+3}$

Exercice 208. Déterminer le signe de sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante :

1. $f : x \mapsto x-2+\dfrac{1}{x+3}$
2. $f : x \mapsto x-6+\dfrac{1}{x-4}$
3. $f : x \mapsto x-3+\dfrac{2x-7}{x-1}$

Fiche 4

Équations et inéquations du second degré Équations se ramenant à des équations du second degré - Approfondissements

Exercice 209. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2. $x^4 + x^2 - 2 = 0$
3. $6x - 13\sqrt{x} - 5 = 0$

Aide : On pourra effectuer un changement d'inconnue pour se ramener à des équations du second degré. $X = x^2$ pour 1 et 2 et $X = \sqrt{x}$ pour 3.

Exercice 210. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $10x^3 + 12x^2 - 14x = 0$
2. $7x + \dfrac{4}{x} - 1 = 0$
3. $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-1}{2x}$
4. $7x + \dfrac{4}{x} - 1 = 0$
5. $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x+5}{x-3}$
6. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{6}{x^2} = 0$

Exercice 211.
On considère l'équation $\sqrt{x-1} = x - 2$ (E)

1. Justifier que l'équation $\sqrt{x-1} = x - 2$ est équivalente à $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \\ (x-1) = (x-2)^2 \end{cases}$
2. En utilisant la question précédente résoudre (E).

Exercice 212. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} = x + 2$
2. $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{2}x$
3. $\sqrt{x^2+9} = 1 - x$
4. $\sqrt{9-x^2} = 1 - x$
5. $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x+2}$
6. $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x+2}$

Exercice 213.
On considère l'équation $x^2 + x - 4 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$ (E)

1. Quels sont les intervalles sur lesquels on doit résoudre cette équation ?
2. Posons $X = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer X^2.
3. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $\begin{cases} X^2 + X - 6 = 0 \\ X = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
4. Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$ puis en déduire les solutions de (E).

Fiche 5

Équations et inéquations du second degré Racines de trinômes - Cas particuliers

I. Discriminant réduit

Propriété

Propriété 15
On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels, $a \neq 0$.
Si b est pair, i.e. si $b \in \mathbb{Z}$ et s'il existe $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2b'$, alors on appelle **discriminant réduit** du trinôme le nombre $\Delta' = b'^2 - ac$.
On a alors :

- si $\Delta' < 0$, alors le trinôme n'a pas de racine.
- si $\Delta' = 0$, alors le trinôme a une racine double : $-\dfrac{b'}{a}$.
- si $\Delta' > 0$, alors le trinôme a deux racines : $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exercice 214 - démonstration de la propriété.

1. Soit Δ le discriminant du trinôme, montrer que $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4}$.
2. Montrer que :
   (a) $-\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{b}{2a}$.
   (b) $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 215 - Application.
Résoudre les équations suivantes en utilisant le discriminant réduit.

a) $5x^2 + 4x - 7 = 0$
b) $12x^2 - 12x + 3 = 0$
c) $-8x^2 + 6x - 3 = 0$

II. Somme et produit de racines

II.1. Propriété

Propriété 16
Lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par les relations :

$$S = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}$$

.

Démonstration :

- Si les deux racines sont confondues : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, donc $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{b^2}{4a^2}$;
  or, dans ce cas, $b^2 - 4ac = 0$, donc $P = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
- Si les deux racines sont distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Alors $x_1 + x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})+(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$,
  et $x_1 x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{a}{c}$. □

Exemple
Résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

« À vue » $x_1 = 1$ est solution de l'équation puisque $2 - 5 + 3 = 0$.
On dit que x_1 est une solution évidente.
L'autre solution x_2 vérifie donc $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$, d'où $x_2 = \frac{3}{2}$.

Exercice 216.
Résoudre chaque équation après avoir « deviné » une solution (racine évidente)

(1) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

(2) $-7x^2 - 6x + 1 = 0$

(3) $\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$

(4) $x^2 - x - 6 = 0$

II.2. Application

Propriété 17
Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration :

Si x_1 et x_2 vérifient : $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$, alors :
$P = x_1 x_2 = x_1(S - x_1) = -x_1^2 + Sx_1$, donc $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$.
Cela montre que x_1 est solution de $x^2 - Sx + P = 0$. De même pour x_2.

Réciproquement, si x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors, d'après la propriété ci-dessus, $x_1 + x_2 = \frac{S}{1} = S$ et $x_1 x_2 = \frac{P}{1} = P$. $\square$

Exemple
Trouver, s'ils existent, deux réels dont la somme est 6 et le produit est 1.

S'ils existent, ces nombres sont solutions de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.
Le discriminant vaut : $\Delta = 36 - 4 = 32$. $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Les nombres cherchés sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

Exercice 217.
Écrire une équation de la forme $x^2 + px + q = 0$ dont les solutions soient :

a) 2 et 3
b) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$
c) 4 et $\frac{1}{4}$
d) $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3} - 1$ et $\sqrt{3} + 1$

Exercice 218.
Déterminer, s'ils existent, deux réels u et v connaissant leur somme S et leur produit P dans les cas suivants .

a) $S = 1$ et $P = 1$
b) $S = -6$ et $P = 9$
c) $S = -7$ et $P = -10$

Exercice 219.
Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle dont l'aire est 126m^2 et le périmètre 50m.