Mathématiques

Classe de Première

Enseignement de Spécialité

-

Lycée Fénelon

Année 2020-2021

Sommaire

Chapitre 1

Fiche 1

Probabilités Conditionnelles - Activité d'introduction

Exercice 1.
Dans un lycée, il y a 359 élèves en Seconde, 341 en Première et 354 en Terminale. 651 élèves mangent à la cantine du lycée, le tout selon la répartition suivante :

- 66% des élèves de Seconde mangent à la cantine;
- 39% des élèves de Première mangent à l'extérieur.

On tire au sort un élève du lycée et on considère les événements suivants :

- C : « l'élève tiré au sort mange à la cantine »
- S : « l'élève tiré au sort est en Seconde »
- PR : « l'élève tiré au sort est en Première »
- T : « l'élève tiré au sort est en Terminale »

Dans la suite, les probabilités seront données sous forme de fractions.

1. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir à l'entier le plus proche) :

	Cantine	Extérieur	Total
Seconde			
Première			
Terminale			
Total			1 054

2. (a) Calculer $P(S)$ et $P(C \cap S)$.

   (b) On considère la « définition » suivante :

   > A et B étant deux événements donnés (avec $P(B) \neq 0$), on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B c'est-à-dire la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé.
   > On dit que $P_B(A)$ est une probabilité conditionnelle.

   Décrire $P_S(C)$ par une phrase puis la calculer.

   (c) Quel est l'univers associé à P_S, c'est-à-dire dans quel ensemble tire-t-on au sort quand on considère une probabilité sachant S ?

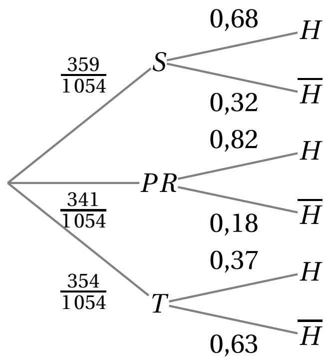
   (d) Déterminer un lien entre $P(S)$ et $P(C \cap S)$ et $P_S(C)$.

   (e) D'une manière générale, quel lien peut-on alors conjecturer entre $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$?

3. Tester la conjecture précédente avec $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(PR)$.

Exercice 2 - Avec un arbre pondéré.

Après une enquête menée sur les élèves de ce lycée (qu'ils aillent à la cantine ou non), on a dressé l'arbre pondéré ci-contre où H désigne l'événement « l'élève aime les haricots ».



1. Certaines des pondérations présentes sur cet arbre sont des probabilités conditionnelles.
   Dire lesquelles et les exprimer avec la notation vue à l'exercice 1.
2. (a) En admettant la formule conjecturée dans la partie précédente, exprimer $P_T(H)$ en fonction de $P(T)$ et $P(H \cap T)$.

   (b) En déduire $P(H \cap T)$ en fonction de $P_T(H)$ et $P(T)$ puis calculer $P(H \cap T)$.

   (c) Quelle règle bien connue sur les arbres pondérés retrouve-t-on ?

Fiche 2

Probabilités Conditionnelles - Probabilités Conditionnelles et arbres pondérés

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers, A et B deux événements de Ω et P une probabilité sur Ω.

I. Probabilités conditionnelles - Définition

Définition 1
Si $P(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque
Si $P(B) \neq 0$, on a de manière symétrique :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple
Dans un lycée, on demande aux élèves et aux professeurs s'ils préfèrent avoir cours le matin ou l'après-midi. On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous :

	Matin	Après-midi	Total
Élèves	657	438	1 095
Professeurs	84	21	105
Total	741	459	1 200

On choisit une personne au hasard (parmi élèves et professeurs) et on note :

- E l'événement : « La personne tirée au sort est un élève » ;
- M l'événement : « La personne tirée au sort préfère avoir cours le matin ».

1. Calculer $P(E)$ et $P(E \cap M)$.
   On est dans une situation d'équiprobabilité donc :
   - $P(E) = \frac{1\,095}{1\,200} = 0{,}9125$;
   - $P(E \cap M) = \frac{657}{1\,200} = 0{,}5475$.

2. En déduire $P_E(M)$ avec la formule de la définition précédente.
   On en déduit que $P_E(M) = \dfrac{P(E\cap M)}{P(E)} = \dfrac{0{,}5475}{0{,}9125} = 0{,}6$.
3. Retrouver ce résultat sans utiliser la formule du cours.
   $P_E(M)$ est « la probabilité que la personne tirée au sort préfère avoir cours le matin sachant que c'est un élève », cette probabilité peut donc être obtenue en calculant :
   $\dfrac{\text{card}(E\cap M)}{\text{card}(E)} = \dfrac{657}{1\,095} = 0{,}6$.

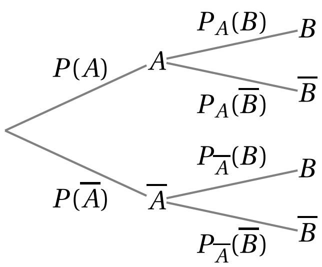
II. Application aux arbres pondérés

Propriété 1
Les principales règles de construction des arbres pondérés ou arbres probabilistes sont :

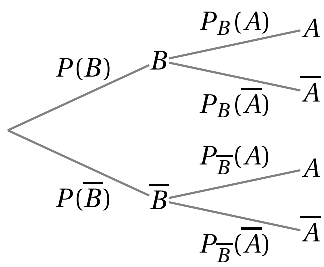
- la somme des probabilités des événements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

Remarques

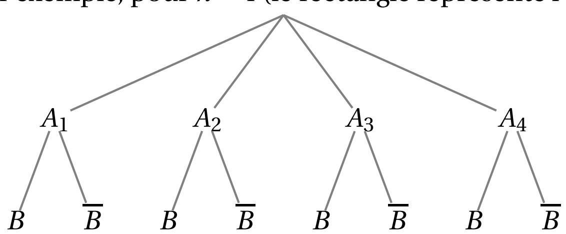
- Dans le cas de deux événements A et B de probabilités non nulles, on a :

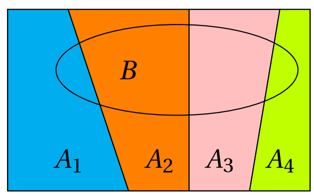


ou



  C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.
- Le premier point de la propriété illustre le fait que les événements A_1, A_2, ... et A_n correspondant aux branches partant du premier nœud sont des événements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
  On dit alors que A_1, A_2, ... et A_n forment une partition de l'univers Ω.
  Par exemple, pour $n = 4$ (le rectangle représente l'univers) :





Propriété 2
Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A)$.
Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité de l'événement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Démonstration : Conséquence directe de la définition d'une probabilité conditionnelle. □

Exercice - Méthode : Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré

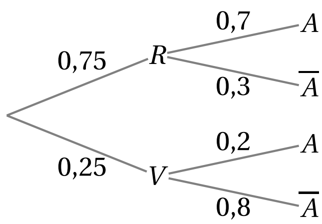
Sur l'étal d'un maraîcher, il y a $\frac{3}{4}$ de légumes rouges et le reste de légumes verts.

- Parmi les légumes rouges 30% sont des poivrons et 70% sont des tomates.
- Parmi les légumes verts 80% sont des poivrons et 20% sont des tomates.

On choisit un légume au hasard sur l'étal et on considère les événements :

- A : « le légume choisi est une tomate » ;
- R : « le légume choisi est Rouge » ;
- V : « le légume choisi est Vert ».

1. Représenter la situation par un arbre.
   Pour le premier nœud, les deux possibilités sont R : « le légume choisi est rouge » et son événement contraire $\overline{R}$ soit V : « le légume choisi est vert ».
   Il reste ensuite à distinguer tomates et poivrons pour les « deuxièmes nœuds ». Comme l'événement « le légume choisi est un poivron » n'est pas nommé par une lettre, on a utilisé $\overline{A}$ pour le représenter dans l'arbre mais on aurait aussi pu introduire une nouvelle notation.

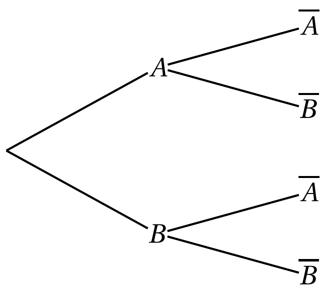


2. Calculer $P(R \cap A)$.
   $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}75 \times 0{,}7 = 0{,}525$.

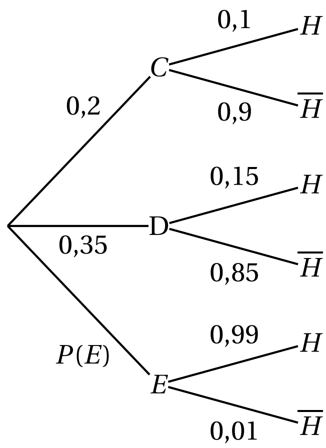
Exercices

Exercice 3. A, B, C, D, E et H désignent des événements quelconques d'un univers Ω.

1. Trouver l'erreur dans l'arbre de probabilité suivant :



2. Quelle(s) condition(s) doivent vérifier les événements C, D et E pour que l'arbre ci-dessous soit un arbre pondéré correct ?



Exercice 4.

1. On considère deux événements R et S tels que $P(R) = \dfrac{1}{4}$, $P_R(S) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{12}$.
   Construire un arbre pondéré avec ces événements R et S.
2. Tao ne sait pas s'il lui reste de quoi préparer à manger dans son réfrigérateur.
   Il estime la probabilité que ce soit le cas à 0,8.
   — Dans ce cas (s'il a de quoi préparer à manger), il estime que la probabilité que le repas qu'il se préparera soit bon est de 0,65.
   — Sinon, il ira dans son restaurant favori dans lequel il estime que la probabilité que le repas servi soit bon est de 0,99.

   Construire un arbre pondéré représentant la situation après avoir explicité les notations des événements apparaissant dans cet arbre.

Exercice 5. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$.
Calculer $P_A(B)$.

Exercice 6. On considère deux événements C et D tels que $P(D) = 0{,}6$ et $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}35$.
Calculer $P_{\overline{D}}(C)$.

Exercice 7. On considère deux événements disjoints E et F de probabilités non nulles.
Calculer $P_E(F)$.

Exercice 8. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}68$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$.
Calculer :

1. $P_A(B)$
2. $P_B(A)$

Exercice 9. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}63$ et $P_A(B) = 0{,}06$. Calculer :

1. $P(A \cap B)$
2. $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

Exercice 10. On considère deux événements E et F tels que $P(E) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{E}}(F) = \dfrac{7}{12}$. Calculer :

1. $P\left(\overline{E} \cap F\right)$
2. $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)$

Exercice 11 - Avec des phrases.

1. Dans une bibliothèque, les statistiques montrent que :
   — 55% des adhérents sont des garçons ;
   — 20% des adhérents sont des garçons ayant emprunté plus de 50 livres.

   Quand on rencontre un garçon sortant de la bibliothèque, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté plus de 50 livres ?
2. Quand on joue à un jeu de grattage, la probabilité d'obtenir « 3 télés » est de 0,000 001.

   Si c'est le cas, on est invité à la télévision pour faire tourner une roue comportant 100 sections équiprobables dont 5 offrent un gain de 1 000 000 €.

   Quelle est la probabilité de gagner 1 000 000 € à ce jeu ?
3. « Je suis sûr à 95% de manquer le bus, auquel cas je serai en retard. Et même si je l'ai, il y aura une chance sur trois que je sois quand même en retard ».

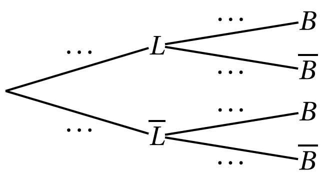
   Quelle est la probabilité que cette personne soit à l'heure ?
4. Dans le lecteur MP3 d'Anita, 17% des titres sont du rock français. Plus généralement, 61% des titres du lecteur sont des titres français.

   On met le lecteur en mode aléatoire et le premier titre est français. Quelle est la probabilité que ce soit du rock ?

Exercice 12. Après les contrôles de mathématiques, 60% du temps, Issa dit « Je suis sûr que j'ai loupé ». Ses amis sont pourtant formels : « Quand il dit ça, il a quand même 15 ou plus les 3/4 du temps. Et quand il ne dit rien, on peut être sûr à 95% qu'il va avoir 15 ou plus. »
Après un devoir de mathématiques, on considère les événements :

- L : « Issa dit qu'il a manqué le devoir » ;
- B : « Issa a 15 ou plus au devoir ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



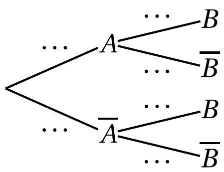
2. Calculer $P(L \cap B)$ et interpréter cette probabilité dans les termes de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité qu'il ne dise rien et qu'il ait moins de 15.

Exercice 13. Dans une playlist, Naïm a mis 10 albums et réglé le lecteur en sélection aléatoire. Le logiciel de sélection aléatoire choisit d'abord un album puis choisit une chanson dans cet album.
Quelle est la probabilité que la 1re chanson jouée soit la préférée de Naïm, qui se trouve dans un album de 12 titres ? On représentera la situation par un arbre.

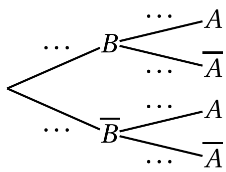
Exercice 14. On considère deux événements A et B et le tableau de probabilités ci-dessous :

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,44		
$\overline{B}$		0,13	0,32
Total			1

1. Recopier et compléter ce tableau.
2. Lire $P(A)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.
3. Calculer $P_A(B)$, $P_A\left(\overline{B}\right)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$. On écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
4. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



5. De même, recopier et compléter :



Exercice 15 - Trois à la suite. A-t-on $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_B(C)$?
Si oui, le démontrer, si non, modifier la formule pour en obtenir une correcte.

Fiche 3

Probabilités Conditionnelles - Formule des Probabilités totales

Propriété 3 (Formule des probabilités totales)

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B). \end{aligned}$$

- De même, si A_1, A_2, …et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

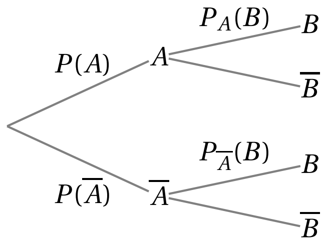
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

Démonstration :

- On a $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
  De plus, les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints. Par conséquent, on a :
  $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
  On en déduit que :
  $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$.
- Le second point se démontre de même car les événements $A_k \cap B$ pour k allant de 1 à n forment une partition de B. □

Remarque

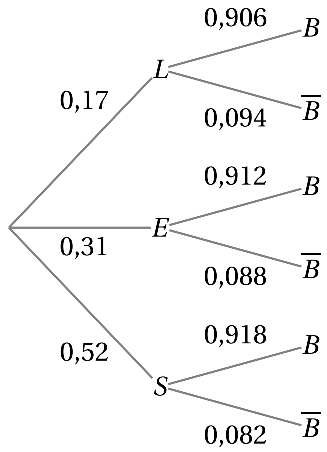
La formule des probabilités totales permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés : la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.



Exercice - Méthode : Utiliser la formule des probabilités totales

En 2015, la répartition des élèves ayant passé le baccalauréat général en France métropolitaine et dans les DOM est : 17% d'élèves de la filière L, 31% d'élèves de la filière ES et 52% d'élèves de la filière S. Par ailleurs, les taux de réussite dans ces filières sont 90,6% en L, 91,2% en ES et 91,8% en S. On tire au hasard un élève ayant passé le bac général en 2015.

1. Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   On obtient l'arbre ci-contre où :
   - L est l'évènement : « la personne a passé le bac L » ;
   - E est l'évènement : « la personne a passé le bac ES » ;
   - S est l'évènement : « la personne a passé le bac S » ;
   - B est l'évènement : « la personne a obtenu le bac ».



2. Quelle est la probabilité que la personne tirée au hasard ait obtenu le bac ?
   La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(B) &= P(L) \times P_L(B) + P(E) \times P_E(B) + P(S) \times P_S(B) \\ &= 0{,}17 \times 0{,}906 + 0{,}31 \times 0{,}912 + 0{,}52 \times 0{,}918 \\ &= 0{,}9141. \end{aligned}$$

3. Déterminer $P_{\overline{B}}(S)$.

   On sait que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap S\right)}{P\left(\overline{B}\right)}$ or :

   - $P\left(\overline{B} \cap S\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{B}\right) = 0{,}52 \times 0{,}082 = 0{,}04264$;
   - $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9141 = 0{,}0859$.

   On en déduit donc que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{0{,}04264}{0{,}0859} \approx 0{,}496$.

Exercices

Exercice 16. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}48$.

1. Montrer que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}32$.
2. Calculer $P_A\left(\overline{B}\right)$.

Exercice 17. On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = 0{,}4$ et $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 0{,}12$.
Calculer $P_{\overline{E}}(F)$.

Exercice 18. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}71$.
Calculer :

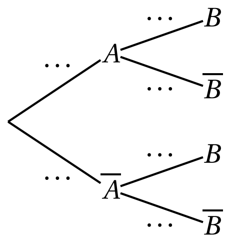
1. $P_A(B)$
2. $P_A\left(\overline{B}\right)$
3. $P_{\overline{B}}(A)$
4. $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$

Exercice 19 - D'après Bac.
Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non :

- 30% des dragées contiennent une amande ;
- 40% des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les évènements :

- A : « la dragée choisie contient une amande » ;
- B : « la dragée choisie est bleue ».



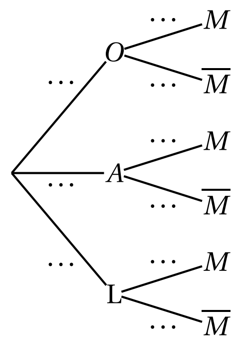
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$.
3. Calculer $P(B)$.
4. En déduire $P_B(A)$.
5. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.
6. Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou bien une dragée rose ?

Exercice 20 - Améliorer la qualité.
Ordralfabétix est poissonnier et 15% du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30% vient d'un grossiste armoricain et le reste d'un grossiste de Lutèce.
Il a remarqué que 5% de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10% du poisson provenant du grossiste armoricain et 90% du poisson de Lutèce.
Un client achète un poisson à Ordralfabétix.
On considère les évènements suivants :

- O : « Le poisson a été pêché par Ordralfabétix »
- A : « Le poisson provient du grossiste armoricain »
- L : « Le poisson provient du grossiste de Lutèce »
- M : « Le client est mécontent du poisson »

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste ci-contre.
2. (a) Calculer $P(M)$.

   (b) Un client est mécontent du poisson acheté. Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Ordralfabétix ?
3. Ordralfabétix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30% en continuant à pêcher 15% de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.



Exercice 21 - Épidémiologie.

Dans un pays, une épidémie touche 10% de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1% des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1% des cas.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.

   (a) Montrer que le traitement est donné à 10,89% de la population.

   (b) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?

Exercice 22 - Réduire les coûts.

Sur une chaîne de production d'un composant électronique, on effectue des tests qualité :

- Un premier examen visuel est effectué éliminant 5% des composants, qui sont détruits.
- Les composants restants passent un test de fiabilité qui est réussi par 90% des composants qui sont alors mis en vente.
- Parmi les composants n'ayant pas réussi le test de fiabilité, 30% peuvent être réparés facilement et mis en vente, le reste est détruit.

On prélève un composant au hasard sur cette chaîne.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

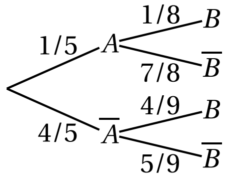
   On notera E l'événement « le composant réussit l'examen visuel », F « le composant réussit le test de fiabilité » et V « le composant est mis en vente ».
2. Calculer $P\left(\overline{F}\cap V\right)$, $P(V)$ et $P_V\left(\overline{F}\right)$.
3. Un composant :
   - coûte 0,05 € s'il est détruit ;
   - rapporte 0,5 € s'il est mis en vente sans réparation et 0,25 € s'il est mis en vente après réparation.

   (a) Donner la loi de probabilité de X, la variable aléatoire donnant la somme algébrique rapportée par un composant produit et éventuellement vendu.

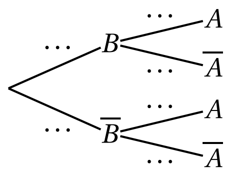
   (b) Combien d'argent peut-on « espérer » gagner par composant ?

Exercice 23. Compléter l'arbre 2 en utilisant l'arbre 1 :

Arbre 1



Arbre 2



Exercice 24. Chez Edmond, la vaisselle se joue toujours aux jeux vidéo de la façon suivante : on lance une pièce et :

- si c'est pile, il affronte sa mère à un jeu de combat où il n'a que 30% de chance de gagner ;
- si c'est face, il affronte son père à un jeu de puzzle (avec des briques) où il a 40% de chance de perdre.

S'il perd sa partie, il fait la vaisselle, sinon, ses parents s'affrontent sur un jeu de stratégie où ils sont aussi bons l'un que l'autre pour savoir qui fera la vaisselle.
Ce soir, c'est le père d'Edmond qui est de vaisselle. Quelle est la probabilité que le premier duel ait eu lieu sur le jeu de puzzle ?

Exercice 25 - Question ouverte.
D'après l'« Enquête nationale prénatale » de 2010 réalisée par l'Inserm, la probabilité d'une grossesse donnant lieu à une naissance prématurée en France est de 6,6% mais est accentuée par le fait que la grossesse soit multiple (jumeaux, triplés, etc) ou non.
Plus précisément, cette probabilité est de 41,7% en cas de grossesse multiple contre 5,5% sinon.
Déterminer la probabilité d'une grossesse multiple.

Exercice 26. Miao veut organiser une tombola : elle prévoit de vendre des tickets dont 20% sont gagnants et 80% sont perdants.
Pour chaque gagnant, elle organisera ensuite un tirage au sort tel qu'il y ait :

- 80% de chance d'obtenir un lot de 1 € ;
- x % de chance d'obtenir un lot de 2 € ;
- $20 - x$ % de chance d'obtenir un lot de 100 €.

1. À combien Miao doit-elle fixer la probabilité d'obtention du deuxième lot pour qu'elle puisse espérer ne dépenser que 1,71 € par ticket en achats de lots.
2. Proposer une expérience aléatoire permettant de faire ce tirage au sort.

Exercice 27 - Génétique.
Le daltonisme est une maladie génétique à transmission récessive liée au chromosome X c'est-à-dire que l'allèle responsable est récessif, pour un gène présent sur le chromosome X.

- Pour une femme, on distinguera le fait d'être malade (présence de l'allèle responsable sur les deux chromosomes X), porteuse de la maladie (présence de l'allèle responsable sur un seul chromosome X) et saine (absence totale de l'allèle responsable).
- Pour un homme, la présence de l'allèle sur l'unique chromosome X assure qu'il est malade.

Béatrice a un père daltonien mais elle-même n'est pas malade.
Sachant que 8 % des hommes sont daltoniens, quelle est la probabilité que Béatrice ait un enfant daltonien ?
On admettra que le daltonisme ou non d'une personne n'influence pas préférentiellement le don d'un chromosome X ou Y.

Fiche 4

Probabilités Conditionnelles - Indépendance de deux événements

Définition 2
On dit que A et B sont indépendants lorsque :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque
Attention à ne pas confondre « indépendants » et « incompatibles » qui est synonyme de disjoints c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$ et non pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple
Dans la population, il y a :

- 71% de porteurs de lunettes parmi lesquels 37% ont 55 ans ou plus ;
- 63% de personnes de moins de 55 ans.

On tire au sort une personne dans la population et on considère les deux évènements :

- A : « la personne a 55 ans ou plus » ;
- L : « la personne porte des lunettes ».

Les évènements A et L sont-ils indépendants ?

On détermine puis on compare $P(A) \times P(L)$ et $P(A \cap L)$.
D'après l'énoncé, $P(L) = 0{,}71$.
De plus, $P(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$,
donc : $P(A) \times P(L) = 0{,}37 \times 0{,}71 = 0{,}2627$.

D'autre part,
d'après l'énoncé, $P_L(A) = 0{,}37$, donc :
$$\begin{aligned} P(A \cap L) &= P(L) \times P_L(A) \\ &= 0{,}71 \times 0{,}37 \\ &= 0{,}2627. \end{aligned}$$

Comme $P(A) \times P(L) = P(A \cap L)$, on en déduit que A et L sont indépendants.

Propriété 4
Si $P(A) \neq 0$ (ou $P(B) \neq 0$) alors :
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$).

