Chapitre 7

Fiche 1

Fonctions dérivées
Fonctions usuelles

I. Définitions

Définition 13
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que $\boldsymbol{f}$ **est dérivable sur** $\boldsymbol{I}$ lorsque, pour tout $x \in I$, f est dérivable en x.

Définition 14
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

Soit x un réel, h un réel non nul.
Déterminons le taux de variation de f entre x et $x+h$.
$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
On a donc :
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$.
Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

Donc la fonction f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$.
Autrement dit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2x$.

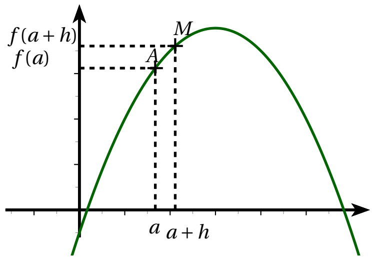
La proposition suivante sera utilisée pour établir certaines formules de fonctions dérivées.

Propriété 18
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a.
Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

Démonstration : Admise. □

Remarques
1. $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ est équivalent à $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. Ce théorème signifie que si f est dérivable en un réel a, alors lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, le nombre $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.



3. La réciproque de ce théorème est fausse : nous avons vu que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 ; cependant $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$.

II. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 19
Le tableau suivant indique les fonctions dérivées des principales fonctions usuelles.

Ensemble de définition de f	f est définie par	f est dérivable sur (ensemble de dérivabilité de f)	f' est définie par
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$[0\,;\,+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration : La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^n$ est admise ; les autres sont démontrées dans la partie exercices. □

Exemple
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Calculer $f'(2)$. En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction usuelle.
Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.
On a donc, en particulier $f'(2) = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$.
De plus, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$,
c'est-à-dire : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$
qui est équivalente à $y = 12(x-3) + 8$
qui est équivalente à $y = 12x - 36 + 8$
soit $y = 12x - 28$.

Exercices

Exercice 220. Soit k un réel, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = 0$.

Exercice 221. Soit a et b deux réels, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = a$.

Exercice 222. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout réel x non nul, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 223. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 224. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(a)$.

1. $f(x) = x^2$ et $a = -5$;
2. $f(x) = x^3$ et $a = \dfrac{1}{2}$;
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$;
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 3$.

Fiche 2

Fonctions dérivées
Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 20
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

1. Si k est un réel, la fonction ku est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (ku)'(x) = ku'(x).$$
On écrit : $(ku)' = ku'$.
2. La fonction $u + v$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$
On écrit : $(u+v)' = u' + v'$.
3. La fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
On écrit :$(uv)' = u'v + uv'$.
4. Si la fonction u ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$
On écrit : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.
5. Si la fonction v ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$
On écrit : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
6. Si a et b sont deux réels, la fonction $w : x \longmapsto u(ax+b)$ est définie et dérivable sur l'ensemble K des réels x tels que $ax + b \in I$ et :
$$\text{pour tout } x \in K,\ w'(x) = au'(ax+b).$$

Démonstration : Voir partie exercices. □

Exemples
Dans chacun des cas suivants, déterminons le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculons sa dérivée.

1. $f(x) = 12\sqrt{x}$; $x \in [0\,;\,+\infty[$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le produit de la fonction racine carrée par la constante 12, or la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, f est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

- **calcul de la dérivée** :
  Pour tout réel x, $f'(x) = 12 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

2. $f(x) = x^2 + x$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x, $f'(x) = 2x + 1$.

3. $f(x) = 2x\sqrt{x}$; $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le produit des fonctions u et v avec :
     - $u : x \longmapsto 2x$; dérivable sur $\mathbb{R}$
     - $v : x \longmapsto \sqrt{x}$; dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

     f est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x > 0$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
     Donc :
     $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \\ &= 3\sqrt{x}. \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est l'inverse de la fonction u avec $u : x \longmapsto x^2 + 1$.
     La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, avec $u'(x) = 2x$.
     Donc : $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\mathbb{R}brace$
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le quotient des fonctions u et v avec :
     - $u : x \longmapsto \sqrt{x}$; dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$
     - $v : x \longmapsto x - 1$; dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\mathbb{R}brace$

     f est donc dérivable sur $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$.
     Donc :
     $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(2\sqrt{x}(x-1) - \sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

