Chapitre 9

Fiche 1

Applications de la dérivation
Signe de la dérivée et variations

I. Des variations à la dérivée

Propriété 25
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si f est strictement croissante (ou croissante) sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est strictement décroissante (ou décroissante) sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Démonstration : Démontrons le premier cas.
On considère une fonction f strictement croissante sur I.
Soit $x \in I$ et h un réel non nul tel que $x + h \in I$.
Étudions le signe du quotient $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
On a deux cas possibles :

- si $h > 0$, on a $x < x + h$; or f est strictement croissante sur I ; donc $f(x) < f(x+h)$ et donc $f(x+h) - f(x) > 0$;
- si $h < 0$, on a $x + h < x$; or f est strictement croissante sur I ; donc $f(x+h) < f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) < 0$.

Dans les deux cas, on a montré que $f(x+h) - f(x)$ et h sont de même signe. Par conséquent, le quotient $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est strictement positif. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, ce quotient restera strictement positif. On admet alors que, dans ce cas, la limite de ce quotient (donc le nombre dérivé) est positive ou nulle.

Les autres cas se démontrent de la même manière. $\square$

Interprétation graphique

- Si f est croissante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont des coefficients directeurs positifs.
- Si f est décroissante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont des coefficients directeurs négatifs.
- Si f est constante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont un coefficient directeur nul.

II. De la dérivée aux variations

Propriété 26
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Les énoncés 1. et 2. restent valables si f' s'annule en un nombre fini de valeurs x de I.

Démonstration : Admise □

Application : détermination du sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . L'étude du signe de la dérivée de f permet, à l'aide de la propriété précédente, de déterminer les variations de f.

Exemple
Déterminons des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

— **Étape 1 : dérivabilité et expression de la dérivée**
f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $f'(x) = x^2 + x - 2$.

— **Étape 2 : étude du signe de f' et obtention des variations**
Le trinôme a pour racine évidente 1, le produit des racines est -2, la seconde racine est donc -2. (ou : le discriminant du trinôme est : $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$; $\Delta > 0$, le trinôme a donc 2 racines x_1 et x_2, avec $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.) De plus, le coefficient du terme de degré 2 est de signe positif, on en déduit donc le signe de f' et (d'après la propriété précédente) les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{25}{3}$	↘	$\frac{23}{6}$	↗	

$$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-8) + \frac{1}{2} \times 4 + 4 + 5 = -\frac{8}{3} + 11 = \frac{33-8}{3} = \frac{25}{3}$$
$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{5}{6} + 3 = \frac{5+18}{6} = \frac{23}{6}$$

Applications de la détermination du tableau de variations :

La détermination du tableau de variations de f permet ainsi :

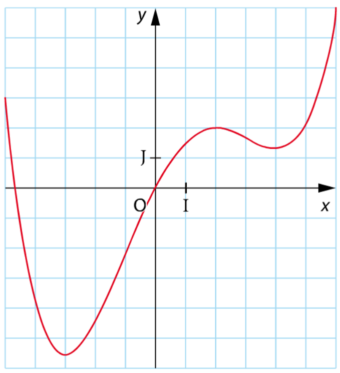
- d'obtenir un encadrement de $f(x)$ sur un intervalle donné,
- de déterminer le maximum ou le minimum de f sur un intervalle,
- de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, avec $x \in I$ et $k \in R$,
- de contrôler que l'allure de la courbe représentative d'une fonction est bien celle affichée sur l'écran d'une calculatrice.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\, I,\, J)$.

Des variations à la dérivée

Exercice 293. On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,6]$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Combien de fois la dérivée de la fonction f s'annule-t-elle sur $[-5\,;\,6]$?
2. Donner le signe de $f'(-1)$ et celui de $f'(3)$.
3. Comparer $f'(-4)$ et $f'(-1)$.
4. Comparer $f'(-5)$ et $f'(5)$.