Démonstration :
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$,
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
si et seulement si $P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B$
si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. □

Remarques

1. Cette formulation rend plus naturelle la définition : il paraît normal de considérer comme « indépendants », au sens intuitif du terme, deux événements A et B dès lors que la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A. En effet, $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B, autrement dit, que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B.
2. Dans l'exemple précédent, on aurait donc pu conclure directement puisque $P(A) = P_L(A)$.

Propriété 5
Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration :
Soit A et B deux évènements indépendants.
Montrons que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$
D'où :
$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$.
De plus, comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap B\right) &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ &= P\left(\overline{A}\right) \times P(B). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Exemple
Dans l'exemple précédent, les événements A : « la personne a 55 ans ou plus » et $\overline{L}$: « la personne ne porte pas de lunettes » sont donc également indépendants.

Remarque
Plus généralement, si A et B sont indépendants alors :

- $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercices

Exercice 28. On considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}085$. Calculer $P(B)$.

Exercice 29. On considère deux évènements indépendants E et F tels que $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}53$ et $P(E \cap F) = 0{,}25$. Calculer $P(E)$.

Exercice 30. On considère deux évènements indépendants C et D tels que $P(C \cup D) = 0{,}23$ et $P(C) = 0{,}11$. Calculer $P(D)$.

Exercice 31 - Indépendants et incompatibles ?.
Deux évènements disjoints de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 32 - Couleurs aléatoires.
On considère l'algorithme suivant où la commande $entalea(n;p)$ donne un entier aléatoire entre n et p :

```
a prend la valeur entalea(1;3)
if a = 1 then
    b prend la valeur entalea(1;3)
    if b = 1 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
if a = 2 then
    b prend la valeur entalea(1;4)
    if b = 1 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
if a = 3 then
    b prend la valeur entalea(1;24)
    if b <= 7 then
        print "rouge"
    else
        print "orange"
    end if
end if
```

Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

1. « a = 3 » et « l'algorithme affiche rouge ».
2. « a = 3 » et « l'algorithme affiche orange ».
3. « a = 1 » et « l'algorithme affiche rouge ».

Exercice 33. Dans un magasin de meubles, il y a 55% de canapés dont 14% en cuir, 30% de fauteuils dont 20% en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42% en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble.
On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

Exercice 34. Lily a dans sa poche deux pièces de 20 centimes, trois de 50 centimes et une de 1 euro. Elle tire successivement (sans remise) deux pièces de sa poche. Les évènements « les deux pièces sont du même montant » et « les deux pièces lui permettent d'acheter un croissant à 1 euro » sont-ils indépendants ?

Exercice 35. Aujourd'hui Nathalie a décidé d'aller donner son sang. Ben hésite alors : « Je vais peut-être en profiter pour aller faire du vélo le long des bords de Seine ». On considère que la probabilité qu'il aille faire du vélo est 0,85.
Nathalie ayant un petit volume sanguin, il est possible qu'on ne l'autorise pas à donner son sang (elle est « refusée » une fois sur cinq) auquel cas, si Ben est parti faire du vélo, il ne sera pas là quand elle rentrera. Dans tous les autres cas, il sera là quand elle rentrera.
En admettant, que les évènements « Nathalie n'est pas autorisée à donner son sang » et « Ben choisit d'aller faire du vélo » soient indépendants, quelle est la probabilité que Ben soit là quand Nathalie rentrera ?

Exercice 36. Dans la chorale d'un lycée, il y 7 élèves de Seconde, 9 élèves de Première et n élèves de Terminale.
De plus, parmi les élèves de Seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de Première et 6 parmi les élèves de Terminale.
On tire au sort un élève de la chorale.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les évènements « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille » sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que peut-on dire de l'indépendance éventuelle des évènements :
   (a) « l'élève est en Terminale » et « l'élève est un garçon » ?
   (b) « l'élève est en Première » et « l'élève est une fille » ?

Fiche 5

Probabilités Conditionnelles - Problèmes

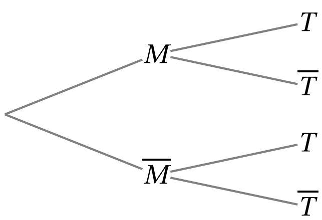
I. Sujets épreuves communes

Exercice 37. Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième. On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1% de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97% des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas. Pour une personne à qui ont fait passer le test de dépistage on associe les événements :

— M : la personne est malade,

— T : le test est positif.

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



2. Justifier que $P(\overline{M} \cap T) = 0,0198$.
3. Montrer que $P(T) = 0,0295$.
4. Calculer $P_T(M)$.
5. Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie ?

Exercice 38. Un cafetier propose à ses clients des cookies au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.On note :

— C l'événement « le cookie est au chocolat »,

— N l'événement « le cookie est aux noisettes »,

— B_1 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 1 »,

— B_2 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 2 »,

— B_3 l'événement « le cookie provient de la boulangerie 3 »,

On suppose que :

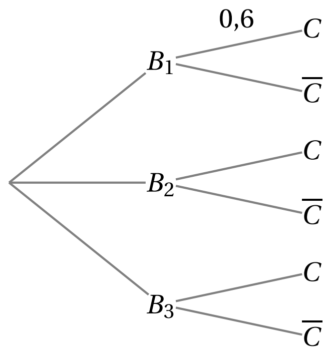
— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est de $0,49$;

— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est de $0,36$;

— $P_{B_2}(C) = 0,4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2 ;

— la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la troisième boulangerie est de $0,3$.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre $0,6$ sur la branche de B_1 à C.



1. Exprimer par une phrase l'information donnée par le nombre $0,6$ sur la branche de B_1 à C.
2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessus.
3. Définir par une phrase l'événement $B_1 \cap C$ et calculer sa probabilité.
4. Montrer la probabilité $P(C)$ d'avoir un cookie au chocolat est égale à $0,543$.
5. Calculer la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 39. **Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.**
Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant : Chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer. À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

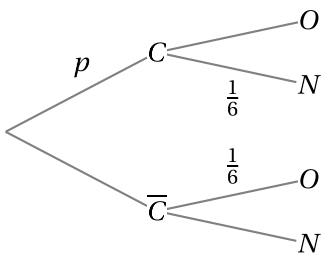
— « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

— N : l'événement l'adolescent a répondu « non » ;
— O : l'événement l'adolescent a répondu « oui » ;
— C : l'événement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis ;
— $\overline{C}$: l'événement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $p(O) = \frac{3}{5}$.On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis. On a donc $p(C) = p$.

1. Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.
2. On a ci-dessous l'arbre de probabilités représentant la situation. Compléter cet arbre .



3. (a) Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation : $\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}$.
   (b) En déduire la valeur de p.
4. Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?

II. Sujets d'approfondissements

Exercice 40. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement cinq boules rouges, trois vertes et une rouge, quatre vertes. On choisit une urne au hasard, puis on prélève au hasard une boule dans cette urne. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 41. La loi de Hardy-Weinberg (1908)

.

Lorsqu'un gène peut prendre deux formes A et a, un individu peut avoir l'un des trois génotypes : AA, Aa ou aa. On considère une population (génération 0) dans laquelle les proportions respectives de ces trois génotypes sont p_0, q_0 et r_0. On admet que les couples se forment au hasard quant aux génotypes considérés (appariement aléatoire).

1. Exprimer, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait le génotype AA, puis celles notées q_1 et r_1, qu'il ait le génotype Aa ou aa.
2. Montrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment seulement à l'aide de $\alpha = p_0 - r_0$. En déduire que p_2, q_2 et r_2 (ces mêmes proportions à la génération 2) et conclure.

Exercice 42. Évaluations des méthodes de diagnostiques

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif, appelée sensibilité du test, notée Se.

— la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif, appelée spécificité du test, notée Spe.

On appelle prévalence de la maladie la proportion de malades dans la population à laquelle est appliquée le test. On note p cette prévalence.

1. Indiquer la sensibilité, la spécificité et la prévalence du test de l'exercice 37. Dans le cas général, exprimer en fonction de p, Se et Spe la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif. Cette probabilité est appelée valeur prédictive positive. Elle est notée VPP.
2. La VPP est elle une fonction croissante ou décroissante de p ?
3. Exprimer en fonction de p, Se et Spe la probabilité qu'un individu soit sain sachant qu'il a un test négatif.Cette probabilité est appelée valeur prédictive négative. Elle est notée VPN.
4. La VPN est elle une fonction décroissante ou croissante de p ?
5. Exprimer $VPP/(1-VPP)$ en fonction de $p/(1-p)$.
6. Exprimer $(1-VPN)/(VPN)$ en fonction de $p/(1-p)$.
7. Un test diagnostique T_3 est composé de deux tests diagnostiques successifs T_1 et T_2. On suppose que les deux tests sont indépendants. **On considère le test T_3 comme positif si l'individu est testé positif aux deux tests.**
   (a) Exprimer la sensibilité du test 3 en fonction des sensibilités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins sensible que ces deux tests ?
   (b) Exprimer la spécificité du test 3 en fonction des spécificités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins spécifique que ces deux tests ?
8. Un test diagnostique T_4 est composé de deux tests diagnostiques successifs T_1 et T_2. On suppose que les deux tests sont indépendants. **On considère le test T_4 comme positif si l'individu est testé positif à au moins l'un des tests.**
   (a) Exprimer la sensibilité du test 4 en fonction des sensibilités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins sensible que ces deux tests ?
   (b) Exprimer la spécificité du test 4 en fonction des spécificités de $T1$ et $T2$. Est-il plus ou moins spécifique que ces deux tests ?

Chapitre 2

Fiche 1

Généralités sur les suites

Activité d'introduction

Définir une suite est extrêmement simple : une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour une suite $u : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, il est d'usage de noter u_n le nombre $u(n)$.

Partie A - Situations conduisant à des suites

Exercice 43 - Une liste de nombres.
On considère la liste des multiples de 7 : $0,\ 7,\ 14,\ 21, \ldots$ que l'on note successivement $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$
Ainsi, $u_0 = 0,\ u_1 = 7,\ \ldots$.

1. Donner les valeurs de $u_3,\ u_4,\ u_{25},\ u_{100}$ et u_{286}.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 44 - Une situation géométrique.
Pour $n \geqslant 1$, on désigne par u_n le nombre de régions déterminées dans le plan par n droites en position générale (deux à deux sécantes, et trois à trois non concourantes).

1. À l'aide de dessins, vérifier que : $u_1 = 2,\ u_2 = 4$ et $u_3 = 7$.
2. Déterminer u_4 et u_5. Peut-on conjecturer les valeurs de u_6 et u_7 ?

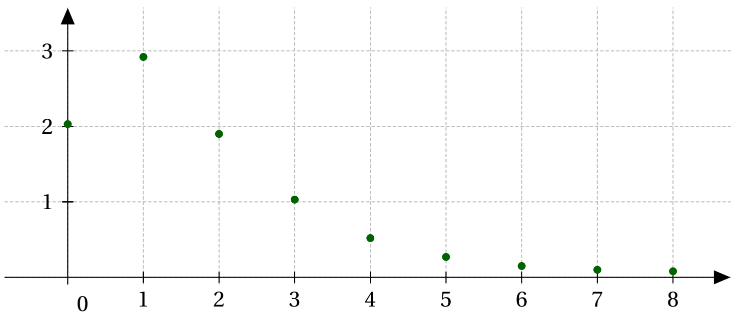
Exercice 45 - Des situations d'arithmétique.

1. On range les nombres premiers dans l'ordre croissant et on les désigne successivement par $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$. Déterminer p_n pour $1 \leqslant p_n \leqslant 16$.
2. On note d_n la n^{e} décimale du rationnel $\dfrac{1}{7}$. Déterminer $d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_{61}$ et d_{2002}.

Exercice 46 - Une formule explicite.
Soit $f(x) = x^2 + 1$; pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre $f(n)$.

1. Déterminer $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n.

Exercice 47 - Un graphique.
Sur le graphe ci-dessous, u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n ($n \in \mathbb{N}$).



Déterminer u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 8$.

Partie B - La notation indicielle

La notation indicée (ou indicielle) demande une certaine familiarisation.

Exercice 48 - Manipulation des indices.

1. Soit $u : n \longmapsto 2n^2 - 3$ une suite numérique. Exprimer en fonction de n les nombres u_n, u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n}, u_{n^2}, u_{2n+1} et u_{2n-1}.
2. Soit $v : n \longmapsto 3^n$ une suite numérique. Exprimer en fonction de v_n les nombres v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n-1} et v_{2n}.

Exercice 49 - Le bon choix.
Soit $v_n = 2^n$. Trouver, dans chaque cas, la bonne expression.

1. $v_{n+1} = \begin{cases} \square\ 2^n + 1 \\ \square\ 2 \times 2^n \\ \square\ 2^n + 2 \end{cases}$

2. $v_{2n} = \begin{cases} \square\ 2 \times 2^n \\ \square\ 2^{2n} \end{cases}$

3. $v_{n-1} = \begin{cases} \square\ 2^n - 1 \\ \square\ 2^n - 2 \\ \square\ 0,5v_n \end{cases}$

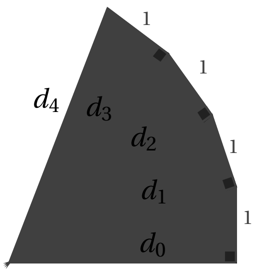
4. $v_{2n+1} = \begin{cases} \square\ 2 \times 4^n \\ \square\ 2 \times 2^n + 1 \\ \square\ 2 \times 2^n + 2 \end{cases}$

Partie C - Suites définies par récurrence

Exercice 50.
Sur la figure suivante, la suite des nombres $(d_0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots)$ se trouve entièrement déterminée par les conditions :

$$\begin{cases} d_0 = 3 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + d_n^2} \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

qui permettent de calculer tous les termes de proche en proche. Nous dirons que la suite est **définie par récurrence**. L'égalité qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent est appelée **relation de récurrence**.



1. **Calcul exact des termes de la suite (d_n)**
   Calculer d_1, d_2 et d_3.
2. **Calcul des termes de la suite (d_n) à l'aide de la calculatrice**
   (a) A l'écran de votre calculatrice, taper 3 puis $enter$, taper ensuite $\sqrt{1 + ans^2}$ où ans désigne la réponse du dernier calcul effectué par la calculatrice et valider par $enter$,appuyer ensuite successivement sur $enter$ le nombre de fois souhaité pour obtenir les 10 premiers termes de la suite.
   (b) Conjecturer l'expression de d_n en fonction de n.

Fiche 2

Généralités sur les suites

Définir une suite réelle

I. Généralités

Définition 3
Une suite réelle (ou suite numérique) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

On note souvent u_n au lieu de $u(n)$ l'image de n par u. u_n est un nombre réel appelé terme général de la suite ou terme d'indice n ou terme de rang n.
La suite (c'est-à-dire la fonction) est notée u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

— La notation (u_n) est une abréviation de $(u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots)$.

— Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ n'est définie qu'à partir de $n = 1$. La suite u se note alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

— Si une suite u est définie à partir du rang 0, le terme de rang 0 (c.-à-d. u_0) est le premier terme de la suite ; le terme de rang 1 (c.-à-d. u_1) est le deuxième terme de la suite.
Si une suite u est définie à partir du rang 2, le terme de rang 2 (c.-à-d. u_2) est le premier terme de la suite ; le terme de rang 3 (c.-à-d. u_3) est le deuxième terme de la suite.

— Attention à ne pas confondre :

  — (u_n) : la suite (i.e. la fonction),

  — u_n : le terme général (i.e. l'image de n, un nombre réel).

— Attention à la signification des indices : $u_{n+1} \neq u_n + 1$

  — u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$ (terme qui suit u_n),

  — $u_n + 1$ est la somme du terme d'indice n et de 1.

II. Modes de génération d'une suite

II.1. Moyens élémentaires

— Une phrase
Exemple : « on considère la suite des multiples de 7 » définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $u_n = 7n$.

— Une situation géométrique
Exemple : voir activité d'introduction Exercice 38.

— Un graphique
Exemple : voir activité d'introduction Exercice 41.

II.2. 1[er] moyen classique : une formule explicite

Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est exprimé en fonction de n et indépendamment des autres termes de la suite, on dit que u est définie de manière explicite. On peut, dans ce cas, calculer directement chaque terme à partir de son indice.

Exemples

— $u_n = \dfrac{1}{n}$; $n \geqslant 1$

— $u_n = 2n+1$; $n \geqslant 0$

— $u_n = n^2+1$; $n \in \mathbb{N}$ (activité d'introduction Exercice 40.)

— et plus généralement :
$u_n = f(n)$; $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Tous les renseignements sur f (sens de variation, extremum, graphique...) servent alors pour la connaissance de la suite.

II.3. 2[e] moyen classique : une relation de récurrence

On dit qu'une suite u est **définie par récurrence** lorsqu'elle est définie par :

$$\begin{cases} \text{- la donnée de ses premiers termes} \\ \text{- une relation exprimant chaque autre terme en fonction des termes précédents} \end{cases}$$

Pour calculer la valeur d'un terme, il faut procéder de proche en proche ; le calcul d'un terme nécessite d'avoir calculé les termes précédents.

Exemples

— (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \quad n \geqslant 1 \end{cases}$
est la suite donnant le nombre de régions du plan délimitées par n droites en « position générale » (voir activité d'introduction 1.2.).

— (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$ est la suite des nombres impairs.

— (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$ dont les premiers termes sont :
$u_2 = u_1 + u_0 = 2+1 = 3$
$u_3 = u_2 + u_1 = 3+2 = 5$

— et plus généralement :
soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction ; soit $a \in I$.
On peut considérer la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercices

Suites définies explicitement

Exercice 51. Pour chacune des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{10}.

a. $u_n = 4n+5$

b. $u_n = n^2$

c. $u_n = (-2)^n$

d. $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

Exercice 52. Pour chacune des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$, calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{100}. On donnera les valeurs exactes ou arrondies au centième ou à $0,1 \times 10^{60}$ si nécessaire.

a. $u_n = 4^n - 3n$

b. $u_n = 1,05^n$

c. $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $u_n = 2 + (-1)^n$

Exercice 53. Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n avec, pour tout $n \geqslant 0$:

a. $u_n = 4n+2$

b. $u_n = n^2 + 4n$

c. $u_n = (-1)^n$

d. $u_n = 2^{n-1}$

Exercice 54. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = n^2 + 2n$.
Exprimer v_{n+1}, v_{2n} et v_{n+4} en fonction de n.

Exercice 55. Dans chacun des cas suivants, préciser à partir de quel rang la suite de terme général u_n est définie.

a. $u_n = \sqrt{2n-7}$

b. $u_n = \dfrac{n+1}{n-5}$

c. $u_n = \sqrt{n^2+n-12}$

d. $u_n = \dfrac{n-6}{n^2-2001}$

e. $u_n = \dfrac{1}{3^n-3}$

f. $u_n = \sqrt{2^n - 1000}$

Exercice 56. La suite (u_n) est définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = n^3 - 6n^2 + 12n - 8$.
Exprimer u_{n+2} en fonction de n

Exercice 57. Si pour tout entier n, $u_{n+1} = 2^{3n+2}$, que vaut u_n pour $n \geqslant 1$?

Exercice 58. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2024}$.

Exercice 59. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par :
$$u_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n)$$

1. Combien de termes comporte cette somme ?
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 60. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+1}{n}$.

1. Calculer les six premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Est-il honnête de présenter la suite (v_n)par ses six premiers termes ?

Exercice 61. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par son terme général :
$$u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une autre formule explicite pour u_n.
3. Calculer u_5 et u_6. La formule conjecturée est-elle exacte ?

Attention :
Les deux derniers exercices doivent nous alerter sur un point essentiel : la donnée des premiers termes d'une suite peut permettre des conjectures, mais ne démontre rien concernant son terme général, son comportement global, etc.

Suites récurrentes

Exercice 62. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{n+1} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 63. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = 4u_{n-1} + 2n \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1} - 3 \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 64. Donner les valeurs de $\cancel{u_1}$, u_2, u_3, u_4 et u_5.

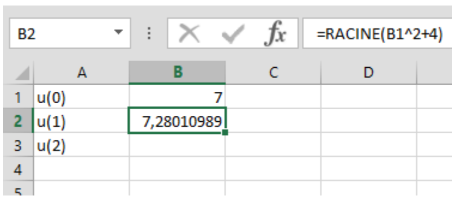
a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

Exercice 65.

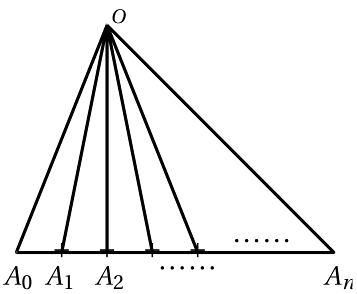
1. Pour chacune des suites de l'exercice 56, écrire la relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
2. Pour chacune des suites de l'exercice 57, écrire la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

Exercice 66. Si l'on étend vers le bas la formule écrite en B2, on obtient les termes d'une suite (u_n).



Définir (u_n) par récurrence.

Exercice 67. Dans la figure suivante, u_n est le nombre de triangles dont un sommet est le point O et les deux autres sont deux des points parmi A_0, A_1, ...et A_n.



1. Vérifier que $u_1 = 1$, $u_2 = 3$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_{n+1} = u_n + n + 1$$
3. En déduire les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

Exercice 68. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Calculer v_1 et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
2. En déduire que la suite (v_n) est la suite (u_n) de l'exercice précédent.

Mode de génération

Dans les exercices 63 à 67 , expliciter les six premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 69. u_n est le carré du n-ième nombre premier.

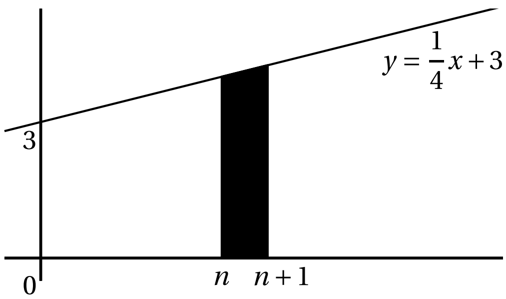
Exercice 70. u_n est le le chiffre des unités de 8^n.

Exercice 71. u_n est le n-ième chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\dfrac{7}{11}$.

Exercice 72. u_n est la somme des inverses des n premiers entiers naturels non nuls.

Exercice 73. u_n est le reste de la division euclidienne de $4n+5$ par 6.

Exercice 74. Sur la figure suivante, u_n est l'aire du domaine coloré.



1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer géométriquement $u_0 + u_1 + \cdots + u_{39}$.

Fiche 3

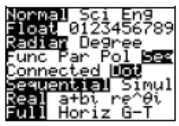
Généralités sur les suites

Prise en main des menus de la calculatrice

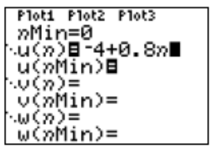
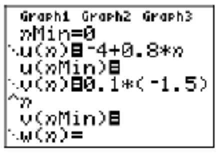
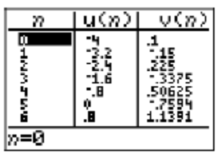
Suites	Prise en main des menus suite	TI-83+

?	1°) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$. Calculer les 15 premiers termes de chaque suite. 2°) Les suites (u_n) et (v_n) peuvent être définies par récurrence par les relations : $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$. En déduire une autre méthode calcul des 15 premiers termes de chaque suite. 3°) Afficher les valeurs u_{31} et v_{25}. 4°) Représenter graphiquement les suites u et v par un nuage de points.	?

Accès au mode suites

Touche **MODE**. Choisir sur la troisième ligne **Seq** et appuyer sur **ENTER**. Choisir sur la quatrième ligne **Dot** et appuyer sur **ENTER**.	

1°) Utiliser le terme général

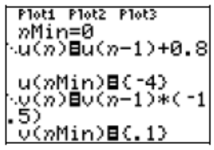
On a $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$ •Touche **Y=** .On obtient l'écran suivant (saisir éventuellement n Min = 0). Introduire la suite u. Pour la variable n, utiliser la touche **X,T, θ, n**. Valider avec la touche **ENTER**. Même opération pour la suite v. •Régler les paramètres de la table comme sur l'écran ci-contre Instruction **TBL SET** (touches **2nd** et **WINDOW**). •Afficher la table de valeurs Instruction **TABLE** (touches **2nd** et **GRAPH**). *→ Les suites u et v étant définies par une relation explicite, la donnée de u(nMin) et de v(nMin) n'est pas obligatoire.* *⇔i des valeurs de u(nMin) et de v(nMin) sont saisies, elles apparaissent dans la table sans conséquences sur les autres valeurs de u_n.*	   

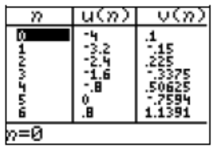
2°) Utiliser la relation de récurrence

Sur la calculatrice il faut exprimer u_n en fonction de u_{n-1}
Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ devient $u(n) = u(n-1) + 0{,}8$
et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$ devient $v(n) = v(n-1) \times (-1{,}5)$

• Touche **Y=** puis **CLEAR** pour effacer la suite déjà saisie.
Introduire les deux relations de récurrence :
→ n s'obtient avec la touche **X,T, θ, n**.
→ u et v s'obtiennent avec les touches **2nd** **7** ou **2nd** **8** .
Compléter *u(nMin)* et de *v(nMin)* par –4 et 0,1. Valider avec **ENTER**.

