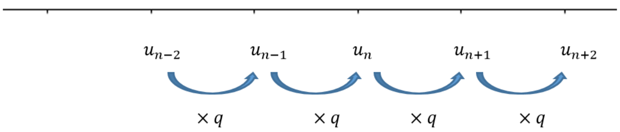
Chapitre 8

Fiche 1

Suites géométriques
Définition et terme général

I. Définition

> **Définition 15**
> On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}) = qu_n$
> La constante q s'appelle la **raison** de la suite.



Ainsi, dire qu'une suite est géométrique signifie que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par une même constante.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Montrons que la suite (u_n) est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
Donc, il existe un réel q, $q = 2$ tel que, pour tout entier $n, u_{n+1}) = qu_n$. Ainsi, par définition, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme u_0 avec $u_0 = 1$.

Autre méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, on peut donc calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
Donc, par définition, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme u_0 avec $u_0 = 1$.

Méthode

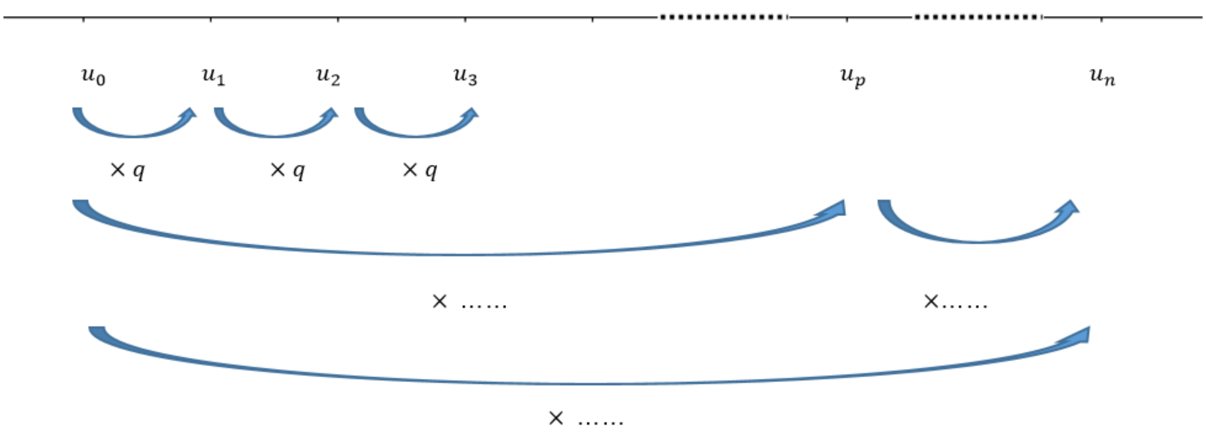
> - Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut montrer que :
>   - il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}) = qu_n$ (définition) ;
>   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.
> - Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, on exhibe deux quotients de termes consécutifs qui ne sont pas égaux (un contre-exemple).

Exemple
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3}{n^2+1}$. La suite (v_n) est-elle géométrique ?

$v_0 = \dfrac{3}{1} = 3$; $v_1 = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2}$; $v_2 = \dfrac{3}{4+1} = \dfrac{3}{5}$.
Ainsi $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$.
On a donc $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$ et par conséquent, la suite (v_n) n'est pas géométrique.

II. Terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a :
$u_1 = u_0 \times q$;
$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$;
$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$;
...
et ainsi de suite.



Propriété 23
1. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
2. Réciproquement, si (u_n) est une suite telle que, il existe a et b réels tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = a \times b^n,$$

alors (u_n) est une suite géométrique de raison b et $a = u_0$.

Démonstration : Admise □

Exemple
On considère l'exemple précédent avec la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n = 1 \times 2^n = a \times b^n$, avec $a = 1$ et $b = 2$.
Ainsi, d'après le second point de la propriété précédente, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercices

Exercice 258. Dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est géométrique de raison q. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a) $u_0 = 1$ et $q = 2$

b) $u_0 = 1$ et $q = -2$

c) $u_0 = -1$ et $q = -1$

d) $u_0 = 1$ et $q = \frac{1}{2}$

Exercice 259. Dans chacun des cas suivants, la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, est géométrique de raison q. Donner l'expression du terme général de la suite puis calculer v_{20}.