6. $f(x) = \sqrt{3x-1}$; $x \in \left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   - **dérivabilité** :
     Soit $x \geqslant \frac{1}{3}$, $f(x) = u(3x-1)$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{x}$.
     La fonction u est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sur l'ensemble des réels x tels que $3x-1 > 0$, c'est-à-dire sur $\left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x > \frac{1}{3}$, $f'(x) = 3u'(3x-1)$, avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
     Donc : $f'(x) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

Propriété 21
Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Conséquence directe des points 1 et 2 de la propriété précédente. ☐

Propriété 22
Soit u et v deux fonctions polynômes. Alors la fonction $\frac{u}{v}$, appelée **fonction rationnelle**, est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration : Conséquence directe de la propriété 21 et du point 5 de la propriété 20. ☐

Exemples
Dans chacun des cas suivants, déterminons le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculons sa dérivée.

1. $f(x) = -2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 12$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x,
     $$f'(x) = -2 \times 3x^2 + \frac{5}{2} \times 2x - 1$$
     $$= -6x^2 + 5x - 1.$$

2. $f(x) = \frac{x}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le quotient des polynômes u et v avec :
     - $u : x \longmapsto x$
     - $v : x \longmapsto x+3$

     f est donc une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

- **calcul de la dérivée** :
  Pour tout $x \neq -3$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
  Donc :
  $$f'(x) = \frac{1(x+3) - x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}.$$

Exercices

Dérivées et opérations

Exercice 225. Somme On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$
3. $f(x) = x^3 + x$
4. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} + 3$

Exercice 226. Produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 4x$
2. $f(x) = 5x^2$
3. $f(x) = -3\sqrt{x}$
4. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

Exercice 227. Somme et produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = 2x + 1$
3. $f(x) = -4x + 6$
4. $f(x) = 2x^2 - 5x$
5. $f(x) = -x + 4$
6. $f(x) = 3x^5 - 2x^2$
7. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x$
8. $f(x) = -x^3 + x^2\sqrt{x} + 4x$

Exercice 228. Somme et produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 2x + 5$
4. $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 5x}{4}$

Exercice 229. Produit de deux fonctions On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = x^2(2x+4)$
3. $f(x) = 4x(x-5)$
4. $f(x) = x^3(x - \sqrt{x})$

Exercice 230. Inverse On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x+4}$
4. $f(x) = \dfrac{-5}{x^2+1}$

Exercice 231. Quotient On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+3}{x}$

Exercice 232. Calculs en vrac On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$
3. $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

Exercice 233. Calculs en vrac On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (2x+1)^2$
2. $f(x) = x^2(x+3)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3x^2 + \dfrac{x}{5} - 3$

Exercice 234. Calculs en vrac On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^3\sqrt{x}$
2. $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x+6}$
3. $f(x) = -\dfrac{3}{2x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3}$

Calcul de dérivées et applications

Exercice 235. Au sommet d'une parabole

1. (a) Déterminer le sommet S de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2x^2 - 4x + 3$
   (b) Déterminer la tangente à $\mathscr{P}$ en S.
2. Ce résultat est il généralisable à toute parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c\ réels, a \neq 0)$?

Exercice 236. Courbes tangentes On considère les courbes $\mathscr{C}_1 : y = x^2 + 2x$ et $\mathscr{C}_2 : y = -x^2 + 6x - 2$.

1. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur la calculatrice.
2. Montrer qu'elles n'ont qu'un point commun A.
3. Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente en A. on dit alors que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en A.

Exercice 237. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Donner les coordonnées du point A où $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées.
3. Déterminer la tangente T_A en A à la courbe $\mathscr{C}$.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_A.

Exercice 238. Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Trouver une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. Montrer que $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$, pour tout réel x.
4. En déduire la position $\mathscr{C}$ par rapport à T.

Exercice 239. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Montrer que les deux courbes $\mathscr{P} : y = 2x^2 - 3x + 1$ et $\mathscr{P}' : y = x^2 - 3x + 2$ ont pour point commun le point $A(1;0)$ et que leurs tangentes en ce point sont orthogonales. Les courbes sont dites orthogonales.