Exercice 294. On considère une fonction f dérivable sur son ensemble de définition et dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-10		-3		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-8	↗	2	↘	-1	↗	0

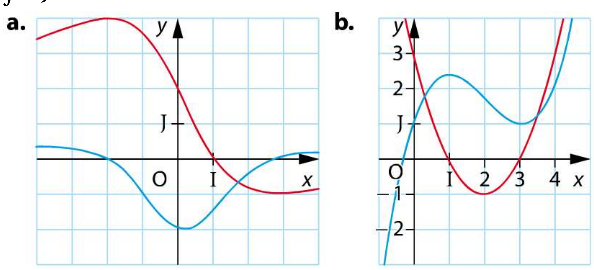
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(-3)$? $f(-1)$ et $f(5)$? $f(5)$ et $f(6)$?
3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur $[-10\,;\,-3]$? sur $[-3\,;\,0]$? sur $[0\,;\,10]$? Justifier.

Exercice 295. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et admet ce tableau de variation :

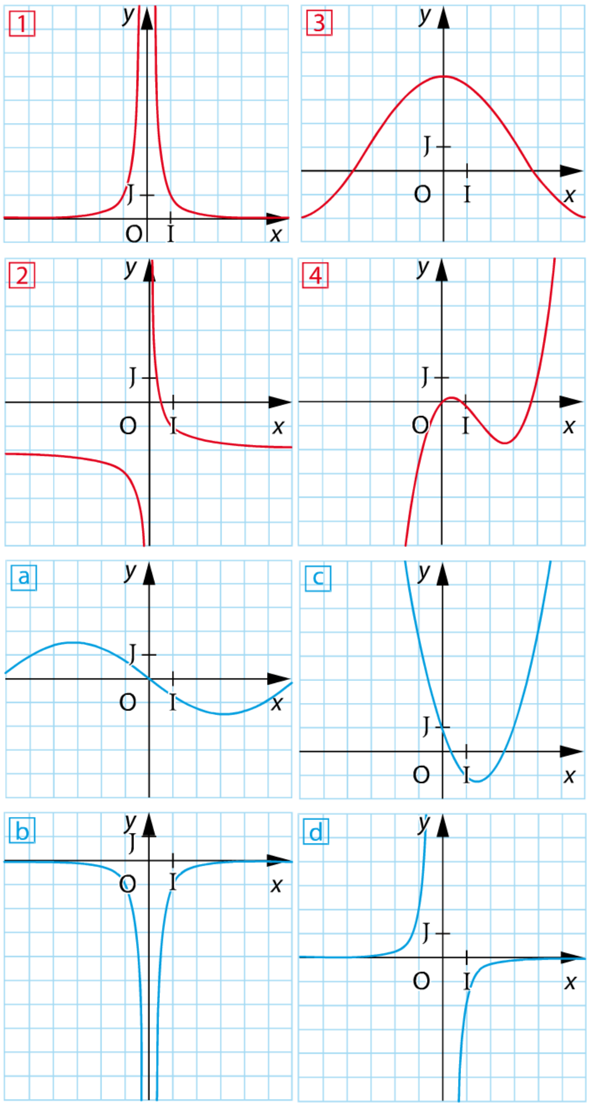
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(0)$? $f(-0,5)$ et $f(4)$?
3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $]-1\,;\,+\infty[$?

Exercice 296 - Qui est qui ?. Dans chacun des cas suivants, on a représenté la courbe d'une fonction f et celle de sa dérivée f'.
Identifier la courbe représentative de f et celle de f'. Justifier.



Exercice 297. On donne les courbes de quatre fonctions numérotées de $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$ ainsi que celles de leurs dérivées, numérotées de $\boxed{a}$ à $\boxed{d}$.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.



De la dérivée aux variations

Pour chacun des exercices suivants, étudier la dérivabilité de la fonction puis calculer sa dérivée et dresser son tableau de variations.

Exercice 298.

(a) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 4x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 299.

(a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \neq 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Exercice 300.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$, $x \neq 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 301.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$.

Exercice 302.

(a) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{2x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;

(b) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$, $x \in]0 ; +\infty[$.

Exercice 303 - Bien interpréter un écran de calculatrice.

Soit f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + \dfrac{35}{12}x + \dfrac{1}{12}$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur l'écran d'une calculatrice pour $-2 \leqslant x \leqslant 4$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

   (b) Lire graphiquement le sens de variation de f.