a) $v_1 = 1$ et $q = 3$

b) $v_5 = 2$ et $q = -1$

c) $v_{50} = 1024$ et $q = -2$

Exercice 260. Dans chacun des cas suivants, on donne le terme général d'une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n. Déterminer si la suite (u_n) est géométrique. Si oui, donner sa raison.

a) $u_n = 3^{n+1}$

b) $u_n = n^2$

c) $u_n = 2 \times 5^{n+1}$

d) $u_n = -5^{n-2}$

Exercice 261. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite est géométrique. Si oui, donner sa raison.

a) (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 6^{n+2}$.

b) (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 - 1$.

c) (w_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et la relation, pour tout n entier naturel, $3w_{n+1} = 2w_n$.

d) (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

Exercice 262. (u_n) est une suite géométrique de raison q. Exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = 2$ et $q = 5$

b) $u_0 = -1$ et $q = -2$

Exercice 263. (u_n) est une suite géométrique de raison q. Exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = \frac{1}{3}$ et $q = -5$

b) $u_0 = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$

Exercice 264. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 5. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n et u_3.

Exercice 265. Soit (v_n) une suite géométrique de raison -2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et v_{10}.

Exercice 266. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Dans chaque cas, déterminer la (ou les) valeur(s) possible(s) de q.

a) $u_{14} = -8$ et $u_{15} = 48$

b) $u_{10} = 4$ et $u_{12} = 36$

Exercice 267. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Dans chaque cas, déterminer la (ou les) valeur(s) possible(s) de q et de u_0.

a) $u_4 = 1$ et $u_8 = 16$

b) $u_9 = 2$ et $u_{11} = \frac{2}{25}$

Fiche 2

Suites géométriques
Situations modélisées par une suite géométrique

Exercice 268. Il est possible de modéliser chacune des situations ci-dessous par une suite, que l'on notera (u_n).
Dans chaque cas :

a) définir (u_n) par une phrase en français ;
b) pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ;
c) dire si la suite est arithmétique ou géométrique, ou ni arithmétique ni géométrique.

1. Le nombre d'abonnés à une chaîne YouTube de 10 % par mois.
2. Une somme placée en banque augmente de 100 € par an.
3. Un nénuphar double sa surface chaque jour.
4. L'aire (en ha) d'un ensemble de forêts diminue de 0,4 % par an mais cet ensemble bénéficie d'un reboisement de 2 ha par an.
5. La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 7 % par heure après son injection.

Exercice 269. En 2010, un article coûte $8,20$ €. Il augmente chaque année de 1 %. On note p_n le prix de l'article à l'année $2010+n$.

1. Donner p_0. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n)
3. Exprimer p_n en fonction de n puis calculer le prix de l'article en 2025.

Exercice 270 - Capitalisation.
Un capital de 6 500 € est bloqué pour 15 ans sur un compte rapportant un intérêt annuel de 4 %, Cet intérêt est versé sur le compte à la fin de chaque année. On note C_0 le capital de départ et pour $n \geqslant 1$, on note C_n le montant figurant sur le compte au bout de la n-ième année.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
2. En déduire la nature de la suite (C_n) puis exprimer son terme général.
3. Quel sera le capital au bout de 5 ans ?
4. Faire afficher par votre calculatrice la liste des premiers termes de la suite (C_n) et déterminer, par lecture des valeurs obtenues, le nombre d'années nécessaires pour que le capital ait augmenté de 50 %.

Exercice 271 - Le modèle de Malthus.
En 1798, Malthus publie *An essay on the Principle of Population.* Il y émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine. En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus supposa que la population augmentait d'environ 2 % chaque année et que l'amélioration de l'agriculture permettait de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année.
Pour $n \geqslant 1$, on note P_n la population l'année $1800+n$ et a_n le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année.

1. (a) Exprimer P_n en fonction de n.
   (b) D'après Malthus, quelle aurait été la population en 1900 ?

2. Combien l'agriculture aurait-elle pu nourrir de personnes en 1900 selon ses prévisions ?
3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, déterminer en quelle année la situation devait devenir critique selon Malthus.

Exercice 272 - Modéliser pour prévoir.
On a consigné sur un tableur les résultats de mesures expérimentales obtenues lors de l'étude d'une population de bactéries. On note a_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Calculer $a_{n+1} - a_n$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pour les valeurs données dans le tableau suivant.