Fiche 3

Fonctions dérivées Approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; I; J)$.

Exercice 240. $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentant les fonctions f, g, et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ et $h(x) = -x^2 + 4x - 1$.

1. Établir les tableaux de variation de f, g et h.
2. Montrer que
   (a) le point $A(1 ; 2)$ est commun à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$
   (b) les trois courbes admettent en A la même tangente T.
3. Écrire une équation de T et étudier la position de chacune des courbes par rapport à T.
4. Tracer T, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
5. Chacune des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$? Si oui préciser, en quel point et écrire leur équation.

Exercice 241. Tangente issue d'un point Soit la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ et le point $S(2 ; -1)$. on se demande si on peut tracer une (ou plusieurs) tangente(s) à $\mathscr{C}$ passant par S.

1. Émettre une conjecture à l'aide de votre calculatrice.
2. Soit a réel. Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par le point $A(a; a^2)$.
3. Combien de tangentes à $\mathscr{C}$ passent par S ?

Exercice 242. Courbe sous contrainte On cherche une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par le point $A(0,0)$, $B(3,-3)$ et qui admet pour tangentes en A et B les droites (AC) et (BD) où $C(-1;-5)$ et $D(5 ; 1)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont $\mathscr{C}$ serait la courbe représentative. Est-il possible de trouver $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b,c et d sont des réels ?

Exercice 243. Avis de recherche Déterminer trois réels a, b, c tels que la courbe d'équation $y = ax + b + \frac{c}{x-1}$ passe par $A(3;2)$, admette en ce point une tangente horizontale et possède au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

Exercice 244. Problème ouvert On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et, pour tout point A de $\mathscr{H}$, la tangente à $\mathscr{H}$ en A. Elle coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C. Comment varie l'aire du triangle OBC quand A parcourt $\mathscr{H}$?

Exercice 245. Problème ouvert On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. Pour tout réel a non nul, on nomme E le point d'intersection des tangentes à la paraboles aux points d'abscisses a et $-\frac{1}{a}$. Quel est l'ensemble décrit par le point E quand A décrit $\mathbb{R}^*$?

Fiche 4

Fonctions dérivées Démonstrations - Dérivée d'une fonction composée

Démonstrations des propriétés

Dans les exercices 246 à 251, u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Exercice 246. Montrer que la fonction ku est définie et dérivable sur I et que :

pour tout $x \in I$, $(ku)'(x) = ku'(x)$.

Exercice 247. Montrer que la fonction $u+v$ est définie et dérivable sur I et que :

pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exercice 248. Montrer que la fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur I et que :

pour tout $x \in I$, $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Exercice 249. On suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$

Exercice 250. On suppose que la fonction v ne s'annule pas sur I. Montrer que la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Exercice 251. Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $w : x \longmapsto u(ax+b)$ est définie et dérivable sur l'ensemble K des réels x tels que $ax+b \in I$ et que :

pour tout $x \in K$, $w'(x) = au'(ax+b)$.

Dérivée d'une fonction composée

Exercice 252. Soit h la fonction définie sur I avec $I =]-\infty\,;\,4[$ par $h\colon x \longmapsto \sqrt{-3x+12}$.

1. h est une fonction composée de deux fonctions g et f dans cet ordre, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $h(x) = g(f(x))$. Donner l'expression des fonctions g et f.
2. En utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée, démontrer que la fonction h est dérivable sur I.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel strictement positif x et celle de $g'(x)$ pour tout réel x de I.
4. En déduire l'expression de la dérivée h'.

Exercice 253. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon x \longmapsto (5x+8)^3$.
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 254. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\colon x \longmapsto (-9x+1)^5$.
Déterminer sur quel ensemble la fonction g est dérivable puis déterminer sa dérivée.

Exercice 255. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h\colon x \longmapsto \sqrt{3x-1}$.
Déterminer sur quel ensemble la fonction h est dérivable puis déterminer sa dérivée.

Exercice 256. Soit h la fonction définie par $h\colon x \longmapsto \sqrt{10-x}$.
Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction h puis déterminer sa dérivée.

Exercice 257. Soit h la fonction définie par $h\colon x \longmapsto -\dfrac{\sqrt{4x+3}}{2}$.
Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction h puis déterminer sa dérivée.