2. (a) Calculer f' puis étudier le sens de variation de f.

   (b) Que peut-on en conclure quant à la question 1 ?

   (c) Si on prend pour la fenêtre d'affichage $Xmin = 0{,}5$ et $Xmax = 1{,}5$, quelles valeurs de $Ymin$ et $Ymax$ peut-on choisir pour observer sur le graphique les résultats de la question 2(a) (expliquer votre raisonnement) ?

Fiche 2

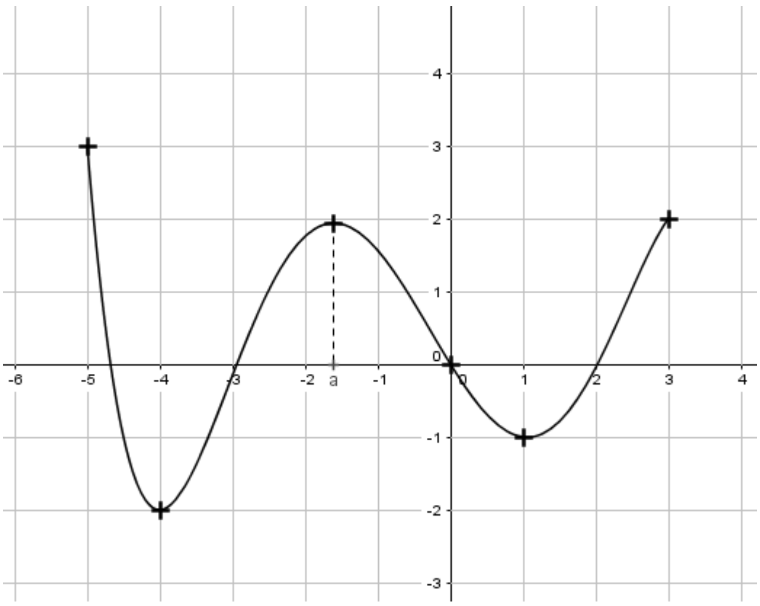
Applications de la dérivation
Extremum d'une fonction

I. Les différents types d'extrema

Définition 16
Soit f une fonction définie sur un intervalle I,$x_0 \in$ I. On dit que :

- f admet son **maximum** sur l'intervalle I en a si, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un **maximum local** en a si, il existe un intervalle **ouvert** J contenu dans I tel que f admette un maximum global en a sur J.
- f admet son **minimum** sur l'intervalle I en a si, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant f(a)$.
- f admet un **minimum local** en a si, il existe son intervalle **ouvert** J contenu dans I tel que f admette son minimum global en a sur J.

Exemple
La courbe représentative suivante est la représentation graphique d'une fonction définie sur $[-5\,;3]$.



- f admet son maximum sur $[-5\,;3]$ en -5 et ce maximum est 3. Elle atteint son minimum sur $[-5\,;3]$ en -4 et ce minimum est -2.
- f admet un minimum local en 1 car -1 est le minimum de f sur $J =]0;2[$, et J est un intervalle ouvert inclus dans I.

- f admet un maximum local en a car $f(a)$ est le maximum de f sur $K =]-2;-1[$, et K est un intervalle ouvert inclus dans I.
- f n'admet pas de maximum local en 3 car car il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans $[-5;3]$ contenant 3.
- Le minimum de f sur $[-5;3]$ est également un minimum local car c'est le minimum de f sur $]-5;-2[$ ou $]-5;3[$.
- Le maximum de f sur $[-5;3]$ n'est pas un maximum local car il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans $[-5;3]$ contenant -5.

Remarques

1. Si I est un intervalle ouvert, tout extremum global sur I, s'il existe, est un extremum local.
2. Le maximum (ou le minimum) d'une fonction peut être atteint en plusieurs, voire même une infinité de valeurs de x comme c'est le cas pour la fonction sin.
3. Une fonction peut ne pas admettre de maximum ou de minimum sur un intervalle.