	A	B
1	heures	population bactérie A
2	0	10000
3	1	12400
4	2	15405
5	3	19082
6	4	23651
7	5	29304
8	6	36361

2. Proposer une suite pouvant modéliser l'évolution de la bactérie.
3. Selon le modèle choisi, quelle population de bactéries prévoit-on au bout de 12 h si l'évolution continue de la même façon ?

Exercice 273. La matière vivante contient du carbone 14. À la mort d'un être vivant, le carbone 14 se désintègre à un rythme de 1,2% tous les 100 ans.

1. Considérons aujourd'hui un échantillon contenant 5 g de carbone 14. Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse (en g) de carbone 14 dans cet échantillon après $100 \times n$ années.
   a) Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2. On arrondira au centième.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Combien de grammes de carbone 14 l'échantillon contiendra-t-il dans 500 ans ? Dans 2000 ans ? On arrondira au centième.
2. On a retrouvé un échantillon d'os qui contient 40% du carbone 14 d'un être vivant. Estimer au siècle près, l'âge de l'échantillon.

Exercice 274. Une feuille a une épaisseur de $0,1$ mm que l'on note e_0. Si on la plie en deux, on obtient une feuille d'une épaisseur de $0,2$ mm, que l'on note e_1. Pour tout entier naturel n, on note e_n l'épaisseur de la feuille (en mm) après le n-ième pliage.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer e_n en fonction de n.
2. Calculer e_{20}. Ce résultat semble-t-il possible dans la réalité ?

Fiche 3

Suites géométriques
Suite auxiliaire géométrique

Exercice 275. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   (b) Donner, pour n entier naturel, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer une expression de u_{50}.

Exercice 276. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n.$$

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul suivante présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième :

	A	B	C
1	*n*	*u(n)*	*v(n)*
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563

   Quelles formules, étirées ensuite vers le bas, peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) et (v_n) ?

2. (a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   (b) Démontrer cette conjecture.
3. Donner la valeur exacte de u_{50}.