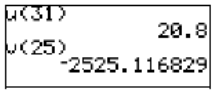
• Régler les paramètres et afficher la table de valeurs la table comme ci-contre.





3°) Afficher un terme de la suite

Retour à l'écran de calcul . Instruction **QUIT** (touches **2nd** et **MODE**).
Saisir les séquences suivantes :
2nd **7** **(** **3** **1** **)** **ENTER** et **2nd** **8** **(** **2** **5** **)** **ENTER**.



4°) Représentation graphique

• Ouvrir la fenêtre d'affichage :Touche **WINDOW**.

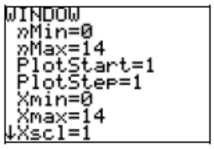
Régler les paramètres comme sur les écrans ci-contre.
Touches **▲** et **▼** pour passer d'une ligne à l'autre.

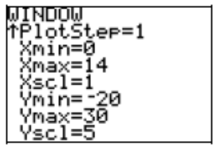
Touche **GRAPH** pour obtenir la représentation ci-contre.

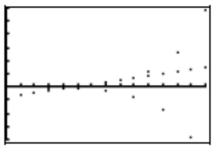
• La touche **TRACE** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés.

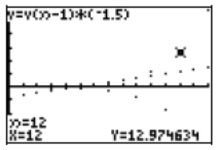
Les touches **◄** et **►** permettent de passer d'un point à l'autre.

Les touches **▲** et **▼** permettent de passer d'une suite à l'autre.

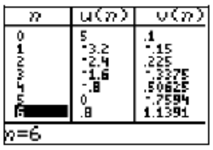
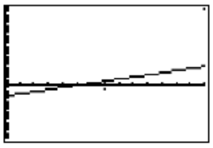
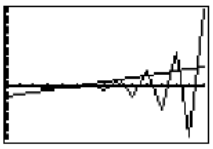
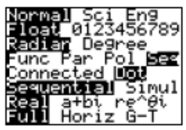








⟹ *Problèmes pouvant être rencontrés*

Problème rencontré	*Comment y remédier*
Valeur de u_0 incorrecte 	Touche **Y=** puis saisir la bonne valeur dans *u*(*n*Min) (ou pour **CLEAR** effacer la valeur erronée).
	Les suites ont été saisies en mode fonction. La calculatrice trace une droite pour *u* et ne sait pas calculer v_x pour *x* réel.
Points reliés 	Touche **MODE**. Choisir sur la cinquième ligne **Dot** . et appuyer sur **ENTER**. 

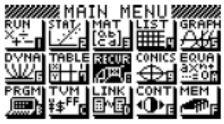
Suites	**Prise en main des menus suites**	CASIO GRAPH 35+

? 1°) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $v_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$. Calculer les 15 premiers termes de chaque suite.
2°) Les suites (u_n) et (v_n) peuvent être définies par récurrence par les relations : $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$. En déduire une autre méthode calcul des 15 premiers termes de chaque suite.
3°) Afficher les valeurs u_{31} et v_{25}.
4°) Représenter graphiquement les suites u et v par un nuage de points. ?

Accès au mode suites

Touche MENU icône  Appuyer sur EXE

La calculatrice note a_n et b_n les deux suites au lieu de u_n et v_n.



1) En utilisant le terme général

On a $a_n = -4 + 0{,}8\,n$ et $b_n = 0{,}1 \times (-1{,}5)^n$

- On obtient l'écran suivant.

Sélectionner le sous-menu TYPE (touche F3) et choisir l'instruction an (touche F1).

Introduire la suite a . Pour la variable n, utiliser l'instruction n (touche F4) Valider avec la touche EXE.

Même opération pour la suite b Valider avec la touche EXE.

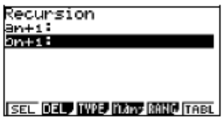
→ *Commentaire : Les suites a et b sont ici définies par une relation explicite, la donnée de a_0 et b_0 n'est donc pas obligatoire.*

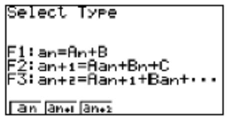
- Régler les paramètres de la table comme sur l'écran ci-contre

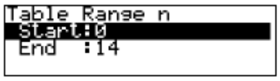
Instruction RANG (touche F5).

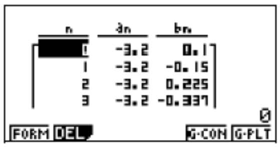
- Afficher la table de valeurs

Instruction TABLE (touche F6).









2) En utilisant la relation de récurrence

On a $u_{n+1} = u_n + 0{,}8$ soit $a_{n+1} = a_n + 0.8$
et $v_{n+1} = v_n \times (-1{,}5)$ soit $b_{n+1} = b_n \times (-1{,}5)$

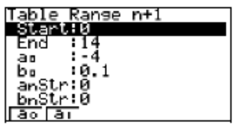
- Sélectionner le sous-menu TYPE (touche F3) et choisir l'instruction a_{n+1} (touche F2).

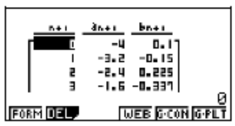
Introduire les deux relations de récurrence : utiliser l'instruction na_n (touche F4) et choisir a_n (touche F2) et b_n (touche F3).

Valider avec la touche EXE.

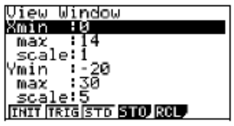
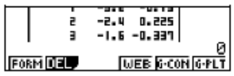
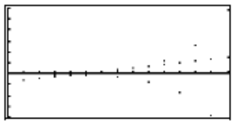
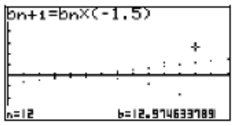
- Régler les paramètres de la table comme ci-contre.

- Afficher la table de valeurs comme ci-contre.

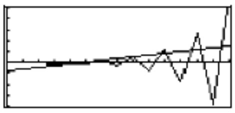




3) Représentation graphique

•Régler la fenêtre d'affichage : instruction **V-Window** (touches **SHIFT** **F3**). Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre. Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.	
Puis touche **EXIT** puis instruction **TABL** (touche **F6**). Puis choisir **G-PLT** (touche **F6**).	
On obtient la représentation ci-contre	
•L'instruction **TRACE** (touche **F1**) permet d'obtenir les coordonnées des points représentés. Les touches ᐸ et ᐳ permettent de passer d'un point à l'autre. Les touches ⋀ et ⋁ permettent de passer d'une suite à l'autre.	

⇒ *Problèmes pouvant être rencontrés*

Problème rencontré	*Comment y remédier*
Points reliés 	Dans le sous-menu TABL , sélectionner G-PLT

Fiche 4

Généralités sur les suites

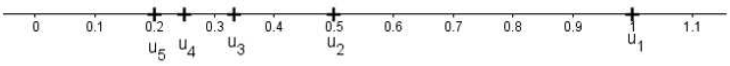
Représentations graphiques

On peut représenter une suite u :

I. En plaçant sur un axe les points d'abscisse u_n , $n \in \mathbb{N}$

Exemple : soit (u_n) définie par :

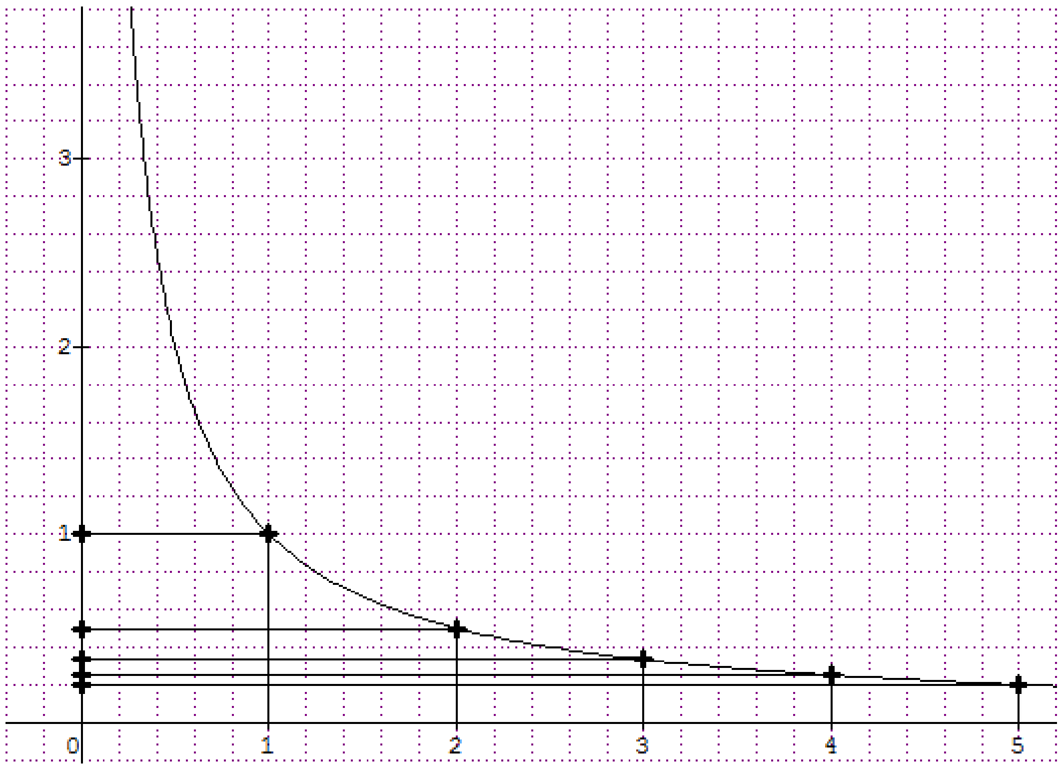
$$u_n = \frac{1}{n} \; ; \; n \geqslant 1$$



II. En plaçant dans un repère les points de coordonnées $(n \; ; \; u_n)$

— **Suite donnée par son terme général**
Exemple :
Soit (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \; ; \; n \geqslant 1$$

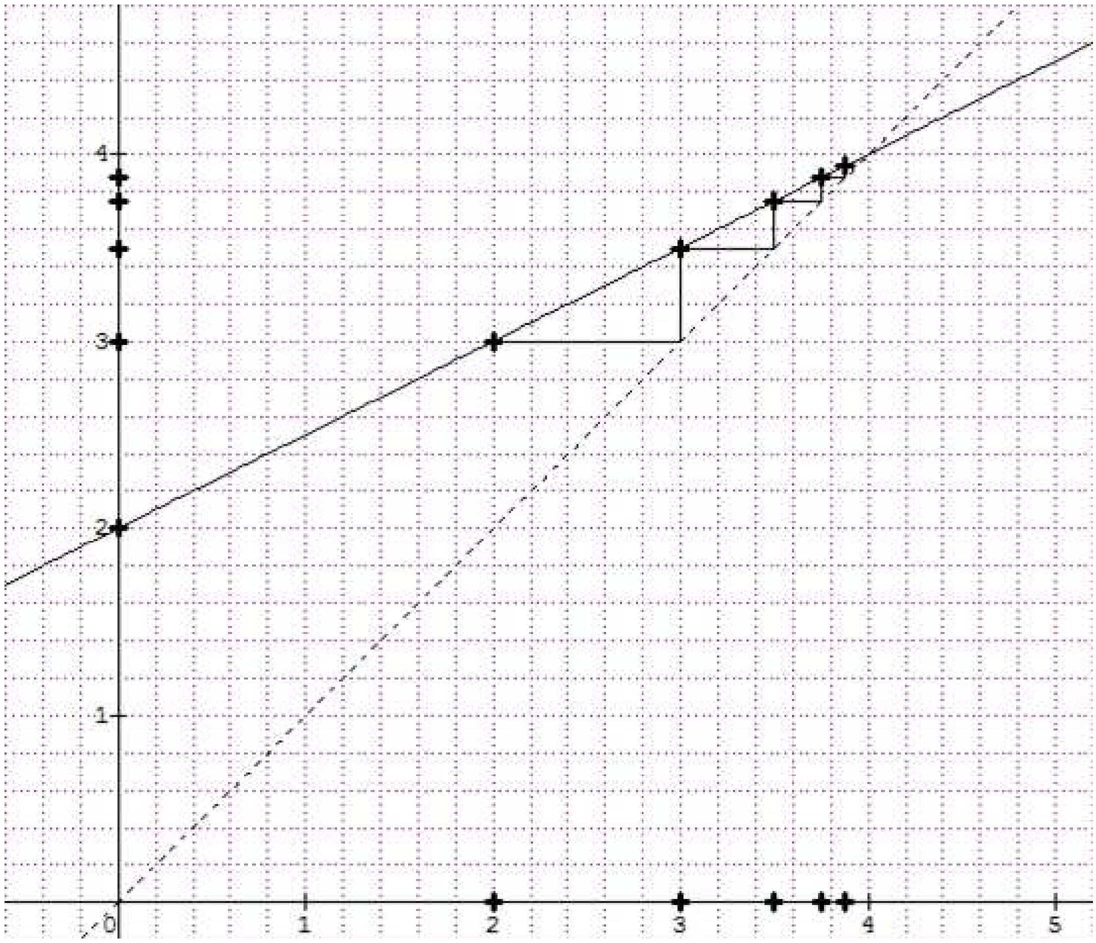


Les termes de la suite sont les ordonnées des points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses entières.

— **Suite donnée sous forme récurrente**

Exemple : Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

u_n est défini par $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \geqslant 0$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + 2$; $x \in \mathbb{R}$.



Méthode de construction :

— On trace la droite (d) : $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ et la première bissectrice d'équation $y = x$.

— On place u_0 sur l'axe des abscisses.
$u_1 = f(u_0)$, donc u_1 est l'ordonnée du point de (d) qui a pour abscisse u_0.

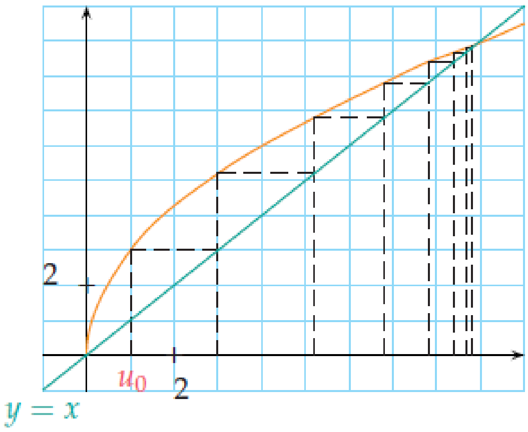
— On recommence le procédé pour construire u_2.

- Il faut commencer par placer u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, on « reporte » u_1 - qui est placé sur l'axe des ordonnées - en utilisant la droite d'équation $y = x$.
- $u_2 = f(u_1)$, donc u_2 est l'ordonnée du point de (d) qui a pour abscisse u_1.

— On poursuit ainsi.

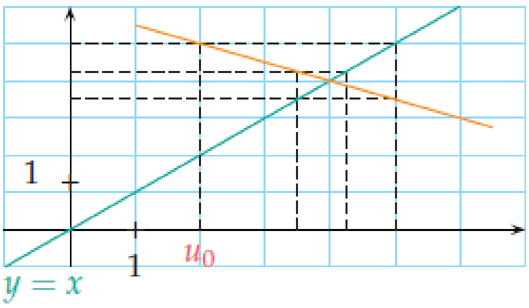
Exercices

Exercice 75. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geqslant 0 \end{cases}$.
On a construit ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n).



Lire graphiquement une valeur approchée de u_4.

Exercice 76. On a construit ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et les premiers termes de la suite (u_n).
Lire graphiquement une valeur approchée de u_3.



Exercice 77. Représenter graphiquement les trois premiers termes des suites ci-dessous définies par :

1. $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $u_n = \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $u_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

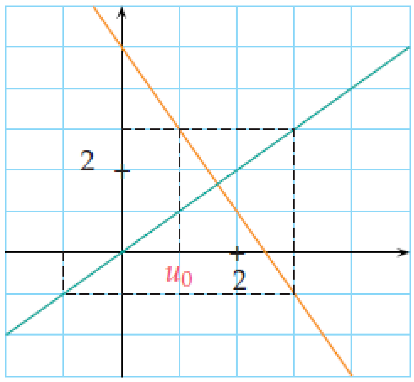
Exercice 78. Représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites définies ci-dessous dans un repère adapté :

1. $u_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{2}n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $u_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 79. Construire les trois premiers termes des suites définies pour tout entier naturel n par les relations de récurrence suivantes :

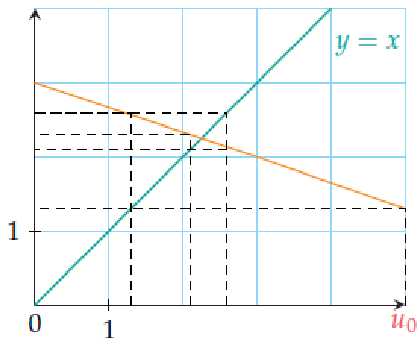
1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \ ; \ n \geqslant 0 \end{cases}$
   dans un repère orthogonal (1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour deux unités en ordonnée).
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 5 \ ; \ n \geqslant 0 \end{cases}$
   dans un repère orthonormé d'unité 1 cm .

Exercice 80. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Quelle relation de récurrence définit (u_n) ?
3. Lire graphiquement la valeur de u_2.
4. Vérifier par le calcul.

Exercice 81. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).



1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Quelle relation de récurrence définit (u_n) ?
3. Lire graphiquement la valeur de u_2.
4. Vérifier par le calcul.

Fiche 5

Généralités sur les suites

Représentations graphiques de suites à la calculatrice

Suites	Représentations graphiques	TI-84+ français

?

On considère la suite u définie par: $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \frac{5}{u_n}$

1°) Réaliser une table des valeurs des nombres u_n . Conjecturer le comportement de la suite u.
2°) Obtenir les points de coordonnées $(n,\ u_n)$ pour n entre 0 et 10. Peut-on préciser la conjecture ?
3°) Réaliser la construction sur l'axe des abscisses des premiers termes de la suite u. Peut-on préciser la conjecture ?

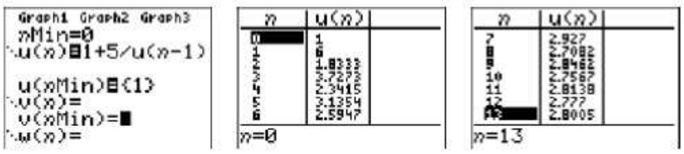
?

Tabuler la suite

Saisir la suite u

Régler les paramètres de la table et afficher les valeurs des termes u_n.

On observe une stabilisation « alternée » autour de 2,8.



Représentation graphique par un nuage de points

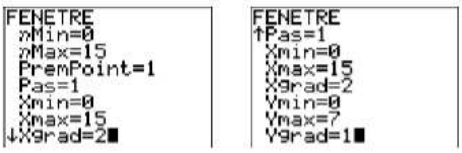
Régler la fenêtre d'affichage :Touche **WINDOW**.

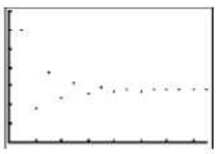
Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre.
Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.

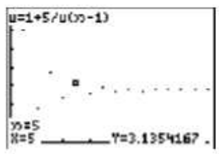
Puis touche **graphe**. On obtient la représentation ci-contre

La touche **trace** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés. Les touches < et > permettent de passer d'un point à l'autre.

Même stabilisation observée







Représentation graphique en escalier

Instruction FORMAT (touches 2ND et ZOOM) et sur la première ligne, choix Esc (escalier).

Régler la fenêtre d'affichage comme ci-contre.

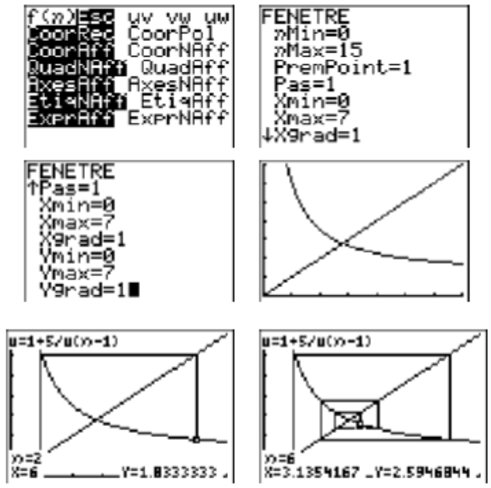
Puis touche GRAPH

La calculatrice affiche alors la courbe d'équation $y = 1 + \frac{5}{x}$ et la droite d'équation $y = x$.

Activer la fonction TRACE. Chaque appui sur la touche ▶ permet de visualiser une étape de la construction des termes de la suite u.
La suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$.

→: *la lecture du terme u_n se fait en y lors de l'affichage de la valeur de n.*

→: *pour effacer une construction instruction* DRAW (2ND PRGM)*et choix* **1 : EffDessin**



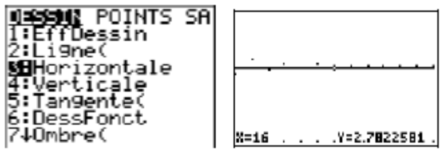
⇒ Compléments

Préciser la conjecture sur le nuage de points

Sur l'écran graphique on peur placer une ligne horizontale mobile qui permet de tester d'éventuelles valeurs de limites :

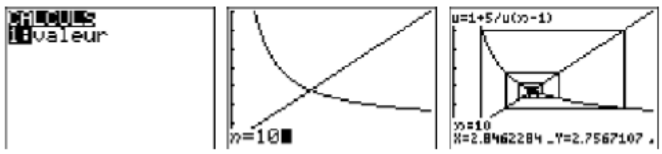
Instruction DRAW (2ND PRGM)

puis choix **3 : Horizontale**
La ligne obtenue se déplace avec les curseurs ▲ et ▼ son équation se lit à l'écran.



Construction en escalier jusqu'à un rang donné

En mode suite et format escalier l'instruction CALC (touches 2ND et TRACE) puis choix **1 : valeur** permet de lancer la construction jusqu'à la valeur de n affichée (ici n = 10). La valeur de u_n est lue en Y. Une construction antérieure doit être effacée.



Suites	Représentations graphiques	CASIO GRAH 35 +

?

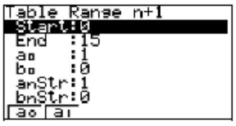
On considère la suite u définie par: $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{5}{u_n}$

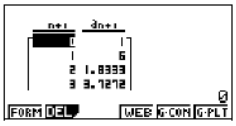
1°) Réaliser une table des valeurs des nombres u_n . Conjecturer le comportement de la suite u.
2°) Obtenir les points de coordonnées (n, u_n) pour n entre 0 et 10. Peut-on préciser la conjecture ?
3°) Réaliser la construction sur l'axe des abscisses des premiers termes de la suite u. Peut-on préciser la conjecture ?

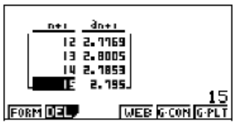
?

Tabuler la suite

Saisir la suite u
Régler les paramètres de la table et afficher les valeurs des termes u_n.
On observe une stabilisation « alternée » autour de 2,8.







Représentation graphique par un nuage de points

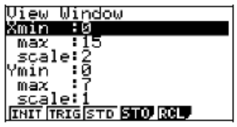
Régler la fenêtre d'affichage : Instruction **V-Window**.

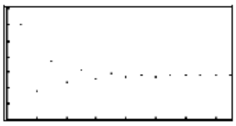
Régler les paramètres d'affichage comme sur les écrans ci-contre.
Touches ⋀ et ⋁ pour passer d'une ligne à l'autre.

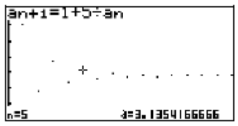
Puis dans le sous-menu **TABL**, choisir l'instruction **G.PLT** (touche **F6**).
On obtient la représentation ci-contre

L'instruction **Trace** permet d'obtenir les coordonnées des points représentés. Les touches ◀ et ▶ permettent de passer d'un point à l'autre.