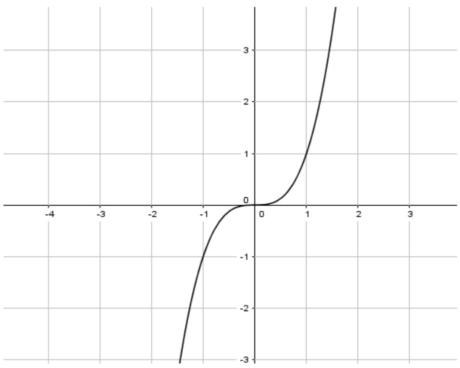
II. Condition nécessaire d'existence d'un extremum sur un intervalle ouvert

Théorème 1
Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et soit a est un nombre réel appartenant à I.
Si f admet un extremum (local ou global)en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration : Une esquisse de la preuve est faîte dans le cas où f admet un maximum local en a. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout x de J, $f(x) - f(a) \leqslant 0$, dès lors le taux de variations de f entre a et x est positif si $x > a$ et négatif si $x < a$. Le nombre dérivé de f en a étant la limite de ce taux, il est à la fois positif et négatif donc nul en a. □

Remarques

1. Cela signifie que si f admet un extremum (local ou global) en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.
2. Si I est un intervalle fermé, le théorème ne s'applique pas. Dans l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5;3]$ est 3, atteint en -5 et la tangente à la courbe n'est pas horizontale.
3. la condition est nécessaire mais non suffisante puisque la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0 et pourtant la fonction cube n'admet pas d'extremum en O.



III. Condition suffisante d'existence d'un extremum sur un intervalle ouvert

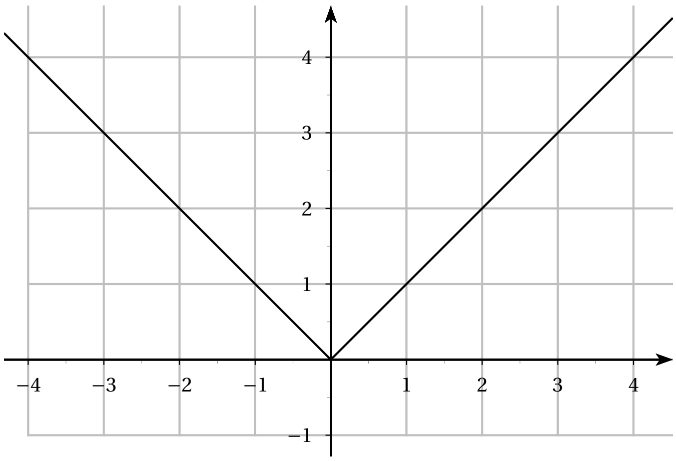
Théorème 2
Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et soit a est un nombre réel appartenant à I.
Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Démonstration : Dire que f' s'annule en changeant de signe en a signifie qu'il existe un intervalle ouvert $]a-\alpha; a+\alpha[$ inclus dans I dans lequel tel que f' soit de signe constant sur $]a-\alpha; a[$ et sur $]a, a+\alpha[$ mais de signes opposés. Deux cas peuvent se présenter :

- f' positive sur $]a-\alpha; a[$ puis négative sur $]a, a+\alpha[$ ce qui implique que f est croissante sur $]a-\alpha; a[$ puis décroissante sur $]a, a+\alpha[$, dans ce cas f admet un maximum en a sur l'intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$,
- f' négative sur $]a-\alpha; a[$ puis positive sur $]a, a+\alpha[$ ce qui implique que f est décroissante sur $]a-\alpha; a[$ puis croissante sur $]a, a+\alpha[$, dans ce cas f admet un minimum en a sur l'intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$, □

Remarques

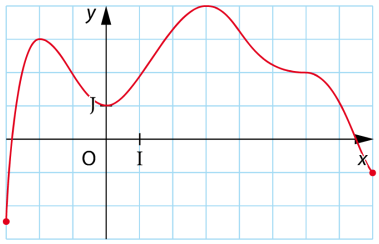
1. Une fonction peut admettre un extremum en un réel a sans être dérivable en a comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue, admettant son minimum sur $\mathbb{R}$ en 0 sans être dérivable en 0.