Exercice 277 - D'après Bac ES.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$v_n = u_n - 90.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 0,8. On précisera la valeur de v_0
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
u ← 65
n ← 0
Tant que .........
    u ← 65
    n ← 0
```

   (a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 85$.
   (b) Quelle est la valeur de la variable n après l'exécution de l'algorithme ?
4. La société Biocagette propose la livraison d'un panier qui contient des fruits et des légumes issus de l'agriculture biologique. Les clients peuvent souscrire un abonnement de 52 € par

mois, pour des paniers bios hebdomadaires. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit à cet abonnement. Les statisticiens de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

Exercice 278. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 2,4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.
   (b) Donner, pour n entier naturel, l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. (a) Déterminer le premier entier n_1, tel que $5,9 < u_{n_1} < 6$.
   (b) Déterminer le premier entier n_2 tel que $5,99 < u_{n_2} < 6$.

Exercice 279. La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 tel que $u_0 \leqslant 1$ et par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. (a) Calculer les premiers termes de la suite pour $u_0 = 0$. Que peut-on dire de la suite dans ce cas ?
   (b) Et pour $u_0 = 1$?
2. On suppose que $u_0 = -1$. Pour tout$n \geqslant 0$, on admet que $u_n \neq 1$ et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Fiche 4

Suites géométriques
Somme des termes consécutifs

I. Somme des premiers termes

Propriété 24
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- si $q = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times u_0$$
- si $q \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
Et plus généralement, la somme de plusieurs termes consécutifs se calcule avec la formule suivante :
$$\text{Somme des termes} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Démonstration :

— Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,
$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \underbrace{u_0 + u_0 + \ldots + u_o}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1)u_0$.

— Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,
On note S la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$
On a alors : $qS = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_n$
$= u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$
Par conséquent,
$S - qS = u_0 - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} + \ldots + u_{n-1} - \cancel{u_n} + \cancel{u_n} - \cancel{u_{n+1}}$
$= u_0 - u_{n+1}$
On a donc : $(1-q)S = u_0 - u_{n+1}$
$= u_0 - u_0 q^{n+1}$
$= u_0(1 - q^{n+1})$
D'où :
$S = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ □

Remarque (Cas particulier)
Soit q un réel, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer la somme des 12 premiers termes de la suite.

Le premier terme est u_0 donc le 12e terme de la suite est u_{11}.
D'après la propriété, on a :

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+\ldots+u_{11} &= u_0 \times \frac{1-q^{12}}{1-q}\\
&= -3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= -3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{\frac{1}{2}}\\
&= -6 \times \left(1-\frac{1}{4096}\right)\\
&= -6 \times \frac{4095}{4096}\\
&= -\frac{12285}{2048}
\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 280. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 4$, telle que $u_0 = 4$.
Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Exercice 281. Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique :

a) de premier terme 3 et de raison $1,05$;

b) de premier terme 2 et de raison $-0,8$.

Exercice 282. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$, telle que $u_0 = 10$.

a) Calculer $u_3 + u_1 + \ldots + u_{100}$, notée S, et écrire le résultat en fonction de puissances de 2.

b) En utilisant l'approximation $2^{10} \approx 10^3$, donner un ordre de grandeur de S.

Exercice 283. Dans chaque cas, S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Calculer S.

a) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{20}$

b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 \ldots + 1024$

c) $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{49} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}$

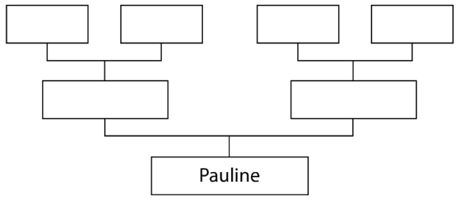
Exercice 284. Dans chaque cas, S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Calculer S.

a) $S = 1 + 2 + \ldots + 1024$

b) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{19683}$

Exercice 285 - Alexis est gourmand. Alexis se sert plusieurs fois du gâteau placé devant lui : il prend à chaque fois la moitié de ce qui reste. Quelle proportion du gâteau aura-t-il mangé après s'être resservi pour la vingtième fois ?

Exercice 286 - Arbre généalogique. Pauline veut faire son arbre généalogique.



Ses deux parents sont ses ancêtres de première génération, ses quatre grands-parents sont ses ancêtres de 2^e^ génération, etc.
Si Pauline arrive à remonter jusqu'à la huitième génération, combien d'ancêtres aura-t-elle inscrit dans son arbre ? et à la n-ième génération ?