Même stabilisation observée







Représentation graphique en escalier

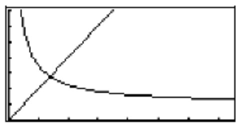
Dans le sous-menu **TABL** choisir l'instruction **WEB** (touche **F4**).
La calculatrice affiche alors la courbe d'équation $y = 1 + \dfrac{5}{x}$ et la droite d'équation $y = x$.

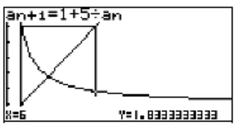
Chaque appui sur la touche **EXE** permet de visualiser une étape de la construction des termes de la suite u.

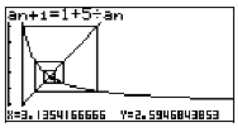
La suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$.

→ *la lecture du terme u_n se fait en x.*

→ *pour effacer une construction touches* **F4** *puis sélectionner* **Cls**







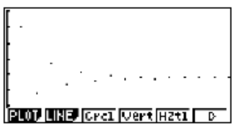
⇒ *Compléments*

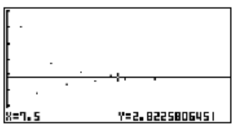
Préciser la conjecture sur le nuage de points

Sur l'écran graphique on peut placer une ligne horizontale mobile qui permet de tester d'éventuelles valeurs de limites :

Instruction **Sketch** (touche **F4**).

puis choisir **HZtl touches F6 puis F5**
La ligne obtenue se déplace avec les curseurs ⋀ et ⋁ son équation se lit à l'écran.





Fiche 6

Généralités sur les suites

Suites numériques et algorithmique

I. Exercices

Exercice 82. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. L'algorithme ci-dessous affiche la valeur du terme u_N de cette suite lorsque l'on saisit la valeur de N.

Variables	U est un réel
	N est un entier naturel
Entrée	Saisir N
Traitement	U prend la valeur $3 \times N - 5$
Sortie	Afficher U

1. Quelle valeur est affichée en sortie pour $N = 6$?
2. Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?

Exercice 83. Soit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = n^2 - 3n + 1$ et $v_n = (u_n)^2$ et $w_n = v_n - u_n$.

Variables	u, v et w sont des réels
	p est un entier naturel
Entrée	Saisir ....
Traitement	Affecter à u la valeur ....
	Affecter à v la valeur ....
	Affecter à w la valeur ....
Sortie	Afficher ....

1. Calculer u_4, v_4 et w_4.
2. Compléter l'algorithme ci-dessus afin qu'il affiche la valeur des termes u_p, v_p et w_p lorsque l'on saisit la valeur de p.

Exercice 84. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = 2u_n$.

1. On a calculé u_3 et trouvé $u_3 = 6$. Calculer u_4 et v_4.
2. Léo veut écrire un algorithme qui affiche la valeur des termes u_{n+1} et v_{n+1} quand on entre la valeur de u_n. Il propose l'algorithme ci-dessous.

Variables	u et v sont des réels
Entrée	Saisir u
Traitement	u prend la valeur $u + 2$
	v prend la valeur $2u$
Sortie	Afficher u et v

(a) Qu'affiche cet algorithme quand on entre la valeur de u_3, soit 6 ?

(b) Ces résultats sont-ils ceux que l'on attend ?

(c) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

Exercice 85. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = 3n - 5$.

1. Calculer U_0 et U_1.
2. On donne ci-dessous un algorithme. On saisit $N = 5$.

Variables	U est un réel
	I et N sont des entiers naturels
Entrée	Saisir N
Traitement	**Pour** I variant de 0 à N **faire**
	U prend la valeur $3 \times I - 5$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

(a) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I	0	1	2			
Valeur de U	-5	-2				

(b) Quelle valeur affiche l'algorithme en Sortie ? À quoi correspond-elle ?

Exercice 86. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 1$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. On donne ci-dessous un algorithme.

Variables	U est un réel
	I et N sont des entiers naturels
Entrée	Saisir N
Initialisation	U prend la valeur 2
Traitement	**Pour** I variant de 1 à N **faire**
	| U prend la valeur $2 \times U - 1$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

   (a) Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 4$ en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I		1	2		
Valeur de U	2	3			

   (b) Quelle(s) valeurs(s) affiche l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N=4$?

3. On modifie la phase de traitement de l'algorithme en déplaçant l'instruction « Afficher U » comme ci-contre. Quelle(s) valeurs(s) affiche alors l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N = 4$?

Pour I variant de 1 à N **faire**
| U prend la valeur $2 \times U - 1$
| Afficher U
Fin Pour

4. Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.
   (a) Dans la question 2, l'algorithme affiche :
   - ☐ la valeur de U_N
   - ☐ la valeur de U_{N+1}
   - ☐ toutes les valeurs de U_1 à U_N
   - ☐ toutes les valeurs de U_0 à U_N

   (b) Dans la question 3, l'algorithme affiche :
   - ☐ la valeur de U_N
   - ☐ la valeur de U_{N+1}
   - ☐ toutes les valeurs de U_1 à U_N
   - ☐ toutes les valeurs de U_0 à U_N

Exercice 87. Une commune disposait de 200 vélos en libre-service au 1er janvier 2015. Elle estime que, chaque année, 15% des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $(2015 + n)$.

On a ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.
On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation	N prend la valeur 0
	U prend la valeur 200
Traitement	**Tant que** $N < 4$ **faire**
	| U prend la valeur $0,85 \times U + 42$
	| N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher U

1. Compléter le tableau ci-dessous. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de U	200	212			
Valeur de N	0	1			
Condition $n < 4$	vraie				

2. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?
3. Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

Exercice 88. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{est impair} \end{cases}$$

1. (a) Calculer les termes u_1 à u_8 de la suite (u_n).
   (b) Quels seront les termes suivants de la suite (u_n) ?
2. La suite (u_n) est appelée suite de Syracuse. On conjecture que, quelle que soit la valeur de u_0, il existe au moins un entier naturel k tel que $u_k = 1$ (ce résultat n'est toujours pas démontré). Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche, lorsque l'on entre la valeur de u_0, la plus petite valeur de k pour laquelle $u_k = 1$.

Variables	k est un entier naturel et U est un nombre réel
Entrée	Saisir U
Initialisation	k prend la valeur 0
Traitement	**Tant que** ....**faire**
	| **Si** U est pair
	| | **Alors** U prend la valeur ....
	| | **Sinon** U prend la valeur ....
	| **Fin Si**
	| k prend la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

Fiche 7

Généralités sur les suites

Approfondissements

I. Exercice résolu

Trouver une formule explicite de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}.$$

Recherche d'une conjecture raisonnable

Tout commence par un examen des premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{11}$

Nous observons une certaine régularité :

- lorsque n est pair, u_n est de la forme $\frac{2n}{n+1}$;
- lorsque n est impair, c'est moins explicite, mais le numérateur est n. Essayons, pour obtenir encore un un numérateur égal à $2n$, de modifier les fractions : nous obtenons alors la suite : 0, $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{7}, \frac{14}{8}, \frac{16}{9}, \dots$
  Nous pouvons donc conjecturer que $u_n = \frac{2n}{n+1}$ pour tout n.

Solution rédigée

Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \frac{2n}{n+1}$.

- d'une part, $v_0 = 0$
- d'autre part, $\frac{4}{4 - v_n} = \frac{4}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{4(n+1)}{2n+4} = \frac{2(n+1)}{n+2} = v_{n+1}$.
  La suite (v_n) vérifie donc la même relation de récurrence que (u_n).

On admet le théorème suivant :

> Deux suites ayant le même terme initial et vérifiant la même relation de récurrence sont égales.

On peut alors appliquer ce théorème pour ces deux suites : pour tout n entier naturel , $u_n = v_n = \frac{2n}{n+1}$

II. Exercices

Recherche de formules explicites

Exercice 89. Trouver une formule explicite des suites (u_n) et (d_n) définies par :

- $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$
- $\begin{cases} d_0 = 3 \\ d_{n+1} = \sqrt{1+d_n^2} \end{cases}$

Exercice 90. Pour chacune des suites suivantes :

- Calculer les cinq premiers termes et conjecturer une formule explicite de u_n.
- Valider cette conjecture.

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1 \end{cases}$
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$
3. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
4. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
5. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4 \end{cases}$
6. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{11} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$
7. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
8. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)^2 \end{cases}$
9. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

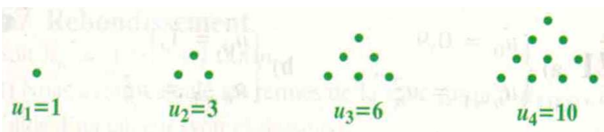
Exercice 91. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$

1. Lorsque $u_0 = 0$, calculer les premiers termes, conjecturer, valider.
2. Lorsque $u_0 = 1$, démontrer que $u_n = 2^n + n$.
3. Lorsque $u_0 = 6$, démontrer que $u_n = 3 \times 2^{n+1} + n$.

Exercice 92. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{6}(n^2 - 3n + 8) \end{cases}$

1. Calculeru_2,u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturer une formule explicite de u_n.
3. Calculer u_6. Alors ?

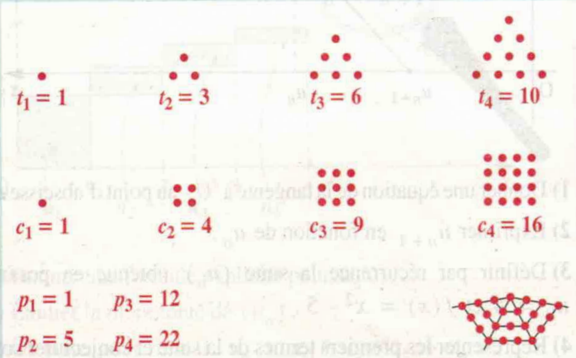
Exercice 93. On considère la suite (u_n) où u_n est le nombre de points d'un réseau triangulaire à n étages comme sur la figure ci-dessous.



1. Calculer u_5, u_6 et exprimer u_{n+1}en fonction de u_n et de n.
2. On conjecture une formule de la forme $u_n = an^2 + bn + c$. Calculer a, b et c.
3. Démontrer cette conjecture. **Grand oral : Vous pouvez vous intéresser aux nombres polygonaux.**

Pythagore, Gourou des nombres

Né à Samos (VI^e siècle av. J.-C.), Pythagore fonde à Crotone (Sud de l'Italie) une secte qui mêle science et religion et qui développe une conception à la fois mystique et géométrique des nombres. Ainsi les Pythagoriciens développent-ils une classification des entiers en fonction de certains assemblages : les nombres triangulaires t_n.



On définit de même la suite des nombres « n-gonaux ». Le tableau ci-dessous rassemble les premières valeurs :

Nombre	1er	2^e	3^e	4^e	5^e	6^e	7^e	8^e	9^e	10^e
triangulaire	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
octogonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
nonagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
décagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Si u_n et v_n désignent respectivement le n-ième nombre $(k-1)$-gonal et k-gonal, on peut vérifier, par exemple que : $v_n = u_n + t_{n-1}$; $v_n = t_n + (k-3)t_{n-1}$; $v_n = n + (k-2)t_{n-1}$; etc.

Représentation graphique des termes d'une suite définie par récurrence

Exercice 94. Pour chacune des suites suivantes ; représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$
3. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$
4. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$
5. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
6. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = -1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
7. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,9 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
8. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,1 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

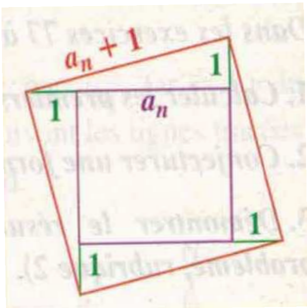
Exercice 95. On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ (n radicaux).

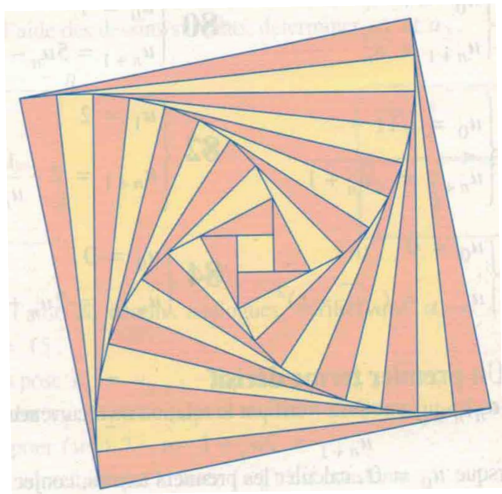
1. Définir (u_n) par récurrence
2. Représenter graphiquement les premiers termes.

Exercice 96. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2+1}$, $u_2 = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2+1}}$ $u_n = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{\vdots}{2 + \dfrac{1}{2+1}}}}$ (n traits de fractions).

1. Définir (u_n) par récurrence
2. Représenter graphiquement les premiers termes.

Exercice 97. À partir d'un carré C_0 de côté 1, on construit les carrés C_1, C_2,...,C_n de la manière suivante : les sommets de C_{n+1} sont construits sur les supports des côtés de C_n à l'extérieur et à la distance 1 des sommets de C_n.





On note a_n la longueur du côté de C_n. les dix premiers carrés sont représentés ci-dessous.

1. Définir par récurrence la suite (a_n)
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite et conjecturer son comportement.

Chapitre 3

Fiche 1

Fonctions du second degré
Définition et différentes expressions

I. Définition

Définition 4
On appelle fonction polynôme du second degré ou fonction trinôme ou trinôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b,\ c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

Exemples
Pour tout nombre réel x :

- les fonctions $x \longmapsto 4x^2 - \frac{2}{3}x + \sqrt{2}$; $x \longmapsto 5x^2 - 3$; $x \longmapsto x^2 + 2x$ sont des fonctions trinômes ;
- $x \longmapsto 2x + 1$ est une fonction affine (fonction polynôme de degré 1) ;
- $x \longmapsto 7x^3 - 2x^2 + 4$ est une fonction polynôme de degré 3 ;
- $x \longmapsto (2x+1)(x-3)$ est une fonction trinôme ;
- $x \longmapsto (x+1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction trinôme ;
- la fonction carré est la plus simple des fonctions trinômes avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.

Remarques

- Il y a unicité de l'écriture d'un polynôme sous forme développée. (admis) Ainsi, deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.
- Plus généralement, une fonction polynôme - ou polynôme - est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
où $n \in \mathbb{N}$ et a_n, a_{n-1}, ...,a_0 sont des réels fixés appelés coefficients de f.
    - Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé degré de f. (Le polynôme nul n'a pas de degré.)
    - $a_n x^n$ est le terme de plus haut degré, $a_3 x^3$ est le terme « en x^3 », a_0 est le terme de degré 0 ou terme constant.

II. Forme canonique

Propriété 6
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$. Il existe deux réels α et β uniques tels que : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelée la forme canonique de $f(x)$. On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Démonstration :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$. □

Remarque
Canonique vient du latin *canonicus* qui signifie « conforme aux règles » ou « régulier ». Le mot « canonique » sert à désigner un objet ayant les qualités d'un canon, c'est-à-dire d'une norme dominante. En effet, la forme canonique d'un trinôme est une expression donnant directement les coordonnées du sommet de la parabole et qui permet de voir rapidement si on peut factoriser le trinôme ou non.

Exemples

1. Déterminons la forme canonique du trinôme $x^2 + 6x - 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} x^2 + 6x - 1 &= x^2 + 2 \times 3x - 1 \\ &= x^2 + 2 \times 3x + 9 - 9 - 1 \\ &= (x+3)^2 - 9 - 1 \\ &= (x+3)^2 - 10 \end{aligned}$$

2. Déterminer la forme canonique du trinôme $-3x^2 + 5x - 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} -3x^2 + 5x - 1 &= -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) - 1 \\ &= -3\left(x^2 - 2 \times \frac{5}{6}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36}\right) - 1 \\ &= -3\left((x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{36}\right) - 1 \\ &= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} - 1 \\ &= -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Méthode

- On met a en facteur ;
- On reconnaît le début du développement d'un carré. De façon générale, si $m \in \mathbb{R}$, $x^2 + mx$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{m}{2}\right)^2$.
- On peut aussi calculer α et β à partir des coefficients a, b, c .

Exercices

Exercice 98. Les expressions suivantes sont-elles des trinômes de degré 2 ? Si oui, donner leurs coefficients

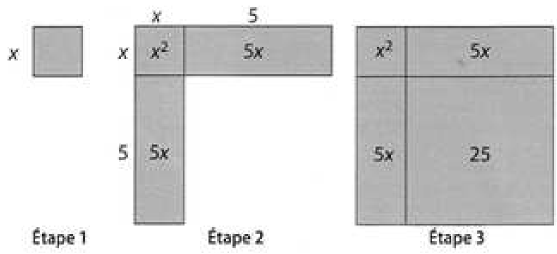
(a) $2x^2-3x+4$
(b) $3x-9$
(c) $(x-4)(3x+2)$
(d) $4x^2-5$

Exercice 99. Les expressions suivantes sont-elles des trinômes de degré 2 ? Si oui, donner leurs coefficients

(a) $2(x-3)^2+7$
(b) $9x^2-11x$
(c) $\dfrac{x^2-5x+8}{2}$
(d) $(x-1)(x-2)(x-3)$

Exercice 100 - La méthode d'Al-Khawarizmi.

1. On se propose de résoudre l'équation du second degré $x^2+10x=39$ que l'on notera (E).
   Voici la méthode proposée par le mathématicien perse Al-Khawarizmi.
   - Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x.
   - Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire vaut $\frac{10}{2}\times x$; on obtient ainsi 5 comme autre dimension.
   - Étape 3 : on complète alors le grand carré.



   (a) Exprimer l'aire du carré de deux façons différentes et en déduire que :
   $$x^2+10x=(x+5)^2-25.$$
   (b) En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x+5)^2=64$.
   Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).
   Al-Khwarizmi ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui, 64 n'a qu'une racine carrée : 8.
   (c) Déterminer l'autre solution de l'équation (E).
2. Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $x^2+12x=45$;
   (b) $x^2+4x-32=0$.

AI-Khawarizmi (783-850) est un mathématicien perse dont les écrits ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Il est à l'origine des mots « algorithme », « algèbre » et de l'utilisation des chiffres arabes.

Exercice 101. Mettre sous forme canonique :

(a) $2x^2+8x-2$
(b) x^2+3x+1
(c) $-x^2+2x+5$
(d) $3x^2+x-4$

Exercice 102. Mettre sous forme canonique :

(a) x^2+4x+5
(b) $3t^2+6t-9$
(c) $9a^2+18a+1$
(d) $2x^2+x+1$

Exercice 103. Soit $f(x)=-2x^2+6x-1$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
3. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Exercice 104. Soit $f(x)=x^2-5x+6$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.
4. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Fiche 2

Fonctions du second degré
Variations et représentation graphique

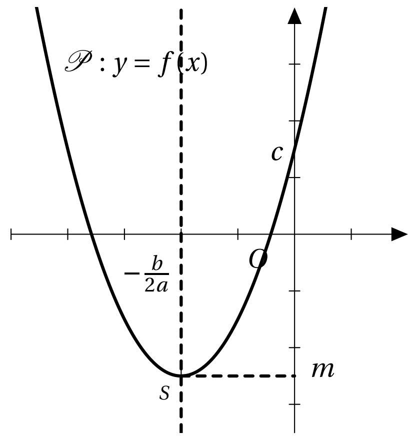
I. Sens de variation d'une fonction trinôme

Propriété 7
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le sens de variation de f est donné dans les tableaux ci-dessous :

$\boxed{\text{a>0}}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

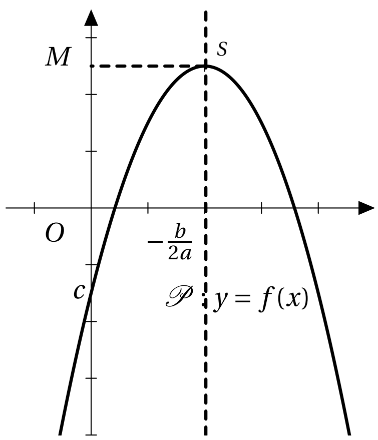
avec $m = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.



$\boxed{\text{a<0}}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

avec $M = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.



Démonstration : admise □

> **Définition 5**
> La courbe représentative d'une fonction trinôme s'appelle une parabole.

> **Propriété 8**
> Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$, et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique.
> - le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$;
> - dans un repère orthogonal, la parabole $\mathscr{P}$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$;
> - f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ en $-\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$, c'est un minimum ; si $a < 0$, c'est un maximum.

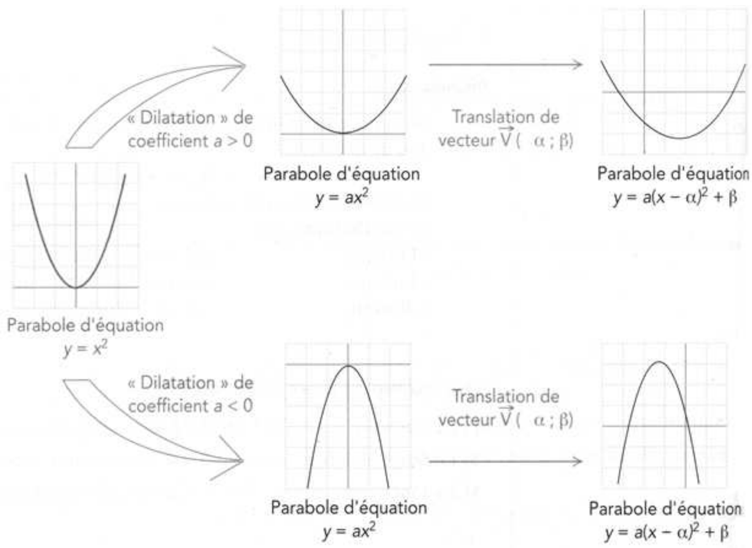
Démonstration : Conséquence directe de la propriété précédente. □

Remarques

— le sommet S de la parabole représentative de la fonction f a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$;

— autrement dit, β est l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$; il est atteint en α ;

— on peut interpréter géométriquement la forme canonique en observant comment la représentation graphique de la fonction f se déduit de celle de la fonction carré par « dilatation » de coefficient a et par translation de vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$.



II. Exemple : étude d'une fonction trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

— Déterminer les variations et l'extremum de f.
Soit x un réel, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 3$.
Le coefficient du terme de degré 2 est -2 qui est négatif, donc la fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Il est atteint en :
$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$,
et a pour valeur :
$f(-1) = -2\times(-1)^2 - 4\times(-1) + 3 = -2+4+3 = 5$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

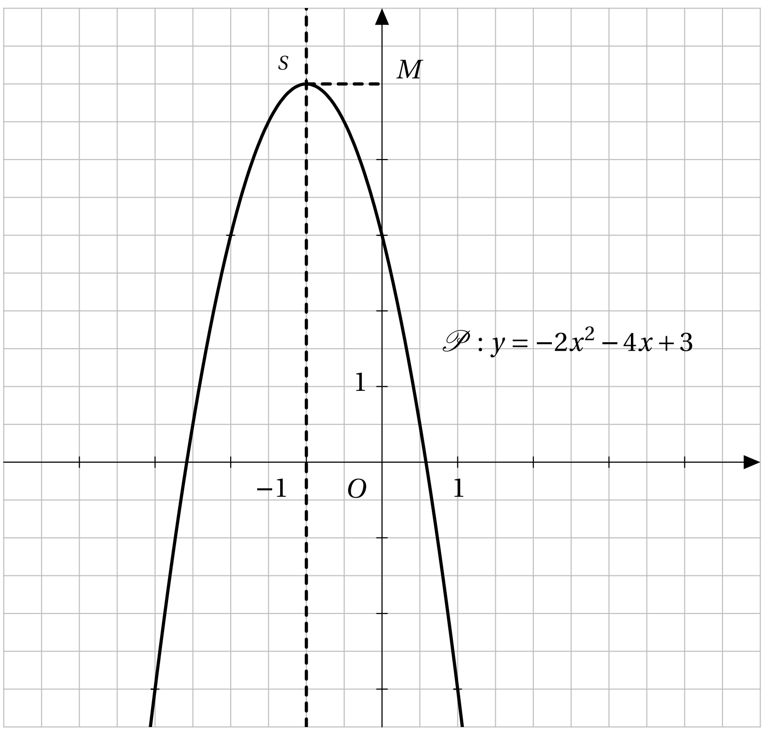
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

— Préciser l'axe de symétrie de la parabole représentant f.
D'après ce qui précède, la parabole représentant f admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

— Tracer cette parabole.
Méthode :

> — on place le sommet S de la parabole $\mathscr{P}$,
> — on trace l'axe de symétrie (d) de la parabole,
> — on calcule les coordonnées de quelques point de $\mathscr{P}$,
> — on place ces points et leurs symétriques par rapport à (d),
> — on trace une parabole passant par ces points,
> — on contrôle ses résultats à l'aide de la calculatrice.