2. les extrema d'une fonction sont donc à chercher :
   - aux points intérieurs à I où f' existe et s'annule
   - aux points intérieurs à I où f' n'existe pas
   - aux extrémités de I si I est fermé (ou semi fermé)

Exercices

Exercice 304. 1. Quels sont les extrema ou extrema locaux de la fonction dérivable représentée ci -dessous ?



2. (a) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$?
   (b) Ces valeurs correspondent-elles à des extrema ou des extrema locaux ?

Exercice 305. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et a admet le tableau de variation suivant :

x	-10		-3		0		$+10$
$f(x)$	-8	↗	2	↘	-1	↗	0

1. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-10;10]$.
2. La fonction f admet elle un maximum local, global ?
3. Connaît-on certains des nombres dérivés suivants : $f'(-10)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(10)$?

Exercice 306. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

1. Étudier le sens de variations de f.
   (a) La fonction f possède-t-elle des extrema-locaux ?
   (b) La fonction f possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 307. La fonction f est définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}.$$

1. Étudier le sens de variations de f.
   (a) La fonction f possède-t-elle des extrema-locaux ?
   (b) La fonction f possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 308. Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 euros.

Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \dfrac{900}{x}$ pour $x \in I$ où $I = [10,100]$.

1. (a) Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ en prenant pour unités 1 cm pour 5 objets et 1 cm pour 10 euros.
   (b) Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.
2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production inférieur à 80 euros.

Etude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.
2. Déterminer son sens de variation sur $[10;100]$ et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Fiche 3

Applications de la dérivation Inégalités et encadrements

Obtenir une inégalité

Exercice corrigé

Méthode :

— On se ramène à une inégalité avec un second membre nul,

— on étudie les variations de la fonction dont l'expression est donnée dans le membre non nul,

— on conclut en donnant les conditions pour lesquelles la fonction est du signe donné par l'inégalité.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que, pour tout réel x strictement positif : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Correction :

1. **Dérivabilité :** La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est une fonction rationnelle définie sur $]0\,;\,+\infty[$ donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Calcul de la dérivée : Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.
   Résolution sur $]0\,;\,+\infty[$ de $f'(x) = 0$: Soit x un réel de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   Signe de f' sur $]0\,;\,+\infty[$: la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2}$ est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$, donc la fonction f' a le même signe que la fonction $x \mapsto x - 1$ sur $]0\,;\,+\infty[$, c'est à dire, strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1;+\infty[$.
   variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$:
   - la fonction f' est strictement négative sur $]0,1[$ et s'annule en 1 donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$,
   - f' est strictement positive sur $]1;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. De l'étude précédente, on peut déduire que la fonction f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ qui vaut 2 donc, pour tout x de $]0;+\infty[$, $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

Remarque

On peut aussi démontrer ce résultat en remarquant que :

$$x+\frac{1}{x}-2=\sqrt{x}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Mais cette dernière technique a une portée plus limitée.

Obtenir un encadrement

Exercice corrigé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+x-2$. Donner un encadrement de f lorsque x appartient à $[0,2]$.

Correction : Étudions la fonction f sur l'intervalle $[0,2]$.

— **Dérivabilité :** La fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ donc dérivable sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.
Calcul de la dérivée : Pour tout x de $]-\infty\,;\,+\infty[$, $f'(x)=3x^2-4x+1$.
Résolution sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ de $f'(x)=0$: 1 est une racine évidente, la seconde racine est donc $\dfrac{1}{3}$.
Signe de f' sur $[0,2]$: le signe du coefficient du terme de degré 2 est positif ce qui permet d'obtenir le signe de f'
variations de f sur $[0,2]$:

— **Résumé :**

x	0		$\frac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-\frac{50}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

On a donc démontré que pour tout x de $[0,2]$, $-2\leqslant f(x)\leqslant 0$.