Exercice 287 - La récompense. De nombreuses légendes racontent l'invention du jeu d'échecs. L'une d'elle l'attribue à Sissa, sage oriental du Ve siècle après J.-C. Comme récompense, celui-ci aurait demandé à son prince 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, 2 grains sur la 2e case, 4 grains sur la 3e case, etc. en doublant à chaque fois le nombre de grains de blé. Cette demande, apparemment modeste, n'aurait pas pu être accordée : pourquoi ?
Données : un grain de blé pèse en moyenne 40 mg. La production mondiale de blé en 2009-2010 fut de 660 millions de tonnes.

Fiche 5

Suites géométriques Approfondissements

Exercice 288 - Suites emmêlées.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et v_1, v_2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer d_n en fonction de n.
3. On considère la suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Calculer s_0, s_1 et s_2.
   (b) Montrer que $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer en fonction de n les sommes suivantes :
   $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

Exercice 289 - Des carrés parfaits ?.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ par :

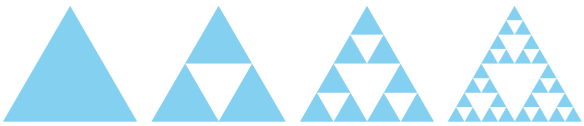
- $u_1 = 16$;
- $u_2 = 1156$;
- $u_3 = 111556$;
- $u_4 = 11115556$;
- $u_5 = 1111155556$;
- etc.

Pour $n \geqslant 1$, u_n s'écrit avec n chiffres égaux à 1 suivis de $n-1$ chiffres égaux à 5 puis d'un chiffre égal à 6.

1. Vérifier que u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sont des carrés parfaits (c'est-à-dire des carrés d'entiers).
2. (a) Calculer $S_n = 10 + \ldots + 10^{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $T_n = 10^n + \ldots + 10^{2n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
3. (a) Justifier que $u_n = T_n + 5S_n + 6$ pour $n \geqslant 2$.
   (b) En déduire une écriture de u_n en fonction de n.
   (c) Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \left(\dfrac{2+10^n}{3}\right)^2$.
4. Est-il vrai que pour tout $n \geqslant 1$, u_n est un carré parfait ?

Exercice 290 - Le triangle de Sierpinski.

On enlève à un triangle équilatéral coloré en bleu son triangle des milieux puis on recommence la même manipulation sur chacun des triangles bleus restants et ainsi de suite.



Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

Quel est le nombre de triangles blancs à l'étape 100 ? Quelle part de l'aire du triangle de départ représente l'aire encore colorée en bleu à l'étape 100 ?

Exercice 291 - La rue : un univers impitoyable .

(D'après Swokowski - Analyse - De Boeck Université)

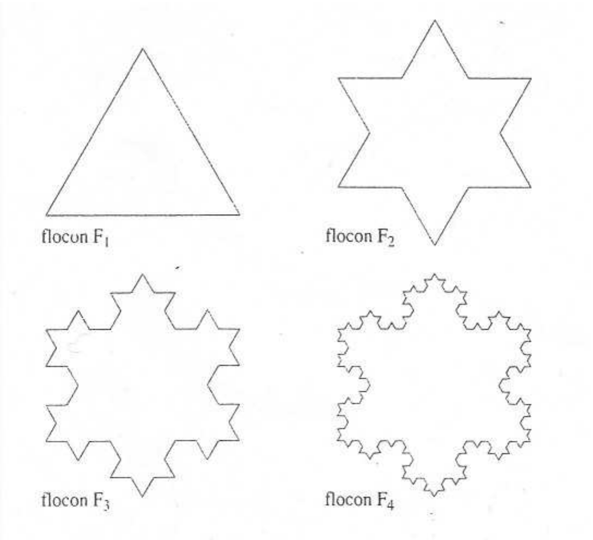
Dans une population de chats vivant en liberté, les chattes adultes ont, chaque été, une portée annuelle de trois chatons en moyenne (y compris les chattes nées l'année d'avant).

À la naissance, un chaton sur deux est une femelle. Le taux de survie d'un chaton est de 40 %, celui d'un chat adulte est de 60 %, d'une année sur l'autre. La première année, on recense une quarantaine de chats adultes dans un quartier, et une dizaine de chatons.

1. Conjecturer l'évolution de la population des chats du quartier en fonction des données.
2. On note a_n le nombre de chats adultes le n-ième été, et c_n le nombre de chatons nés durant l'été de la n-ième année. On pose $a_0 = 40$ et $c_0 = 10$. Montrer que :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,4c_n \\ c_{n+1} = 1,5a_{n+1} \end{cases}$$
3. En déduire que les suites (a_n) et (c_n) sont géométriques, et exprimer a_n et c_n en fonction de n.
4. Commenter alors objectivement l'évolution de la population.

Exercice 292 - Les flocons de Von Koch.

Le flocon F_1 est un triangle équilatéral de cote 1I. Pour passer d'un flocon F_n au suivant, on partage chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux et on substitue au segment central deux serments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral tourné vers l'extérieur. Les quatre premiers flocons sont construits ci-dessous.



On note respectivement c_n, ℓ_n, p_n et a_n, le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire du flocon F_n.

1. **Calcul de c_n**
Montrer que la suite (c_n) est définie par :
$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_{n+1} = 4c_n \end{cases}$$
En déduire une expression de c_n en fonction de n.
2. **Calcul de ℓ_n**
Exprimer ℓ_n en fonction de n.
3. **Calcul de p_n**
Déduire des questions précédentes que la suite (p_n) est géométrique et préciser la raison.
4. **Calcul de a_n**
   (a) Calculer a_1 .
   (b) En remarquant que l'on construit F_{n+1} en « ajoutant » sur chaque côté de F_n un triangle équilatéral de côté ℓ_{n+1}, établir l'égalité :
   $$a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$
   (c) En déduire l'égalité :
   $$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$
   pour tout $n \geqslant 1$.
   (d) Montrer que la suite (a_n) est majorée par $\frac{2}{5}\sqrt{3}$.

Lorsqu'on continue la construction des flocons de Von Koch. on obtient une suite de polygones dont le pénrr :tre est aussi grand que l'on veut mais dont l'aire reste bornée.
Autre étrangeté : si l'on observe le contour du flocon « limite » avec une loupe de grossissement égal à 3, on observe la même ligne brisée qu'à l'œil nu. Cette « courbe » auto-semblable à un rapport d'échelle près est appelée une **courbe fractale**.
Le triangle de Sierpinski est un autre exemple de forme fractale.