$f(0) = 3$ et $f(1) = -3$, par conséquent les points de coordonnées $(0\,;\,3)$ et $(1\,;\,-3)$ appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$.



Exercices

Exercice 105.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :
   (a) $y = x^2 - 4x + 5$
   (b) $y = -(x+4)(x-2)$
   (c) $y = 3x^2 - 4$
   (d) $y = -x^2 + x$
2. Contrôler les résultats obtenus à la calculatrice.

Exercice 106. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'axe de symétrie de la parabole et en donner une allure :

(a) $y = 2x^2 - 1$
(b) $y = -2x^2 + 6x - 4$
(c) $y = (-2x+1)(-8x-4)$

Exercice 107. Tracer les paraboles d'équations :

(a) $y = x^2 - 4x + 5$
(b) $y = -2x^2 + 2x + 1$
(c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 2$
(d) $y = -x^2 + x$

Exercice 108. Tracer les paraboles d'équations :

(a) $y = \dfrac{x^2}{4} - x - 3$
(b) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{5}{2}$
(c) $y = 2(x-1)^2 + 2$
(d) $y = -\dfrac{1}{2}(x+4)(x-2)$.

Exercice 109. Sans développer, donner l'allure des paraboles :

(a) $\mathscr{P}_1 : y = x(-x+4)$
(b) $\mathscr{P}_2 : y = 2(x-1)^2 + 4$

Exercice 110.

1. Sans calculatrice, donner une allure possible de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -2x^2 - 4x + 8$.
2. Lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 - 4x + 8 = 0$.

Exercice 111. Soit $g(x) = 3(x-1)(x+3)$.

1. Donner l'expression développée de $g(x)$.
2. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{P}$ représentant g.
3. Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des abscisses.

Exercice 112 - Intersections.
Sur la calculatrice, tracer les courbes représentant les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6.$$

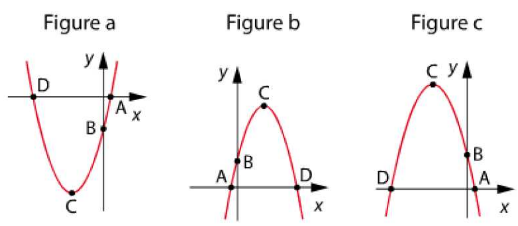
(a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
(b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $(x+3)(x-5) = 0$.
(c) En déduire les solutions exactes de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 113 - Paraboles en famille.
Pour tout réel m, on considère la parabole notée $\mathscr{P}_m$ d'équation $y = 2x^2 - 6mx + 12m$.

1. Écrire l'équation $\mathscr{P}_0$ ($\mathscr{P}_0$ désigne la parabole $\mathscr{P}_m$ obtenue pour $m = 0$) et la tracer sur votre calculatrice.
2. Tracer $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sur le même graphique.
3. Démontrer qu'un même point A appartient à toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$.

Exercice 114 - Sans calculatrice.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -(2x-1)(x+5)$.

1. Laquelle des courbes tracées ci-dessous peut représenter graphiquement la fonction h ?



2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D placés sur la figure.

Exercice 115 - Minimum ou maximum ?.
Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur de x il est atteint.

(a) $f(x) = 3x^2 + 4$

(b) $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$

(c) $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$

Exercice 116. Dresser le tableau de variation de la fonction :

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 6$

(b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$

(c) $k(x) = (x-1)(x+2)$

(d) $h(x) = 3x^2 - 3$

Exercice 117. Soit $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ pour tout x réel.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Calculer $f(2)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$.
4. Tracer la parabole représentant f.
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

Exercice 118 - Chercher l'intrus. Voici les tableaux de variation de trois fonctions.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	

Retrouver, parmi les expressions suivantes, une expression possible de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. Justifier.

(a) $5(x-1)(x-5)$

(b) $-x^2 + 6x - 1$

(c) $(7-x)(3-x)$

(d) $-(x+1)^2 + 3$

Exercice 119 - Coefficients du trinôme.
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-2	0	2	5	8
$f(x)$	13	1	-15	-23	-20	1

Sans calcul, mais en justifiant, donner la valeur de c, le signe de a puis celui de b.

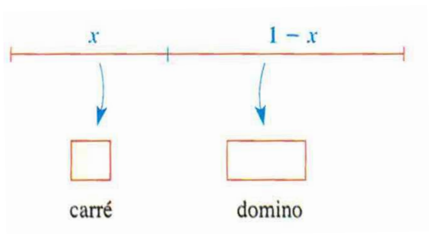
Fiche 3

Fonctions du second degré Problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation consiste à rendre optimale une certaine grandeur.
Il s'agit ici de se ramener à déterminer le maximum ou le minimum d'une certaine fonction trinôme, à l'aide des résultats dégagés dans ce chapitre : forme canonique, variations du trinôme.

Exercice résolu

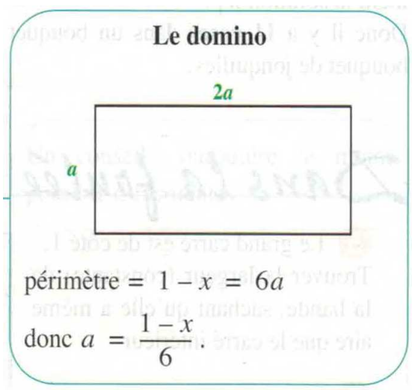
Énoncé du problème : Carré et Domino
On coupe une ficelle de 1 m de longueur pour entourer deux surfaces : un carré et un domino (rectangle deux fois plus long que large).



Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des deux aires soit minimale ? maximale ?

Recherche

Le choix de la variable semble être indifférent : nous pouvons prendre pour x la longueur entourant le carré (en mètre) ; $1-x$ est la longueur restante.
Ainsi, le côté du carré est $\frac{x}{4}$.
D'autre part, le rectangle est deux fois plus long que large, et son périmètre est $1-x$, donc ses dimensions sont $\frac{1-x}{6}$ et $\frac{1-x}{3}$. Nous pouvons donc exprimer l'aire de chaque figure et étudier la somme des aires.



Remarque
L'énoncé insinue que la fonction exprimant la somme des deux aires admet effectivement un maximum et un minimum. Ce n'est pas une évidence, et nous verrons d'ailleurs que si la ficelle est effectivement coupée, ce maximum n'existe pas (voir la conclusion et la remarque finale).

Solution rédigée

a) **Modélisation**

Notons x la longueur de ficelle (en mètre) entourant le carré.

Le carré a pour côté $\frac{x}{4}$, donc pour aire $\frac{x^2}{16}$ (en m^2).

Le rectangle a pour dimensions $\frac{1-x}{6}$ et $\frac{1-x}{3}$, donc son aire est $\frac{(1-x)^2}{18}$. Nous sommes-donc conduits à étudier le maximum et le minimum éventuels de la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{18}(1-x)^2 \text{ sur } [0\,;\,1].$$

b) **Traitement mathématique**

$f(x)$ est un polynôme ; après développement et réduction, on obtient :

$$f(x) = \frac{17}{144}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{18}.$$

Nous reconnaissons un trinôme du second degré ; avec $a = \frac{17}{144}$; $b = -\frac{1}{9}$ et $c = \frac{1}{18}$.

Comme $a > 0$, la fonction f admet un minimum.

Il est atteint en :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{9}}{2 \times \frac{17}{144}} = \frac{1}{9} \times \frac{144}{17} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{17},$$

et a pour valeur (après calculs) :

$$\beta = f(\alpha) = \frac{17}{144} \times \left(\frac{8}{17}\right)^2 - \frac{1}{9} \times \frac{8}{17} + \frac{1}{18} = \frac{1}{34}.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:

x	0		$\frac{8}{17}$		1
$f(x)$	$\frac{1}{18}$	$\searrow$	$\frac{1}{34}$	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$

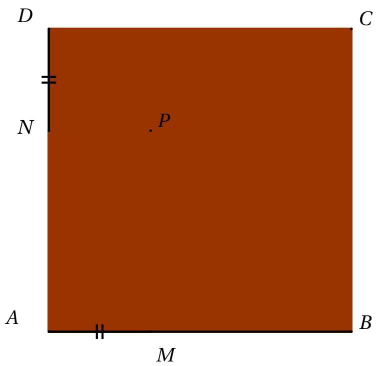
c) **Exploitation des résultats**

On déduit du tableau de variations que :

- La somme des aires est minimale lorsque $x = \frac{8}{17} \approx 0,47$ m, arrondi au centième.
- La somme des aires est maximale lorsque $x = 1$, c'est-à-dire lorsque la ficelle n'est pas coupée ; dans ce cas, seul le carré est formé.
  Si l'on impose que la ficelle soit effectivement coupée, alors $x \in]0\,;\,1[$, et la fonction f n'a pas de maximum sur $]0\,;\,1[$.

Exercices

Exercice 120 - Trouver une aire maximale.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$. P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.



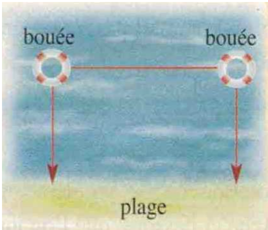
Objectif : trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.

1. Sur quel intervalle est définie la fonction f ?
2. Exprimer $f(x)$ puis vérifier que f est une fonction polynôme du second degré.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. (a) Déduisez-en la position de M pour laquelle l'aire de $AMPN$ est maximale, précisez la valeur de cette aire.
   (b) Quelle particularité présente alors le rectangle $AMPN$?

Exercice 121 - Optimiser une recette. Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance.
Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.
Il engage une campagne de promotion.

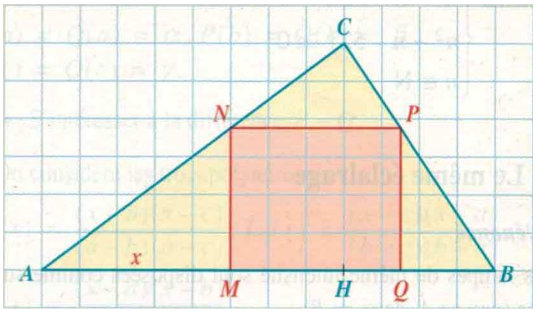
1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Que peut-on en penser ?
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimez en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifiez que :
   $$r(x) = -x^2 + 40x + 2100.$$
   (c) Donnez le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle $[0\,;\,70]$.
   (d) Déduisez-en la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

Exercice 122 - Baignade surveillée. Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.



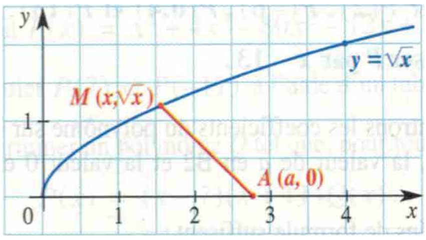
Déterminer les dimensions du rectangle, de sorte que l'aire de baignade soit maximale.

Exercice 123 - Le plus grand rectangle. Sur la figure ci-dessous, l'unité est le carreau. À tout point M du segment $[AM]$, tel que $AM = x$, on associe le rectangle $MNPQ$.



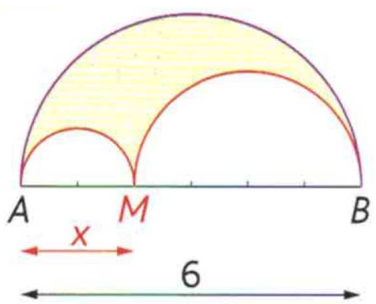
1. Exprimer MN en fonction de x ; en déduire QB, puis MQ en fonction de x.
2. Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ du rectangle est-elle maximale ?

Exercice 124. Soit a un réel tel que $a > \frac{1}{2}$.
Quelle est la plus courte distance du point $A(a, 0)$ à un point M situé sur la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$?



Indication : minimiser AM revient à minimiser AM^2.

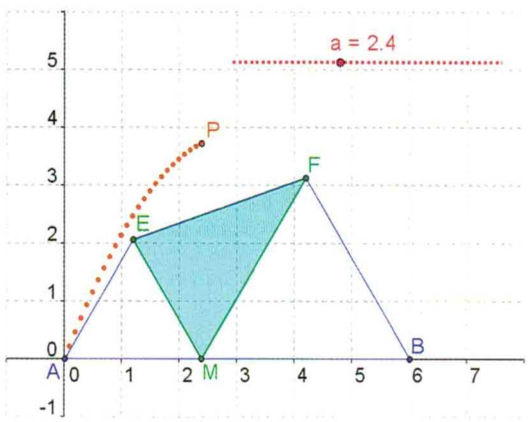
Exercice 125 - Arbelos d'Archimède. On appelle « arbelos d'Archimède »le domaine délimité par les trois demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$, comme sur la figure suivante.



On désigne par $\mathscr{P}(x)$ le périmètre de l'arbelos et par $\mathscr{A}(x)$ l'aire de l'arbelos.

1. Montrer que $\mathscr{P}(x)$ est constant pour $x \in [0 ; 6]$.
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \dfrac{\pi}{4}(6x - x^2)$, avec$x \in [0 ; 6]$.
3. Que vaut $\mathscr{A}(0)$? $\mathscr{A}(6)$?
4. En déduire que l'aire de l'arbelos est maximale pour une certaine valeur de x que l'on précisera.

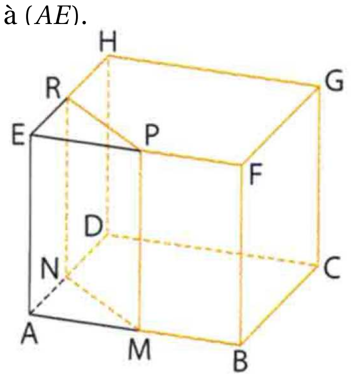
Exercice 126 - avec des triangles. Sur la capture d'écran ci-dessous, les triangles AME et MBF sont équilatéraux. On souhaite montrer qu'il existe une position du point M sur le segment $[AB]$ telle que l'aire du triangle EMF soit maximale. On fixe $AB = 6$.



1. Si possible, reproduire à l'aide du logiciel GeoGebra cette figure dans laquelle le point M a pour coordonnées $(a;0)$, a étant un curseur qui parcourt les nombres entre 0 et 6. Conjecturer le maximum de l'aire du triangle EMF.
2. En posant $x = AM$, exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du triangle EMF en fonction de x.
3. En déduire que cette fonction admet un maximum que l'on précisera.

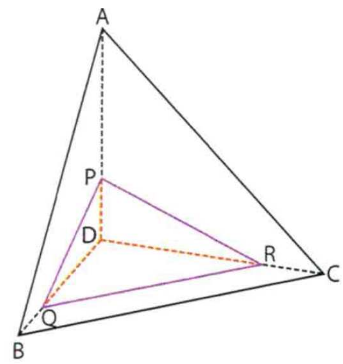
Indication : En prolongeant les droites (AE) et (BF), on comprend mieux les choses.

Exercice 127. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 8 cm. Pour tout point M de $[AB]$ on construit le point N de $[AD]$ tel que $DN = AM$. On note $x = AM$ (en cm). Les droites (MP) et (NR) sont parallèles à (AE).



1. Exprimer le volume $V(x)$ du solide $MBCDNPFGHR$ en fonction de x.
2. Justifier que V admet un minimum sur $[0 ; 8]$. Préciser ce minimum et pour quelle position de M il est atteint.

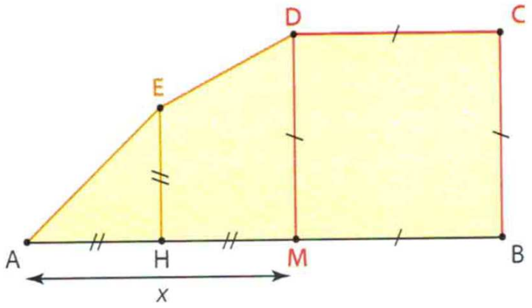
Exercice 128. On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que : - les arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$ sont de même longueur (6 cm) ; - les arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$ sont deux à deux perpendiculaires.
Sur ces arêtes $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$, on place les points P, Q et R tels que $DP = BQ = CR = x$(en cm).



On s'intéresse au volume $V(x)$ du tétraèdre $DPQR$.

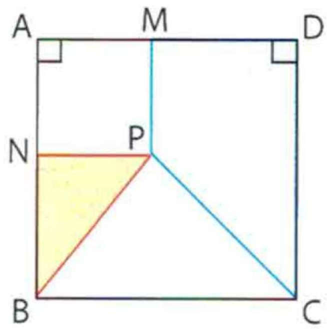
1. Exprimer, en fonction de x, l'aire de la base DQR et la hauteur DP du tétraèdre $DPQR$.
2. En déduire que $V(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$.
3. Démontrer que, pour tout x de $[0 ; 6]$,
$$V(x) - V(2) = \frac{1}{6}(x-8)(x-2)^2.$$
4. En déduire le volume maximal de $DPQR$.

Exercice 129. $[AB]$ est un segment de longueur 8 cm. M est un point variable de $[AB]$. On construit, suivant le schéma, le carré $MBCD$, le triangle rectangle isocèle AHE et le trapèze rectangle $HMDE$. On pose $AM = x$. On s'intéresse aux variations de l'aire de $ABCDE$.



1. Exprimer, en fonction de x, les aires de AHE, $HMDE$ et $MBCD$.
2. En déduire que l'aire du polygone $ABCDE$ est égale à : $x^2 - 14x + 64$.
3. On note $f(x)$ l'aire du polygone $ABCDE$. Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
4. Dresser le tableau de variation de f. Pour quelle valeur de x l'aire de $ABCDE$ est-elle minimale ? Quelle est la valeur de cette aire minimale ?

Exercice 130. $ABCD$ est un carré de côté 20 cm. M est point de $[AB]$ distinct de A et de D.



À partir de M, on construit le carré $ANPM$. Étudier les variations de l'aire coloriée lorsque M décrit le segment $[AB]$, $M \neq A$, $M \neq D$.

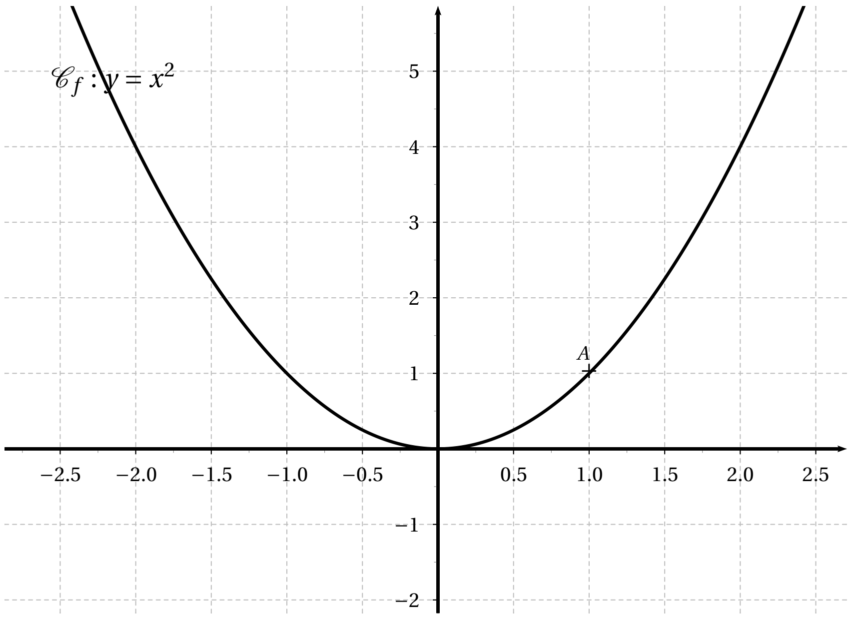
Chapitre 4

Fiche 1

Nombre dérivé
Activité d'introduction

I. Qu'est-ce qu'une tangente ?

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère de la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Soit A et M deux points distincts de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et $1+h$ où h désigne un réel non nul. La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et M.



I.1. Constater, conjecturer

À l'aide d'un logiciel, constater que la sécante (AM) admet une position limite (d) quand h se rapproche de 0. Quel semble être le coefficient directeur de la droite (d) ? Quelle semble être son équation réduite ?
La droite (d) s'appelle la **tangente à $\mathscr{C}_f$ en A**.

I.2. Comprendre

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AM).
2. De quel nombre se rapproche son coefficient directeur lorsque h se rapproche de 0 ?
3. De quel nombre se rapproche son ordonnée à l'origine lorsque h se rapproche de 0 ?

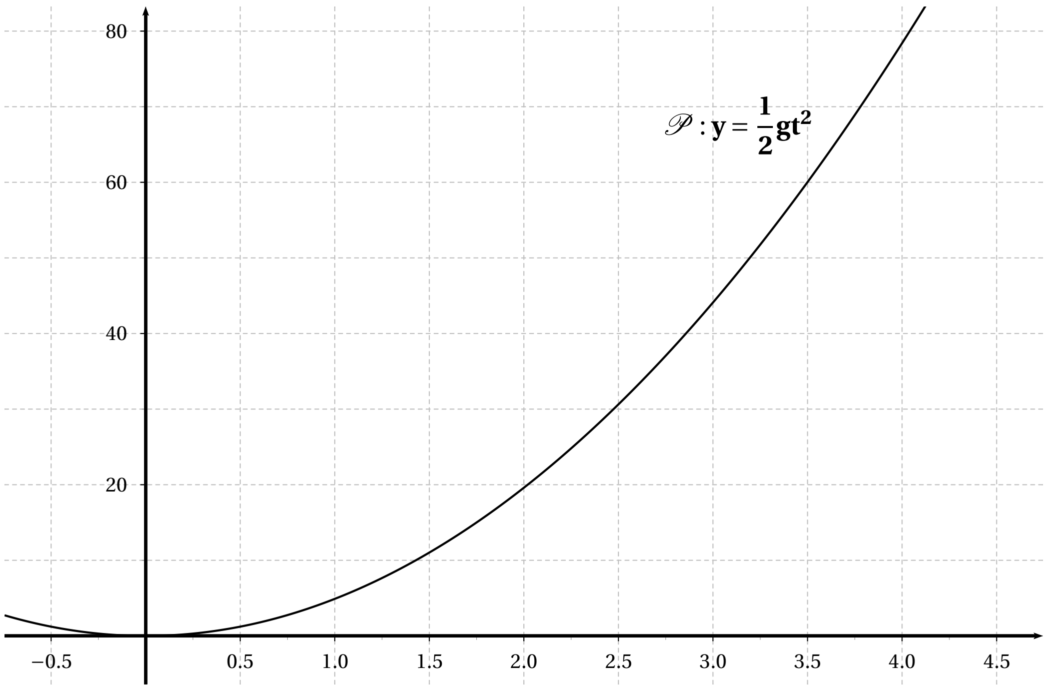
Ainsi, lorsque h se rapproche de 0, c'est-à-dire lorsque le point M se rapproche du point A :

— le coefficient directeur de la sécante (AM) se rapproche d'un nombre que l'on appelle le **nombre dérivé de la fonction f en x_A** et que l'on note $f'(x_A)$.

— la sécante (AM) se rapproche d'une droite (d) que l'on appelle la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A**.

II. Chute libre - Vitesse instantanée

On lâche une bille, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 80 mètres. Si l'on néglige les forces de frottement de l'air, la distance, en mètres, parcourue par cette bille après t secondes s'exprime par $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 9,8\text{m.s}^{-1}$. Soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative dans un repère de la fonction d .



1. À l'aide d'une calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction d pour t compris entre 0 et 5 (avec un pas de $0,1$). On ne demande pas de le recopier.
2. Calculer la vitesse moyenne de la bille (en m.s^{-1}) entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.
3. Soit M_1 le point de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 et M_3 celui d'abscisse 3. Quelle interprétation graphique peut-on donner du calcul donnant la vitesse moyenne entre les instants $t = 1$ et $t = 3$?
4. On cherche à déterminer la « **vitesse instantanée** » de la bille à l'instant $t = 1$. Pour cela, on évalue la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$ où h prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0. L'expression de cette vitesse moyenne est donc :
$$a(h) = \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1}.$$
   (a) Simplifier l'expression de $a(h)$.
   (b) Compléter le tableau suivant.

h	2	1	$0,01$	$0,01$	$0,001$
$a(h)$					

(c) Que penser des valeurs prises par $a(h)$ lorsque h se rapproche de 0 ?

On retiendra que cette valeur "limite" est appelée *vitesse instantanée* de la bille à l'instant $t = 1$.