Exercices

Exercice 309. Montrer que pour tout $x\in[0;2]$, $\dfrac{1}{3}x^3\leqslant x+1$

Exercice 310. Encadrer $f(x)=x^3-3x+3$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice 311. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

$$\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\quad;\quad I=]0\,;\,+\infty[$$

Exercice 312. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

$$\frac{x}{1+x}-x\geqslant 4\quad;\quad I=[-10\,;\,-1[$$

Exercice 313. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

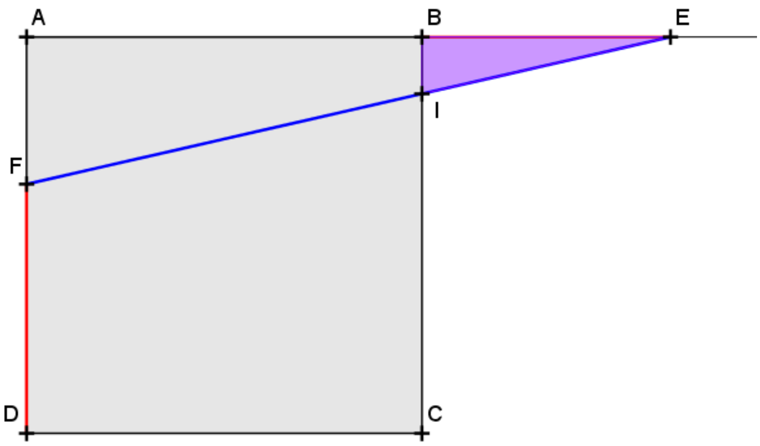
$$x^2+x\geqslant\frac{1}{x}+1\quad;\quad I=[1\,;\,+\infty[$$

.

Fiche 4

Applications de la dérivation
Exercices d'optimisation

Exercice 314. $ABCD$ est un carré de côté 1.
Le point E est situé sur la droite (AB), à l'extérieur du segment $[AB]$ et du côté de B, le point F est sur le segment $[AD]$ et $BE = DF$.



I est le point d'intersection des droites (BC) et (EF).
On veut déterminer la position du point E pour laquelle l'aire du triangle BEI maximale.

1. Calcul de l'aire du triangle BEI
   (a) On pose $BE = DF = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$). Démontrer que $BI = \dfrac{x - x^2}{x+1}$.
   (b) En déduire l'expression de l'aire $S(x)$ du triangle BEI en fonction de x.
2. Étude de la fonction S
   (a) Déterminer la fonction dérivée de S.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.
   (c) Contrôler graphiquement la cohérence des résultats à l'aide de la calculatrice.
   (d) Conclure.

Exercice 315. La figure ci-dessous représente un patron du parallélépipède de la figure 2. Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée carrée de 30 cm de côté.

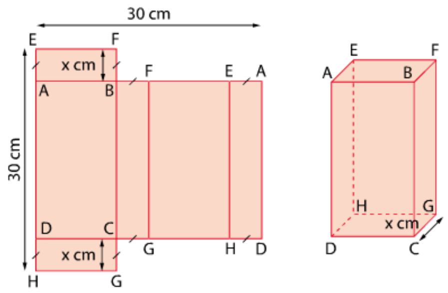


Fig. 1 Fig. 2

1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFG$ s'exprime en cm^3 par $V(x) = 2x(15-x)^2$ pour $x \in [0\ ;\ 15]$.
2. Exprimer $V(x)$ sous forme développée puis étudier le sens de variation de la fonction V sur $[0\ ;\ 15]$.
3. Tracer la courbe représentant la fonction V avec la calculatrice. Indiquer la fenêtre choisie.
4. Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait. Le fabricant voudrait que le volume de la boîte soit 0,5 litres, c'est-à-dire 500 cm^3.
   (a) Combien de valeurs de x correspondent à des boîtes de 0,5 litres ? Justifier.
   (b) Déterminer des valeurs approchées à 0,1 près de ces valeurs de x. Quel es celle que retiendra le fabricant ?

Exercice 316. Économiser l'emballage
Un grand lessivier commercialise son produit pour lave vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres ($1 \leqslant x \leqslant 2$). Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm^3. Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.
2. (a) Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \dfrac{36}{x}$ sur $[1\ ;\ 2]$.
   (b) Montrer que $S'(x)$ a même signe que $x^3 - \dfrac{9}{2}$.
3. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction u définie sur $[1\ ;\ 2]$ par $u(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}$.
   (b) En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution dans $[1\ ;\ 2]$ et en donner une valeur approchée à la calculatrice à 0,1 près.
   (c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire le tableau de variation de S.
5. Quelle valeur de x rend S minimale ?