5. Plus généralement, la vitesse instantanée de la bille à l'instant t_0 est la ***limite*** du quotient
$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}$$
***lorsque le nombre h se rapproche de* 0.**

   (a) Simplifier le quotient
$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}.$$

   (b) Démontrer que la vitesse instantanée à l'instant t_0 est donné par la formule :
$$v(t_0) = 9,8\,t_0.$$

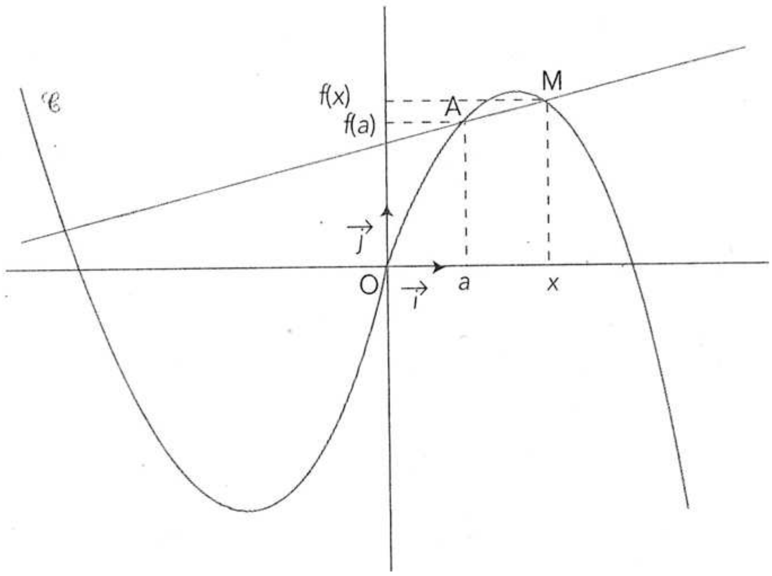
Fiche 2

Nombre dérivé
Taux de variation et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert.
On désigne par x et a deux réels distincts de I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

I. Sécantes à une courbe

Définition 6
La droite passant par deux points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ est appelée **sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et M**.



Définition 7
On appelle taux de variation -ou taux d'accroissement- de la fonction f entre a et x le nombre :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En posant $x = a + h$, on peut aussi l'écrire :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarques

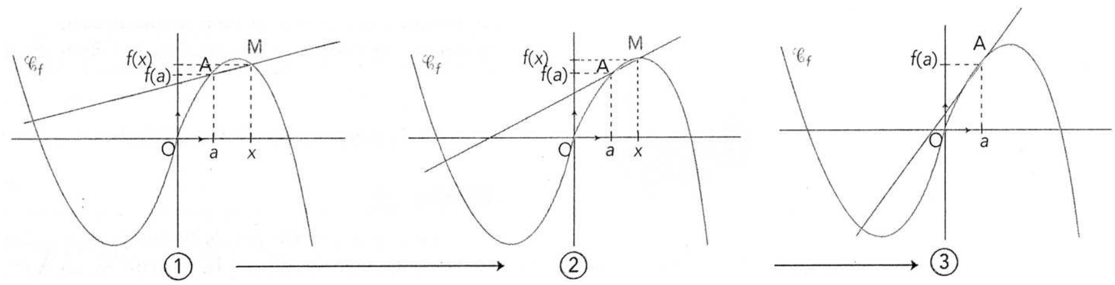
1. $x-a$ est l'accroissement de la variable entre a et x ;
   $f(x)-f(a)$ est l'accroissement de l'image entre a et x .
2. $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM). On peut le déterminer approximativement à l'aide du graphique.
3. Si la fonction f est croissante sur l'intervalle I, alors le taux d'accroissement de f entre a et x est positif.
   Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle I, alors le taux d'accroissement de f entre a et x est négatif.

II. Nombre dérivé d'une fonction

II.1. Approche intuitive

Si la sécante (AM) admet une droite (d), non parallèle à l'axe des ordonnées, pour position limite - c'est-à-dire vient se confondre avec (d) lorsque le point M de la courbe se rapproche de A, alors la droite (d) est dite **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A**.

Le coefficient directeur de la sécante se rapproche alors du coefficient directeur de la tangente (d) .



Autrement dit :
Lorsque l'on donne successivement à x des valeurs de plus en plus proches de a, le coefficient directeur de la sécante $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (appelé aussi taux d'accroissement de la fonction f entre x et a) se rapproche d'un nombre, que l'on note $f'(a)$.

On dit que le nombre $f'(a)$ est la **limite** de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **quand x tend vers a**.

En posant $x = a+h$ et en constatant que « x tend vers a » équivaut à « h tend vers zéro », le nombre $f'(a)$ est aussi la **limite quand h tend vers 0** du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ de la fonction f entre a et $a+h$.

On note :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition 8
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant le réel a. On appelle **le nombre dérivé de f en a**, s'il existe, le nombre :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple
Soit à calculer le nombre dérivé en 4, s'il existe, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

On calcule, pour $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre 4 et $4 + h$:

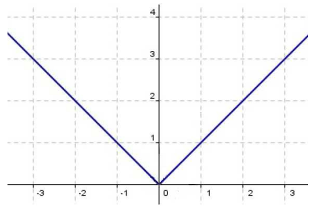
$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{(4+h)^2+2(4+h)-1-(4^2+2\times 4-1)}{h}\\ &= \frac{16+8h+h^2+8+2h-1-16-8+1}{h}\\ &= \frac{10h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(10+h)}{h}\\ &= 10+h\end{aligned}$$

Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\to 0}(10+h) = 10$.
Donc le nombre dérivé de f en 4 existe et vaut 10. On note $f'(4) = 10$.

Remarque
Il y a des fonctions pour lesquelles le nombre dérivé en un réel n'existe pas.

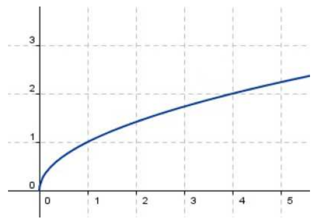
1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'admet pas de nombre dérivé en 0.
   En effet :
   - le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque $x_M < 0$ est -1 ;
   - le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque $x_M > 0$ est 1.

   On ne peut donc pas trouver de position limite aux sécantes (OM) quand M se rapproche du point O.

   Cela signifie que l'on ne peut pas trouver un nombre qui soit la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$ quand x tend vers 0. En effet : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = 1$.
   On dit que la courbe présente « un point anguleux » en O.

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'admet pas de nombre dérivé en 0.
   En effet le coefficient directeur des sécantes (OM) lorsque le point M se rapproche du point O tend vers $+\infty$.
   Cela signifie que l'on ne peut pas trouver un nombre qui soit la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ quand x tend vers 0.
   On dit que la courbe admet une tangente verticale au point O.

> **Définition 9**
> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.
> On dit que **la fonction f est dérivable en a** si le nombre dérivé de f en a existe.

Exemple
Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 3.
On calcule, pour $h \neq 0$ le taux d'accroissement de f entre 3 et $3 + h$:

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\ &= \frac{9+6h+h^2-9}{h}\\ &= \frac{6h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(6+h)}{h}\\ &= 6+h\end{aligned}$$

Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim_{h\to 0}(6+h)=6$.

Donc la fonction f est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Exercices

Exercice 131. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$ et h un nombre réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$.
2. Vérifier que $f(-2+h)=h^2-4h+1$.
3. Vérifier que le taux de variation entre -2 et $-2+h$ est égal à $h-4$.
4. En déduire que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$.

Exercice 132 - fonction affine.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-3$ et h un nombre réel.

1. (a) Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
   (b) Pour tout h non nul, vérifier que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à 2.
   (c) En déduire que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
2. Calculer $f'(-3)$.
3. Calculer $f'(a)$ pour a réel quelconque. Le résultat était-il prévisible ? Expliquer.

Exercice 133. On considère la fonction f définie pour tout x non nul par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Soit h un nombre réel non nul. Dans chaque cas, calculer et simplifier le taux de variation de f entre a et $a+h$ puis en déduire si f est dérivable en a et préciser, s'il existe, $f'(a)$.

(a) $a=-1$

(b) $a=0,1$

(c) $a=\dfrac{1}{4}$

(d) $a=\sqrt{2}$

Exercice 134. Soit h un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
2. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.

Exercice 135. Soit h un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x+5$.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$.
2. Montrer que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$.

Exercice 136. Dans chaque cas, montrer que la fonction f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $a=-1$;

(b) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ et $a=1$;

(c) $f(x)=x^3$ et $a=2$.

Exercice 137. Soit f la fonction définie sur pour tout x différent de -1 par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

1. Quelle est la valeur de $f(1)$?
2. Montrer que, pour tout réel h différent de -2, on a :
$$f(1+h)-f(1)=-\frac{h}{2(h+2)}.$$
3. En déduire le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, préciser $f'(1)$.

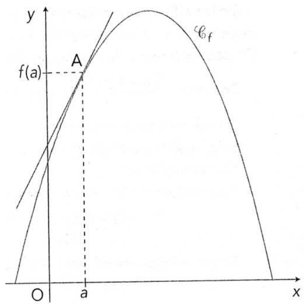
Exercice 138. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Montrer que f est dérivable en a quel que soit le réel a et déterminer $f'(a)$ pour tout réel a.

Fiche 3

Nombre dérivé
Nombre dérivé et tangente

Définition 10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a et dérivable en a. La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de $\mathscr{C}_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la **tangente en A à la courbe** $\mathscr{C}_f$.



Remarque
Dans certains cas, la position limite de la sécante (AM) est une droite (d), parallèle à l'axe des ordonnées. Alors le coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de la sécante (AM) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut en valeur absolue quand on donne à x des valeurs de plus en plus proches de a. Dans ce cas, la fonction n'admet pas de nombre dérivé en a, mais on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en A une tangente verticale, parallèle à l'axe des ordonnées. Cette tangente, comme toutes les droites parallèles à l'axe des ordonnées, n'a pas de coefficient directeur.

Exemple
La courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en $O(0\ ;\ 0)$ qui est l'axe des ordonnées.

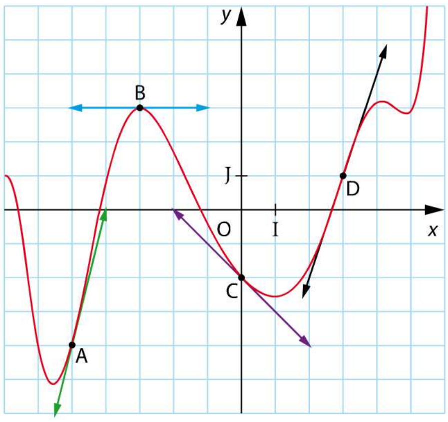
Propriété 9
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a et dérivable en a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration : Par définition, la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point A, d'abscisse a, a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduite est donc de la forme $y = f'(a)x + p$ où p est à déterminer.
Or $A(a; f(a))$ appartient à la courbe, donc :
$f(a) = af'(a) + p$.
Donc : $p = f(a) - af'(a)$.
Ainsi : (T) a pour équation $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$
soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

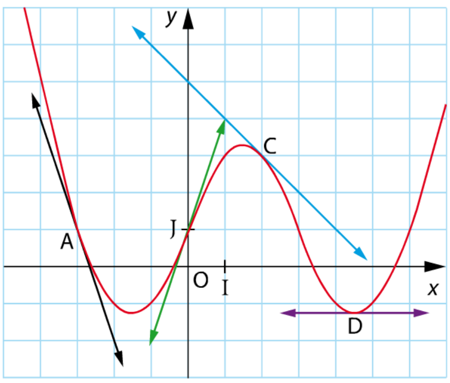
Exercices

Exercice 139. On a représenté la courbe d'une fonction f et certaines de ses tangentes.

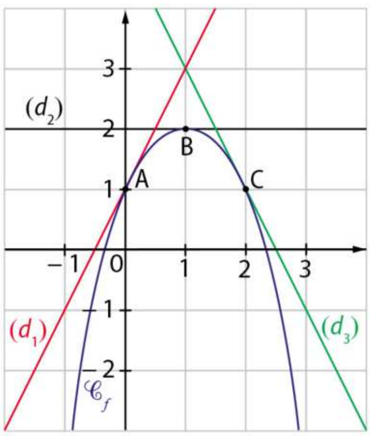


1. (a) Rappeler l'interprétation graphique de $f'(3)$.
   (b) Lire graphiquement $f'(3)$.
2. De même lire $f'(-5)$, $f'(-3)$ et $f'(0)$.

Exercice 140. La courbe ci-dessous représente une fonction g. Lire graphiquement $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(-3)$ et $g'(4,5)$.

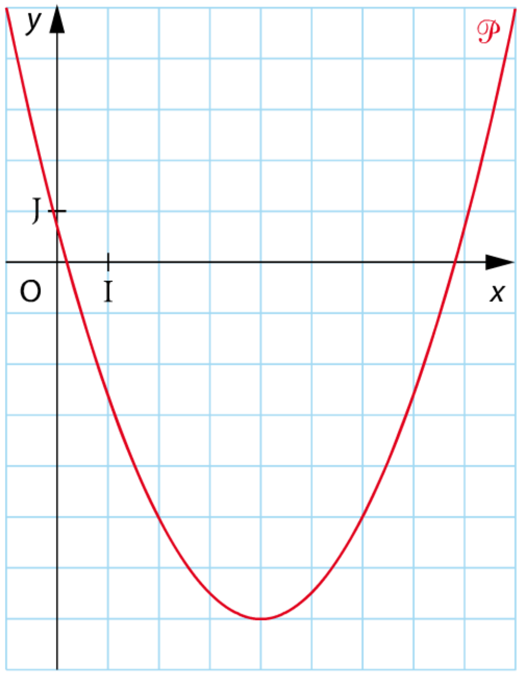


Exercice 141. La courbe de la fonction f ainsi que ses tangentes en A, B et C sont représentées ci-dessous.



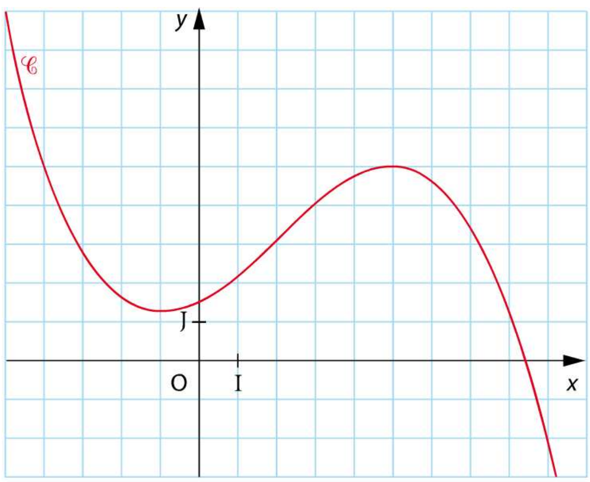
Lire la valeur des nombres dérivés de f en les abscisses respectives des points A, B et C.

Exercice 142. Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$ et sa courbe $\mathscr{P}$.



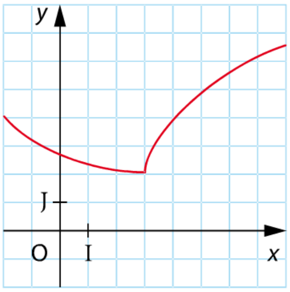
En posant votre règle sur la figure pour matérialiser des tangentes à la courbe, donner des valeurs approchées de $f'(2)$, $f'(4)$, $f'(6)$.

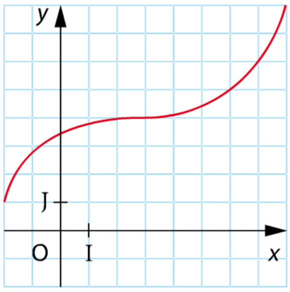
Exercice 143. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Déterminer graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a) = 0$.

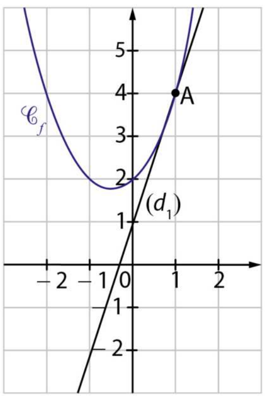
Exercice 144. Par lecture graphique, dire si les fonctions représentées ci-dessous sont dérivables en 3.





Exercice 145. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée ci-contre dans un repère. Le point A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1 et (d) la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

1. En utilisant la représentation graphique suivante, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.



2. En déduire l'équation réduite de la tangente (d) à $\mathscr{C}_f$ en A.

Exercice 146. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
2. On donne $f'(-2) = -4$. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2.

Exercice 147. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$ et sa courbe $\mathscr{P}$.

1. On donne $f'(2) = 4$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse 2.
2. Tracer $\mathscr{P}$ et (T_A) à la main.

Exercice 148. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et sa courbe $\mathscr{H}$.

1. On donne $f'(1) = -1$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{H}$ au point A d'abscisse 1.
2. Tracer $\mathscr{H}$ et (T_A) à la main.

Exercice 149. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et sa courbe $\mathscr{C}$.

1. On donne $f'(4) = \dfrac{1}{4}$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.
2. Tracer $\mathscr{C}$ et (T_A) à la main.

Exercice 150. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. Vérifier par le calcul que $f'(-1) = -4$ et que $f'(2) = 2$.
2. Déterminer l'équation réduite des tangentes (T) et (T') à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -1 et 2.
3. Construire $\mathscr{C}_f$ puis (T) et (T').

Fiche 4

Nombre dérivé
Nombre dérivé et calculatrice

OBJECTIFS

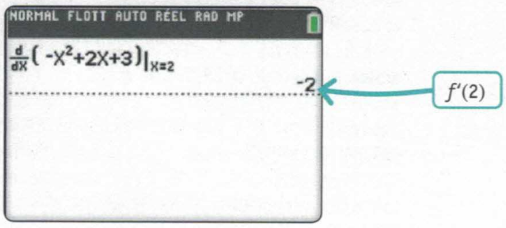
1. Afficher le nombre dérivé en 2 de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
2. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Trouver une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1.

I. Calculatrices TI

1 Afficher un nombre dérivé

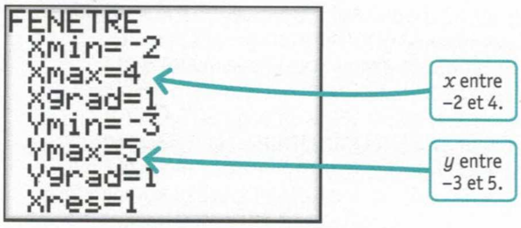
1. Se placer dans l'écran de Calcul :
- appuyer que la touche math,
- choisir l'option 8 : nbreDérivé(;
- valider par 8.

2. Compléter l'instruction en respectant le modèle : nbreDérivé(variable, fonction, valeur).
Valider par entrer.

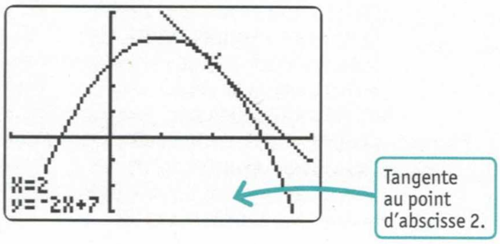


2 Tracer la tangente en un point

1. Se placer dans l'éditeur de fonctions $f(x)$.
- Saisissez l'expression de $f(x)$ dans Y1.
  Valider par entrer.
- Régler la fenêtre d'affichage en appuyant sur fenêtre.
  Paramétrer comme indiqué.



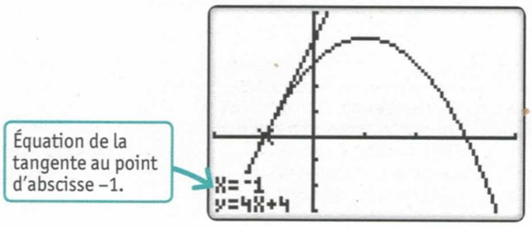
2. Se placer dans le module graphique graphe.
- Appuyer sur 2nde prgm (dessin).
- Sélectionner l'option 5 : Tangente(; valider par 5.
- Appuyer sur 2 puis validez par entrer.



③ Trouver une équation de la tangente en un point

1. Reprendre la configuration du paragraphe ② **2.**
Effacer la tangente tracée par :
2nde prgm (dessin) option 1 : EffDessin (1).

2. Procéder alors comme au paragraphe ② **2.**
- 2nde prgm (dessin) ;
- option 5 : Tangente(5 ;
- (-) 1 entrer.

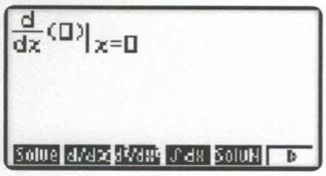


II. Calculatrices Casio

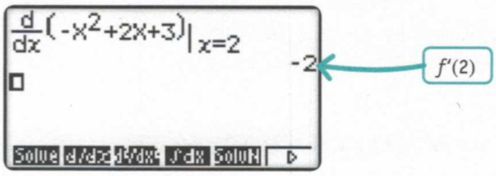
① Afficher un nombre dérivé

1. Sélectionner le menu RUN-MAT.
- Définir l'option de calcul.
  Appuyer sur OPTN F4 (CALC).
- Choisir le type : F2 (d/dx).

Aide d/dx est un symbole indiquant la dérivation.



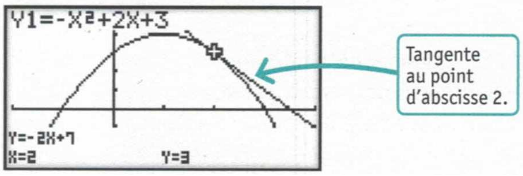
2. Compléter les informations demandées.
- Saisir l'expression de $f(x)$.
- Déplacer le curseur vers la droite à l'aide de la touche de direction puis saisir la valeur 2.
- Valider par EXE.



② Tracer la tangente en un point

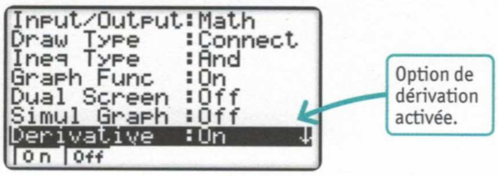
1. Sélectionner le menu GRAPH.
- Saisir l'expression de la fonction.
  Valider par EXE.
- Régler la fenêtre d'affichage en appuyant sur SHIFT F3 (V-Window).
  Paramétrer comme indiqué.

2. Aller dans le menu GRAPH puis faire afficher la courbe en appuyant sur F6 (DRAW).
- Sélectionner l'instruction Sketch (SHIFT F4) puis l'option Tang (F2).
- Déplacer le curseur à l'aide des touches de direction jusqu'à obtenir $x = 2$ puis valider par EXE.

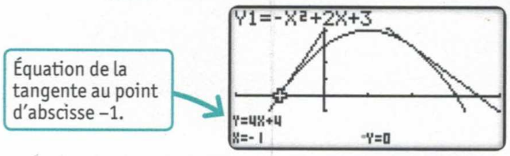


③ Trouver une équation de la tangente en un point

1. Vérifier que le réglage suivant est activé.
Pour cela, appuyer sur SHIFT MENU (SET UP).



2. Reprendre la configuration du ② **2.**
- Déplacer le curseur jusqu'à obtenir $x = -1$ puis valider par EXE.



Chapitre 5

Fiche 1

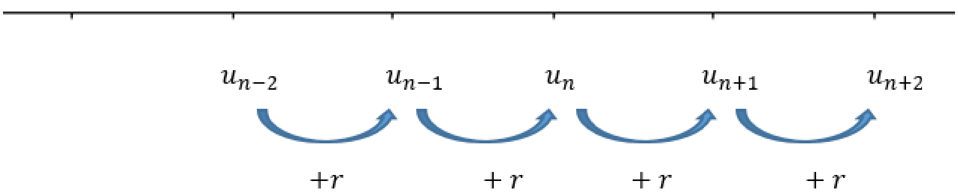
Suites arithmétiques
Définition et terme général

I. Définition

Définition 11
Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

La constante r s'appelle la **raison** de la suite.



Ainsi, dire qu'une suite est arithmétique signifie que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours une même constante.

Exemples

- La suite des multiples de 5 (0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; ...) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 0
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$. Cette suite est-elle arithmétique ?
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.
  Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.
- Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 5}{2} \end{cases}$; $n \geqslant 0$
  Cette suite est-elle arithmétique ?
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2v_n - 5}{2} - v_n = v_n - \dfrac{5}{2} - v_n = -\dfrac{5}{2}$
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \left(-\dfrac{5}{2}\right)$.
  Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = 7$.

On peut aussi voir directement que :
$v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 5}{2} = v_n - \dfrac{5}{2}$.

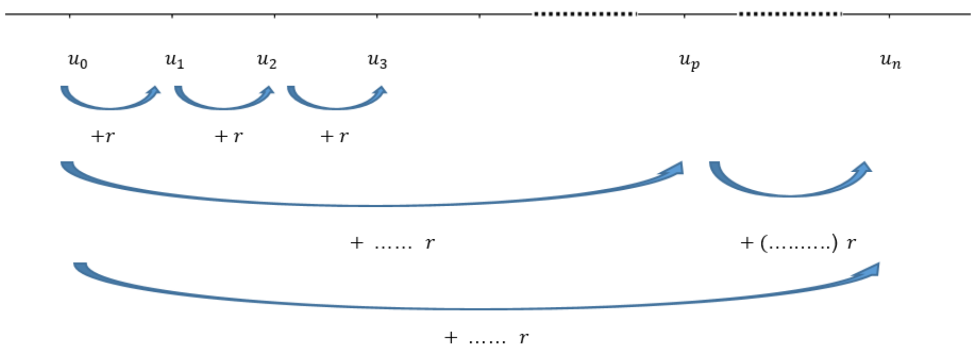
Méthode

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est une constante.
- Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, on exhibe deux différences de termes consécutifs qui ne sont pas égales (un contre exemple).

Exemple
Soit (w_n) la suite de terme général $w_n = n^2$. Cette suite est-elle arithmétique ?
On a :
$w_1 - w_0 = 1$
$w_2 - w_1 = 4 - 1 = 3$
Ainsi $w_{n+1} - w_n$ n'est pas constant,
donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

II. Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a :
$u_1 = u_0 + r$;
$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$;
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$;
...
et ainsi de suite.



Propriété 10

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,, $u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Réciproquement, si (u_n) est une suite telle que, il existe a et b réels tels que

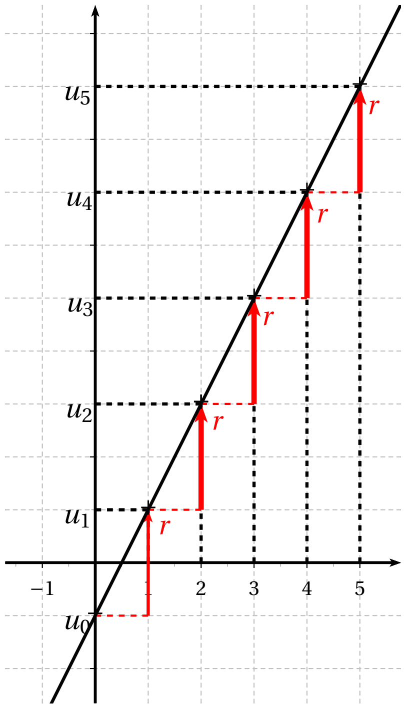
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = an + b,$$

alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et $b = u_0$.

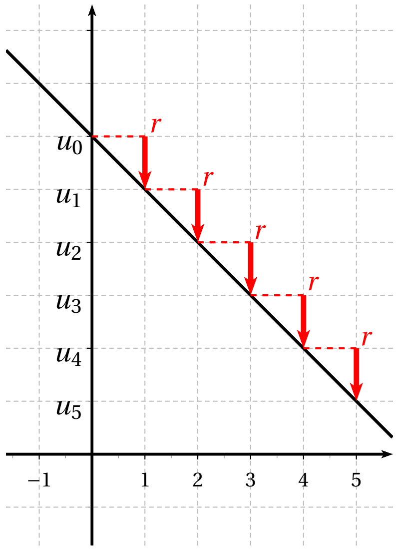
Démonstration : Admise □

Graphiquement, les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ appartiennent à la droite d'équation $y = u_0 + rx$. Son coefficient directeur est r.

Si $r > 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ est croissante : les termes sont de plus en plus grands.



Si $r < 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ est décroissante : les termes sont de plus en plus petits.



Exemples

- On considère les exemples précédents :
  - la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.
    Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an + b$, avec $a = 2$ et $b = 1$, la suite (u_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.
  - on a montré que la suite (v_n) définie par :
    $$\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 5}{2} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$
    est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = 7$.
    D'après la propriété précédente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{5}{2}n + 7$.
    Ainsi, on peut calculer un terme connaissant son indice :
    $v_{100} = -\dfrac{5}{2} \times 100 + 7 = -250 + 7 = -243$.
- On définit la suite arithmétique (w_n) telle que $w_3 = 17$ et de raison -2. Calculons w_{35}.
  On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_3 + (n - 3) \times r$; on a donc :
  $$\begin{aligned} w_{35} &= w_3 + (35 - 3) \times (-2) \\ &= 17 + 32 \times (-2) \\ &= 17 - 64 \\ &= -47 \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 151.
La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 :

a) en utilisant la définition d'une suite arithmétique,
b) en utilisant la formule du terme général.

Exercice 152.
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2. Calculer u_{50}.

Exercice 153.
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = -6$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 5$. Justifier que (u_n) est arithmétique puis calculer u_{20}.

Exercice 154.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique. Déterminer son premier terme et sa raison sachant que :

a) $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.
b) $u_{12} = 8$ et $u_4 = -12$.

Exercice 155.
Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est arithmétique de raison r.

a) $u_0 = 2$ et $r = -2$
b) $u_1 = -1$ et $r = 4$
c) $u_5 = 3$ et $r = 2$
d) $u_0 = 0$ et $r = 1$

Exercice 156.
Les suites (u_n) définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

a) $u_n = n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_n = 5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.
d) $u_n = \dfrac{n+2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 157.
Les suites (u_n) définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

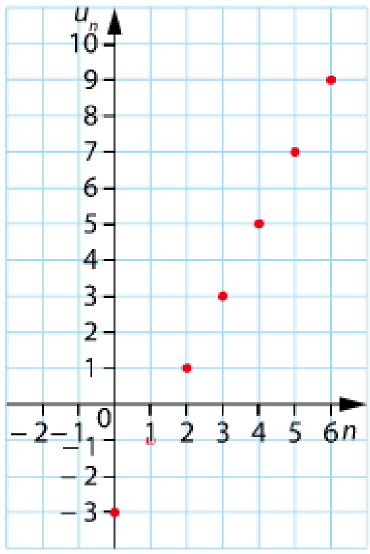
a) $u_n = -5n + 7$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_1 = 4$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + 4$.
c) $u_1 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

Exercice 158.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -2$.

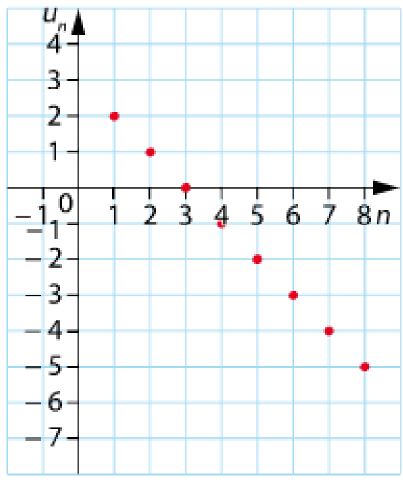
1. Représenter graphiquement dans le plan les dix premiers termes de cette suite.
2. Sur quelle courbe sont situés ces points ?

Exercice 159.
Les graphiques ci-dessous représentent des suites arithmétiques. Pour chacune, donner son premier terme, sa raison l'expression de u_n en fonction de n et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

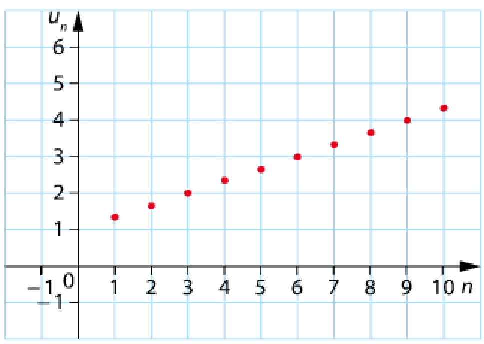
1.



2.



3.



Fiche 2

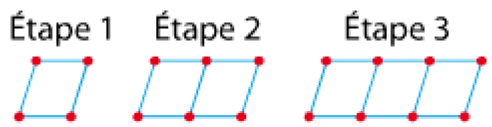
Suites arithmétiques
Situations modélisées par une suite arithmétique- suite auxiliaire arithmétique

I. Situations modélisées par une suite arithmétique

Exercice 160. Un coureur de fond est habitué à courir sur une distance de 10000 m. Pour s'entraîner pour un marathon, il décide d'augmenter chaque semaine sa distance d'entraînement de 1500 m. On note d_n la distance parcourue à l'entraînement la n-ième semaine. On pose $d_0 = 10000$.

1. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Que peut-on en déduire pour la suite (dn) ?
2. En déduire d_n en fonction de n.
3. Au bout de combien de semaines aura-t-il atteint ou dépassé les $42,195$ km d'un marathon ?

Exercice 161. On effectue les constructions suivantes :



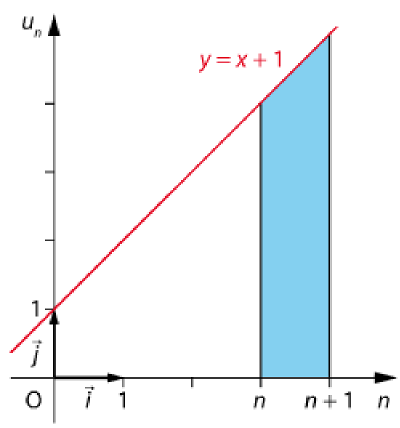
Soit b_n le nombre de billes et t_n le nombre de tiges utilisées à l'étape n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la nature des suites (b_n) et (t_n).
2. Exprimer b_n et t_n en fonction de n.
3. Si, à une étape, on utilise 625 tiges, combien de billes utilise-t-on à cette étape ?

Exercice 162. Un petit village en Chine surveille avec inquiétude l'avancée d'une dune de sable de plusieurs kilomètres de long. « Elle n'est plus aujourd'hui qu'à 200 m des premières maisons du village et avance à une vitesse moyenne de 8 mètres par an », explique un responsable du village en 2010. Pour $n \geqslant 0$, on note d_n la distance (en mètre) séparant le village de la dune l'année $(2010 + n)$. On suppose que la dune continue d'avancer à la même allure.

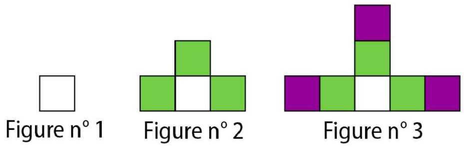
1. Justifier que la suite (d_n) est arithmétique.
2. Dans combien d'années le village sera-t-il atteint ?

Exercice 163. Pour tout entier naturel n, u_n est l'aire du trapèze coloré en bleu sur la figure ci-dessous.



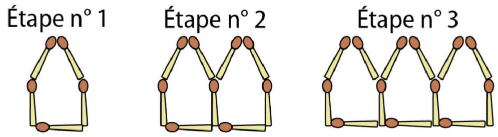
Exprimer u_n en fonction de n et vérifier que la suite (u_n) est arithmétique.

Exercice 164. On construit une succession de figures comme sur le schéma ci-dessous :



On suppose le procédé de construction est le même pour les figures suivantes. Combien de carrés constituent la figure n°100 ?

Exercice 165. On schématise avec des allumettes des maisons dont les murs sont mitoyens, comme ci- dessous :



Combien d'allumettes sont utilisées à l'étape n° 2020 ?

II. Suite auxiliaire arithmétique

Exercice 166. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

On admet que pour tout n entier naturel, $u_n > 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est elle arithmétique ?
3. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{6}$.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{1 + v_n}{v_n}$.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer une expression de u_{100}.

Exercice 167. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}.$$

On admet que pour tout n entier naturel, $u_n > 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est elle arithmétique ?
3. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison à déterminer et de premier terme à déterminer.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de vn.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer une expression de u_{100}.

Fiche 3

Suites arithmétiques
Somme des termes consécutifs

I. Somme des n premiers entiers non nuls

Propriété 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Posons $S_n = 1+2+\cdots+n$. On a :

$$S_n = 1+2+\cdots+n-1+n$$

$$S_n = n+n-1+\cdots+2+1$$

En additionnant les deux lignes , on obtient

$$2S_n = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)$$

Cette somme comporte n termes égaux à $n+1$. On a donc :

$$2S_n = n \times (n+1)$$

D'où

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple
Ainsi, la somme des entiers de 1 à 100 vaut :

$$S_100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

II. Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 12
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Et plus généralement, la somme de plusieurs termes consécutifs se calcule avec la formule suivante :

$$\text{Somme des termes} = \text{ nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2}$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= u_0 + u_0 + r + \cdots + u_0 + n \times r \\
&= \underbrace{u_0 + u_0 + \cdots + u_o}_{n+1 \text{ termes}} + r + 2r + \cdots + nr \\
&= u_0(n+1) + r(1+2+\cdots+n) \\
&= u_0(n+1) + r\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\left(u_0 + r\frac{n}{2}\right) \\
&= (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2} \\
&= (n+1)\frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \\
&= (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}
\end{aligned}$$

Exemple
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -10$ et de raison $r = 4$. Calculer la somme des 21 premiers termes de la suite.

Le premier terme de la suite est u_0 donc le 21e terme est u_{20}.
D'après la propriété, on a :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + ? + u_{20} &= (20+1) \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} \\
&= 21 \times \frac{u_0 + u_0 + 20 \times r}{2} \\
&= 21 \times \frac{-10 - 10 + 20 \times 4}{2} \\
&= 21 \times \frac{60}{2} \\
&= 21 \times 30 \\
&= 630
\end{aligned}$$

Remarque
On parle de suite arithmétique car le nombre u_n est la **moyenne arithmétique** du terme d'indice $n-1$ et du terme dindice $n+1$ de la suite :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

III. Exercices

Exercice 168. Sachant que $u_0 = 1$ et $r = 4$, calculer $u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

Exercice 169. Sachant que $u_0 = 2$ et $r = -3$, calculer $u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

Exercice 170. Sachant que $u_0 = 10$ et $r = -2$, calculer $u_3 + u_2 + ... + u_{100}$.

Exercice 171. Le nombre $S = 12 + 17 + ... + 67$ est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer S

Exercice 172. Le nombre $S = 100 + 102 + ... + 1000$ est la somme des nombres pairs de 100 à 1000. Calculer S.

Exercice 173. Combien de termes contient chacune des listes suivantes formées d'entiers consécutifs ?

a $1, 2, 3, \dots, 25$

b $0, 1, 2, \dots, 15$

c $5, 6, 7, \dots, 251$

d $2, 4, 6, \dots, 20$

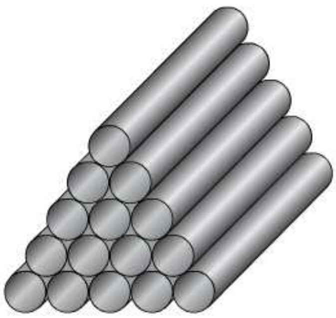
Exercice 174. Calculer les sommes.

a $A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 39$

b $B = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 24$

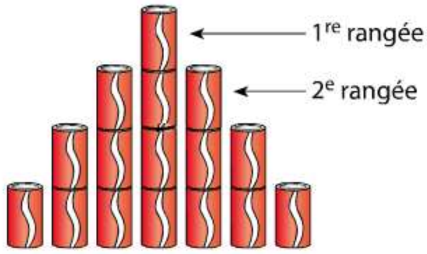
c $C = 100 + 101 + 102 + \cdots + 140$

Exercice 175. On empile des tuyaux cylindriques :



1. Combien de tuyaux pourra-t-on empiler de cette manière si la première rangée est formée :
   (a) de 10 tuyaux ?
   (b) de n tuyaux ($n \geqslant 2$) ?
2. On veut empiler 136 tuyaux. Combien de tuyaux doit comporter la première rangée ?

Exercice 176. On empile des canettes de la façon suivante :



1. On note r_n le nombre de canettes sur la n-ième rangée ($n \geqslant 1$). Quelle est la nature de la suite (r_n) ?
2. Écrire r_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre de canettes nécessaires pour réaliser un empilement analogue de 25 rangées.

Exercice 177. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
   (a) Exprimer S_n puis T_n en fonction de n.
   (b) Montrer que la suite (T_n) est arithmétique.

Chapitre 6

Fiche 1

Équations et inéquations du second degré
Résolution d'équations et factorisation

I. Définition

Définition 12
Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ le réel noté Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque
Δ est appelé discriminant du trinôme car son signe permet de faire une discrimination entre les équations selon leur nombre de solutions.

II. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Notons (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a vu chapitre 3 - Fiche 1 que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (E) &\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

On raisonne par disjonction des cas :

1^er^ cas : $\Delta < 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Par conséquent l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E) n'a pas de solution.
De plus, $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ ne peut pas se factoriser (s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré). (Sinon, l'équation aurait au moins une solution.)

2^e^ cas : $\Delta = 0$
On a alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ et donc

$(E) \iff \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$

Donc l'équation (E) a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

De plus, $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_0)^2$

3e cas : $\Delta > 0$

On a alors :

$$(E) \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$
$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$
$$\iff x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

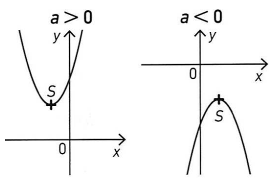
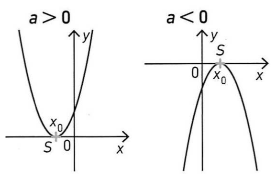
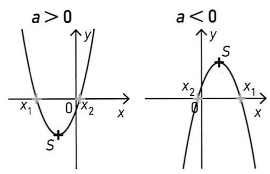
Donc l'équation (E) a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x-x_1)(x-x_2)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 13

Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. Le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ :

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de l'équation	pas de solution réelle	une solution « double » $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Représentation graphique	 la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses	 la parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point	 la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points
Forme factorisée du trinôme	pas de factorisation en produit de facteurs de degré 1	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

Démonstration : Voir ci-dessus □

III. Exemples

Résoudre les équations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 = 0$ (1)

On calcule le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28$

$\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$

Remarque : Penser à diviser les membres de l'équation si possible pour simplifier les calculs.

Ici, (1) $\iff x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times \dfrac{3}{2} = 7$

$\Delta > 0$, donc l'équation (1) a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} = 0$ (2)

On calcule le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 6 \times \dfrac{2}{3} = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$, donc l'équation (2) a une solution :

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

c. $x + 3x^2 = -1$ (3)

On a :

(3) $\iff 3x^2 + x + 1 = 0$

On calcule le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 = 1 - 12 = -11$

$\Delta < 0$, donc l'équation (3) n'a pas de solution.

d. $2x^2 - 5x = 0$ (4)

Il n'y a pas de terme constant : inutile de calculer le discriminant : on factorise !

On a :

$$\begin{aligned}(4) &\iff x(2x-5) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Donc l'équation (4) a deux solutions : 0 et $\dfrac{5}{2}$.

e. $x^2 + 3 = 0$ (5)

Il n'y a pas de terme de degré 1 : inutile de calculer le discriminant !

On a :

(5) $\iff x^2 = -3$

Donc l'équation (5) a n'a pas de solution.

On déduit des calculs précédents les factorisations suivantes :

$2x^2 - 2x - 3 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

$6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} = a(x - x_0)^2 = 6\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

$2x^2 - 5x = a(x - x_1)(x - x_2) = 2x\left(x - \dfrac{5}{2}\right)$

IV. Remarques

- Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est appelée racine ou zéro du trinôme.
- Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
- Si l'équation s'écrit $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$, il est inutile de calculer le discriminant (voir exemples d) et e).
- On peut bien sûr contrôler graphiquement les solutions trouvées avec la calculatrice ou un logiciel comme Geogebra.

Exercices

Équations du second degré

Exercice 178. Résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 - 12x + 18 = 0$
b) $x^2 - x + 6 = 0$
c) $3x^2 + 4x - 1 = 0$
d) $2x^2 - x + 1 = 0$

Exercice 179. Déterminer les racines des trinômes suivants.

a) $2x^2 + 3x - 2$
b) $3x^2 - 4x + 1$
c) $8x^2 - 2x - 1$
d) $\dfrac{1}{3}x^2 + x - 6$

Exercice 180. Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles d'équations suivantes avec l'axe des abscisses.

a) $y = x^2 - 4x + 3$
b) $y = 3x^2 + 2x + 3$
c) $y = -x^2 - 9x - 20$
d) $y = x^2 + 2x$

Exercice 181 - Avec ou sans discriminant.

1. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles que l'on peut résoudre sans utiliser le discriminant ?
   a) $x^2 + 6x = 0$
   b) $2x^2 - 2x + 6 = 0$
   c) $3x^2 + 4 = 0$
   d) $x^2 + 2x + 1 = 0$
   e) $2x^2 - 8 = 0$
   f) $(2x - 1)(x + 4) = 0$
   g) $3x^2 - 4x = 0$
   h) $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} = 0$
2. Résoudre toutes ces équations.

Exercice 182. Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3$
b) $(2x + 1)(x - 4) = x^2 - 4x - 6$
c) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 5x - 2$
d) $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6)$

Exercice 183. On considère la courbe $\mathscr{P} : y = x^2 + 3x + 3$ et la droite $(d) : y = x + 2$.

1. Représenter $\mathscr{P}$ et (d) sur le même graphique.
2. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 3 = x + 2$.
3. Résoudre cette équation et contrôler la cohérence des résultats obtenus.

Exercice 184. On considère les courbes $\mathscr{P} : y = x^2 - 4x$ et $\mathscr{P}' : y = 3x^2 + 4x - 2$.

1. À l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ et contrôler la cohérence des résultats obtenus.

Factorisation du trinôme

Exercice 185. Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a) $3x^2 - 6x - 9$
b) $-x^2 - 12x + 28$
c) $-x^2 + 5x - 10$
d) $3x^2 + \sqrt{2}x + 6$

Exercice 186. Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a) $x^2 - 4x - 1$
b) $x^2 - x - 6$
c) $3x^2 + 7x + 2$
d) $16x^2 + 24x + 9$

Exercice 187.

1. Factoriser, en un produit de trois polynômes de degré 1, le polynôme $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 9x$.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 188. Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Pour quelles valeurs de x est-elle valable ?

Fiche 2

Équations et inéquations du second degré Signe du trinôme - Résolution d'inéquations

I. Signe de ax^2+bx+c, $a \neq 0$

Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$,

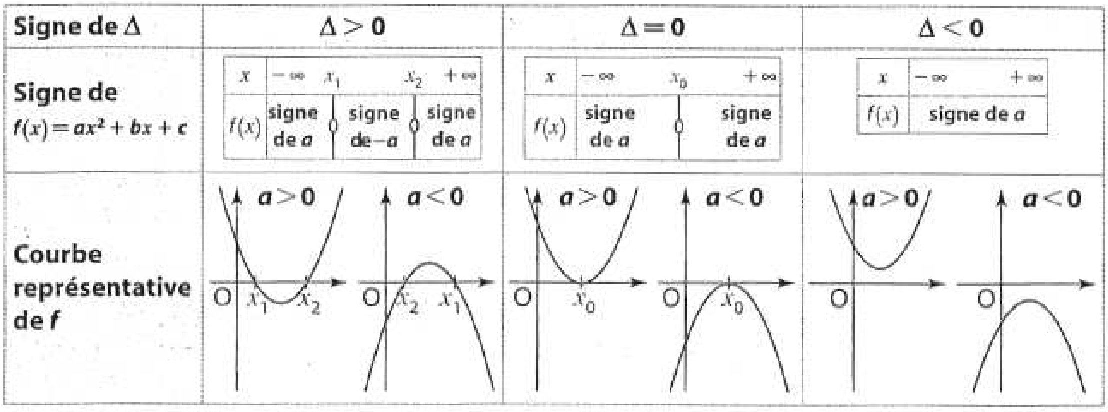
- Si $\Delta < 0$,
  on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

  L'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme.
  Ainsi, si $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Ainsi, en supposant que $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

D'où la propriété suivante :

Propriété 14
Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
Le signe de f est donné par les tableaux suivants :



Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de $-a$; 0 ; signe de a	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de a	x : $-\infty$; $+\infty$ $f(x)$: signe de a
Courbe représentative de f	$a > 0$: O, x_1, x_2 ; $a < 0$: O, x_2, x_1	$a > 0$: O, x_0 ; $a < 0$: O, x_0	$a > 0$: O ; $a < 0$: O

Démonstration : Voir ci-dessus. □

On peut retenir cette propriété en disant que :
« $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ **est toujours du signe de** $\boldsymbol{a}$**,sauf entre les racines,s'il y en a ».**

II. Exemples

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ (1)

On a démontré que le trinôme $2x^2 - 2x - 3$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $]-\infty\,;\, x_1] \cup [x_2\,;\, +\infty[$.

b. $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3} \leqslant 0$ (2)

On a démontré que le trinôme $6x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$ a une racine : $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2 - 4x + \frac{2}{3}$		$+$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

c. $3x^2+x+1>0$ (3)
On a démontré que le trinôme $3x^2+x+1$ n'a pas de racine.
De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+x+1>0$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est $\mathbb{R}$.

d. $-6x^2-10x+3<-4+x$ (4)
Soit $x \in \mathbb{R}$,
(4) $\iff -6x^2-11x+7<0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = 121+4\times 6\times 7 = 121+168 = 289 = 17^2$.
On a $\Delta>0$, donc le trinôme a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11-17}{-12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$,
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{11+17}{-12} = -\dfrac{28}{12} = -\dfrac{7}{3}$.
De plus le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2-11x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{7}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercices

Exercice 189.

1. Dresser les tableaux de signes des trinômes suivants.
   (a) $2x^2-5x+7$
   (b) $-x^2+6x+9$
   (c) $-4x^2-11x+3$
   (d) x^2+3x+5
2. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Exercice 190. Dresser les tableaux de signes des trinômes suivants.

a) x^2-4
b) $4x^2-8$
c) $(x-2)(x+3)$
d) $-3x^2+x+10$

Exercice 191 - Sans discriminant.
Résoudre les inéquations suivantes sans calculer de discriminant.

a) $x^2-1<0$
b) $4-2x^2 \leqslant 0$
c) $3x^2+4x \leqslant 0$
d) $x < \dfrac{1}{x}$

Exercice 192. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{2}x^2+3x-8>0$
b) $x^2+3x-5<x+4$
c) $2(x+1)^2-3x>2$
d) $3x+\dfrac{1}{2x} \leqslant \dfrac{5}{2}$

Exercice 193 - Position relative de courbes.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2+5x+\frac{7}{2} \text{ et } g(x) = -x^2-3x.$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$.
2. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
3. Contrôler graphiquement ces résultats.

Exercice 194 - Fonction bornée.
Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)<5$ et $f(x)>-6$.

3. En déduire quelles valeurs de y_{min} et de y_{max} choisir pour tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.

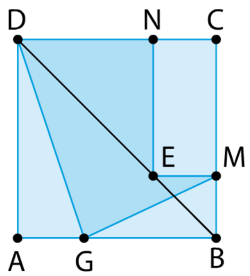
Exercice 195. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

1. Lire sur la calculatrice le signe de $g(x)$.
2. (a) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = (x-1)(ax^2 + bX + c)$.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 196. Soit f définie par $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$ pour tout $x > 0$.

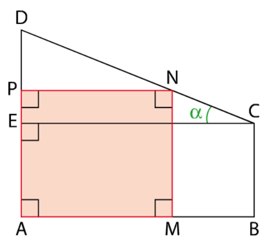
1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 8$.
2. Quel est le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$?

Exercice 197. $ABCD$ est un carré de côté 6 cm et E un point de la diagonale $[BD]$. G est un point de $[AB]$ tel que $AG = 2$ cm. M et N sont les projetés orthogonaux de E sur $[BC]$ et $[CD]$.



On pose $EM = x$. Pour quelles valeurs de x l'aire de $DNEMG$ est-elle supérieure à la moitié de celle du carré ?

Exercice 198. On souhaite poser des panneaux solaires sur un toit qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère $ABCD$. Les panneaux solaires occuperaient le rectangle $MAPN$. On a $AM = 8$ m, $AD = 7$ m et $CB = 3$ m.



On note h la longueur AP en m et $\mathscr{A}(h)$ l'aire du rectangle $MAPN$ en m^2.

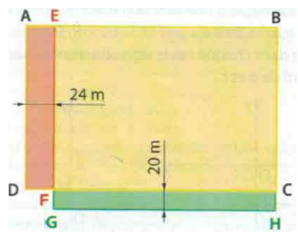
1. Calculer $\tan\alpha$.
2. En déduire que $PN = 14 - 2h$.
3. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(h)$ du rectangle $MAPN$ en fonction de h. Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\mathscr{A}$.
4. Comment doit-être h pour que $\mathscr{A}(h) \geqslant 24$ m^2 ?
5. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$ et donner l'aire maximale de $MAPN$.

Exercice 199 - Carrés Imbriqués.
Dans un carré de 10 cm de côté, on a colorié une bande de largeur x cm et un carré de côté x centré comme sur la figure suivante.

Déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire de la partie colorée est inférieure à l'aire de la partie blanche.

Exercice 200. On doit partager de manière égale une somme de 30 000 € entre un certain nombres de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacun serait augmentée de 1 250 €. Combien sont-ils ?

Exercice 201 - Remembrement.
Un agriculteur, propriétaire d'un champ rectangulaire $ABCD$ d'une superficie de 4 ha 32 a. doit dans le cadre d'un remembrement, céder une bande $AEFD$ de largeur 24 m et recevoir en échange une bande $FCHG$ de largeur 20 m de façon à conserver la même superficie.



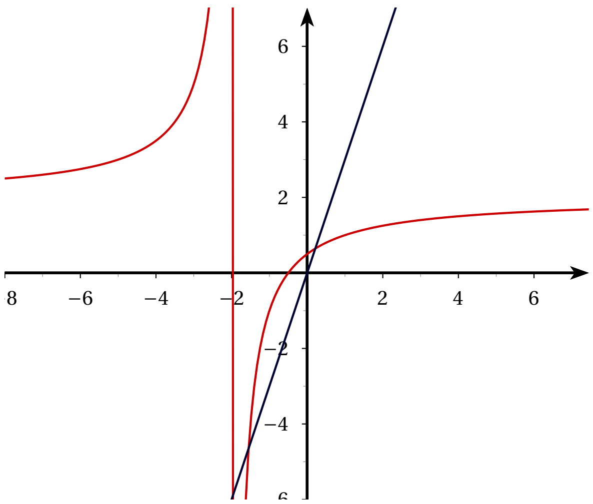
Quelles étaient les dimensions initiales de son terrain ?
On rappelle que 1 ha = 100 a et que 1 ha = 10000 m^2

Exercice 202. L'aire d'un tringle rectangle est 429 cm^2 et son hypoténuse a pour longueur 72,5 cm. Quel est son périmètre ?

Fiche 3

Équations et inéquations du second degré Inéquations du second degré

Exercice 203. Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 3x$, voici ce que propose Nathalie :
« *Je multiplie par $x+2$: $2x+1 \leqslant 3x^2+6x$. Je regroupe dans un même membre : $-3x^2-4x+1 \leqslant 0$. Je calcule le discriminant $\Delta = 16+12 = 28$. Je calcule les racines :*
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$
et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$.
Comme $a = -3$, l'ensemble des solutions est $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\,;\,+\infty\,;\right[$. »
Son voisin Olivier commence par observer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ et $x \mapsto 3x$



1. En quoi l'observation d'Olivier n'est-elle pas compatible avec le raisonnement de Nathalie ?
2. Où est l'erreur commise par Nathalie ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée.

Exercice 204. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2}{x+2} > 1$
2. $\dfrac{-3x+1}{2-x} \geqslant \dfrac{-4x+5}{x+3}$

Exercice 205.
1. Tracer avec la calculatrice les courbes des fonctions carré et inverse.
2. Conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < \dfrac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer des réels b et c tels que pour tout réel x,
$$x^3-1 = (x-1)(x^2+bx+c).$$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 206. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x^2+15x-18)(x^2+12x+36) > 0$
2. $(x^2-x-2)(9x^2-9x-54) < 0$

Exercice 207. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $1-2x \leqslant \dfrac{3}{x+2}$
2. $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x+2}$
3. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{2x-1}{x+3}$

Exercice 208. Déterminer le signe de sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante :

1. $f\,:\,x \mapsto x-2+\dfrac{1}{x+3}$
2. $f\,:\,x \mapsto x-6+\dfrac{1}{x-4}$
3. $f\,:\,x \mapsto x-3+\dfrac{2x-7}{x-1}$

Fiche 4

Équations et inéquations du second degré Équations se ramenant à des équations du second degré - Approfondissements

Exercice 209. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2. $x^4 + x^2 - 2 = 0$
3. $6x - 13\sqrt{x} - 5 = 0$

Aide : On pourra effectuer un changement d'inconnue pour se ramener à des équations du second degré. $X = x^2$ pour 1 et 2 et $X = \sqrt{x}$ pour 3.

Exercice 210. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $10x^3 + 12x^2 - 14x = 0$
2. $7x + \dfrac{4}{x} - 1 = 0$
3. $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-1}{2x}$
4. $7x + \dfrac{4}{x} - 1 = 0$
5. $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x+5}{x-3}$
6. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{6}{x^2} = 0$

Exercice 211.
On considère l'équation $\sqrt{x-1} = x - 2$ (E)

1. Justifier que l'équation $\sqrt{x-1} = x-2$ est équivalente à $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-2 \geqslant 0 \\ (x-1) = (x-2)^2 \end{cases}$
2. En utilisant la question précédente résoudre (E).

Exercice 212. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} = x+2$
2. $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{2}x$
3. $\sqrt{x^2+9} = 1 - x$
4. $\sqrt{9-x^2} = 1 - x$
5. $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x+2}$
6. $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x+2}$

Exercice 213.
On considère l'équation $x^2 + x - 4 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$ (E)

1. Quels sont les intervalles sur lesquels on doit résoudre cette équation ?
2. Posons $X = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer X^2.
3. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $\begin{cases} X^2 + X - 6 = 0 \\ X = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
4. Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$ puis en déduire les solutions de (E).

Fiche 5

Équations et inéquations du second degré Racines de trinômes - Cas particuliers

I. Discriminant réduit

Propriété

Propriété 15
On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels, $a \neq 0$.
Si b est pair, i.e. si $b \in \mathbb{Z}$ et s'il existe $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2b'$, alors on appelle **discriminant réduit** du trinôme le nombre $\Delta' = b'^2 - ac$.
On a alors :

- si $\Delta' < 0$, alors le trinôme n'a pas de racine.
- si $\Delta' = 0$, alors le trinôme a une racine double : $-\dfrac{b'}{a}$.
- si $\Delta' > 0$, alors le trinôme a deux racines : $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exercice 214 - démonstration de la propriété.

1. Soit Δ le discriminant du trinôme, montrer que $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4}$.
2. Montrer que :
   (a) $-\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{b}{2a}$.
   (b) $\dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 215 - Application.
Résoudre les équations suivantes en utilisant le discriminant réduit.

a) $5x^2 + 4x - 7 = 0$
b) $12x^2 - 12x + 3 = 0$
c) $-8x^2 + 6x - 3 = 0$

II. Somme et produit de racines

II.1. Propriété

Propriété 16
Lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par les relations :

$$S = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}$$

.

Démonstration :

- Si les deux racines sont confondues : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, donc $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{b^2}{4a^2}$;
  or, dans ce cas, $b^2 - 4ac = 0$, donc $P = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
- Si les deux racines sont distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Alors $x_1 + x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})+(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$,
  et $x_1 x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{a}{c}$. □

Exemple
Résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

« À vue » $x_1 = 1$ est solution de l'équation puisque $2 - 5 + 3 = 0$.
On dit que x_1 est une solution évidente.
L'autre solution x_2 vérifie donc $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$, d'où $x_2 = \frac{3}{2}$.

Exercice 216.
Résoudre chaque équation après avoir « deviné » une solution (racine évidente)

(1) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

(2) $-7x^2 - 6x + 1 = 0$

(3) $\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$

(4) $x^2 - x - 6 = 0$

II.2. Application

Propriété 17
Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration :

Si x_1 et x_2 vérifient : $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$, alors :
$P = x_1 x_2 = x_1(S - x_1) = -x_1^2 + Sx_1$, donc $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$.
Cela montre que x_1 est solution de $x^2 - Sx + P = 0$. De même pour x_2.

Réciproquement, si x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors, d'après la propriété ci-dessus, $x_1 + x_2 = \dfrac{S}{1} = S$ et $x_1 x_2 = \dfrac{P}{1} = P$. □

Exemple
Trouver, s'ils existent, deux réels dont la somme est 6 et le produit est 1.

S'ils existent, ces nombres sont solutions de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.
Le discriminant vaut : $\Delta = 36 - 4 = 32$. $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{6+\sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Les nombres cherchés sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

Exercice 217.
Écrire une équation de la forme $x^2 + px + q = 0$ dont les solutions soient :

a) 2 et 3
b) $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{3}$
c) 4 et $\dfrac{1}{4}$
d) $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3} - 1$ et $\sqrt{3} + 1$

Exercice 218.
Déterminer, s'ils existent, deux réels u et v connaissant leur somme S et leur produit P dans les cas suivants .

a) $S = 1$ et $P = 1$
b) $S = -6$ et $P = 9$
c) $S = -7$ et $P = -10$

Exercice 219.
Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle dont l'aire est 126m^2 et le périmètre 50m.

Chapitre 7

Fiche 1

Fonctions dérivées
Fonctions usuelles

I. Définitions

Définition 13
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que **f est dérivable sur I** lorsque, pour tout $x \in I$, f est dérivable en x.

Définition 14
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

Soit x un réel, h un réel non nul.
Déterminons le taux de variation de f entre x et $x+h$.
$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
On a donc :
$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$.
Or, ce taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h \to 0}(2x+h) = 2x$.

Donc la fonction f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$.
Autrement dit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2x$.

La proposition suivante sera utilisée pour établir certaines formules de fonctions dérivées.

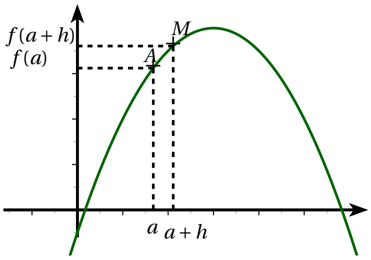
Propriété 18
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a.
Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Démonstration : Admise. □

Remarques

1. $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ est équivalent à $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. Ce théorème signifie que si f est dérivable en un réel a, alors lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, le nombre $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.



3. La réciproque de ce théorème est fausse : nous avons vu que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 ; cependant $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$.

II. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 19
Le tableau suivant indique les fonctions dérivées des principales fonctions usuelles.

Ensemble de définition de f	f est définie par	f est dérivable sur (ensemble de dérivabilité de f)	f' est définie par
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$[0\,;\,+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration : La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^n$ est admise ; les autres sont démontrées dans la partie exercices. □

Exemple
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Calculer $f'(2)$. En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction usuelle.
Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.
On a donc, en particulier $f'(2) = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$.
De plus, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$,
c'est-à-dire : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$
qui est équivalente à $y = 12(x-3) + 8$
qui est équivalente à $y = 12x - 36 + 8$
soit $y = 12x - 28$.

Exercices

Exercice 220. Soit k un réel, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = 0$.

Exercice 221. Soit a et b deux réels, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = a$.

Exercice 222. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout réel x non nul, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 223. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 224. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(a)$.

1. $f(x) = x^2$ et $a = -5$;
2. $f(x) = x^3$ et $a = \frac{1}{2}$;
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$;
4. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 3$.

Fiche 2

Fonctions dérivées
Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 20
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

1. Si k est un réel, la fonction ku est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (ku)'(x) = ku'(x).$$
On écrit : $(ku)' = ku'$.
2. La fonction $u+v$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$
On écrit : $(u+v)' = u' + v'$.
3. La fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ (u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
On écrit :$(uv)' = u'v + uv'$.
4. Si la fonction u ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$
On écrit : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
5. Si la fonction v ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et :
$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$
On écrit : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
6. Si a et b sont deux réels, la fonction $w : x \longmapsto u(ax+b)$ est définie et dérivable sur l'ensemble K des réels x tels que $ax + b \in I$ et :
$$\text{pour tout } x \in K,\ w'(x) = au'(ax+b).$$

Démonstration : Voir partie exercices. □

Exemples
Dans chacun des cas suivants, déterminons le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculons sa dérivée.

1. $f(x) = 12\sqrt{x}$; $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
   - **dérivabilité** :
   La fonction f est le produit de la fonction racine carrée par la constante 12, or la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, f est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- **calcul de la dérivée** :
  Pour tout réel x, $f'(x) = 12 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

2. $f(x) = x^2 + x$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x, $f'(x) = 2x + 1$.

3. $f(x) = 2x\sqrt{x}$; $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le produit des fonctions u et v avec :
     - $u : x \longmapsto 2x$; dérivable sur $\mathbb{R}$
     - $v : x \longmapsto \sqrt{x}$; dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

     f est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x > 0$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
     Donc :
     $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \\ &= 3\sqrt{x}. \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est l'inverse de la fonction u avec $u : x \longmapsto x^2 + 1$.
     La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, avec $u'(x) = 2x$.
     Donc : $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\mathbb{R}brace$
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le quotient des fonctions u et v avec :
     - $u : x \longmapsto \sqrt{x}$; dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$
     - $v : x \longmapsto x - 1$; dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\mathbb{R}brace$

     f est donc dérivable sur $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$.
     Donc :
     $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(2\sqrt{x}(x-1) - \sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

6. $f(x) = \sqrt{3x-1}$; $x \in \left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   - **dérivabilité** :
     Soit $x \geqslant \frac{1}{3}$, $f(x) = u(3x-1)$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{x}$.
     La fonction u est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sur l'ensemble des réels x tels que $3x-1>0$, c'est-à-dire sur $\left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout $x > \frac{1}{3}$, $f'(x) = 3u'(3x-1)$, avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
     Donc : $f'(x) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

Propriété 21
Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Conséquence directe des points 1 et 2 de la propriété précédente. □

Propriété 22
Soit u et v deux fonctions polynômes. Alors la fonction $\frac{u}{v}$, appelée **fonction rationnelle**, est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration : Conséquence directe de la propriété 21 et du point 5 de la propriété 20. □

Exemples
Dans chacun des cas suivants, déterminons le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculons sa dérivée.

1. $f(x) = -2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 12$; $x \in \mathbb{R}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - **calcul de la dérivée** :
     Pour tout réel x,
     $$f'(x) = -2 \times 3x^2 + \frac{5}{2} \times 2x - 1$$
     $$= -6x^2 + 5x - 1.$$

2. $f(x) = \frac{x}{x+3}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
   - **dérivabilité** :
     La fonction f est le quotient des polynômes u et v avec :
     - $u : x \longmapsto x$
     - $v : x \longmapsto x+3$

     f est donc une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

- **calcul de la dérivée** :
  Pour tout $x \neq -3$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
  Donc :
  $$f'(x) = \frac{1(x+3) - x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}.$$

Exercices

Dérivées et opérations

Exercice 225. Somme On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$
3. $f(x) = x^3 + x$
4. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} + 3$

Exercice 226. Produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 4x$
2. $f(x) = 5x^2$
3. $f(x) = -3\sqrt{x}$
4. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

Exercice 227. Somme et produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = 2x + 1$
3. $f(x) = -4x + 6$
4. $f(x) = 2x^2 - 5x$
5. $f(x) = -x + 4$
6. $f(x) = 3x^5 - 2x^2$
7. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x$
8. $f(x) = -x^3 + x^2\sqrt{x} + 4x$

Exercice 228. Somme et produit par un réel On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 2x + 5$
4. $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 5x}{4}$

Exercice 229. Produit de deux fonctions On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = x^2(2x + 4)$
3. $f(x) = 4x(x - 5)$
4. $f(x) = x^3(x - \sqrt{x})$

Exercice 230. Inverse On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x + 4}$
4. $f(x) = \dfrac{-5}{x^2 + 1}$

Exercice 231. Quotient On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$
2. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 3}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + 3}{x}$

Exercice 232. Calculs en vrac On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$
3. $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

Exercice 233. **Calculs en vrac** On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (2x+1)^2$
2. $f(x) = x^2(x+3)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3x^2 + \dfrac{x}{5} - 3$

Exercice 234. **Calculs en vrac** On donne l'expression de $f(x)$. préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^3\sqrt{x}$
2. $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x+6}$
3. $f(x) = -\dfrac{3}{2x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3}$

Calcul de dérivées et applications

Exercice 235. **Au sommet d'une parabole**

1. (a) Déterminer le sommet S de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2x^2 - 4x + 3$
   (b) Déterminer la tangente à $\mathscr{P}$ en S.
2. Ce résultat est il généralisable à toute parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c\ réels, a \neq 0)$?

Exercice 236. **Courbes tangentes** On considère les courbes $\mathscr{C}_1 : y = x^2 + 2x$ et $\mathscr{C}_2 : y = -x^2 + 6x - 2$.

1. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur la calculatrice.
2. Montrer qu'elles n'ont qu'un point commun A.
3. Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente en A. on dit alors que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en A.

Exercice 237. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Donner les coordonnées du point A où $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées.
3. Déterminer la tangente T_A en A à la courbe $\mathscr{C}$.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_A.

Exercice 238. Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Trouver une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. Montrer que $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$, pour tout réel x.
4. En déduire la position $\mathscr{C}$ par rapport à T.

Exercice 239. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Montrer que les deux courbes $\mathscr{P} : y = 2x^2 - 3x + 1$ et $\mathscr{P}' : y = x^2 - 3x + 2$ ont pour point commun le point $A(1;0)$ et que leurs tangentes en ce point sont orthogonales. Les courbes sont dites orthogonales.

Fiche 3

Fonctions dérivées Approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \ I\ ; \ J\ )$.

Exercice 240. $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentant les fonctions f, g, et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ et $h(x) = -x^2 + 4x - 1$.

1. Établir les tableaux de variation de f, g et h.
2. Montrer que
   (a) le point $A(1\ ;\ 2)$ est commun à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$
   (b) les trois courbes admettent en A la même tangente T.
3. Écrire une équation de T et étudier la position de chacune des courbes par rapport à T.
4. Tracer T, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
5. Chacune des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$? Si oui préciser, en quel point et écrire leur équation.

Exercice 241. Tangente issue d'un point Soit la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ et le point $S(2\ ;\ -1)$. on se demande si on peut tracer une (ou plusieurs) tangente(s) à $\mathscr{C}$ passant par S.

1. Émettre une conjecture à l'aide de votre calculatrice.
2. Soit a réel. Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par le point $A(a; a^2)$.
3. Combien de tangentes à $\mathscr{C}$ passent par S ?

Exercice 242. Courbe sous contrainte On cherche une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par le point $A(0,0)$, $B(3,-3)$ et qui admet pour tangentes en A et B les droites (AC) et (BD) où $C(-1;-5)$ et $D(5\ ;\ 1)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont $\mathscr{C}$ serait la courbe représentative. Est-il possible de trouver $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b,c et d sont des réels ?

Exercice 243. Avis de recherche Déterminer trois réels a, b, c tels que la courbe d'équation $y = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ passe par $A(3;2)$, admette en ce point une tangente horizontale et possède au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

Exercice 244. Problème ouvert On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et, pour tout point A de $\mathscr{H}$, la tangente à $\mathscr{H}$ en A. Elle coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C. Comment varie l'aire du triangle OBC quand A parcourt $\mathscr{H}$?

Exercice 245. Problème ouvert On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. Pour tout réel a non nul, on nomme E le point d'intersection des tangentes à la paraboles aux points d'abscisses a et $-\dfrac{1}{a}$. Quel est l'ensemble décrit par le point E quand A décrit $\mathbb{R}^*$?

Fiche 4

Fonctions dérivées Démonstrations - Dérivée d'une fonction composée

Démonstrations des propriétés

Dans les exercices 246 à 251, u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Exercice 246. Montrer que la fonction ku est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ (ku)'(x) = ku'(x).$$

Exercice 247. Montrer que la fonction $u + v$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Exercice 248. Montrer que la fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ (u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Exercice 249. On suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}.$$

Exercice 250. On suppose que la fonction v ne s'annule pas sur I. Montrer que la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et que :

$$\text{pour tout } x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Exercice 251. Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $w : x \longmapsto u(ax+b)$ est définie et dérivable sur l'ensemble K des réels x tels que $ax+b \in I$ et que :

$$\text{pour tout } x \in K,\ w'(x) = au'(ax+b).$$

Dérivée d'une fonction composée

Exercice 252. Soit h la fonction définie sur I avec $I =]-\infty\,;\,4[$ par $h\colon x \longmapsto \sqrt{-3x+12}$.

1. h est une fonction composée de deux fonctions g et f dans cet ordre, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $h(x) = g(f(x))$. Donner l'expression des fonctions g et f.
2. En utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée, démontrer que la fonction h est dérivable sur I.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel strictement positif x et celle de $g'(x)$ pour tout réel x de I.
4. En déduire l'expression de la dérivée h'.

Exercice 253. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon x \longmapsto (5x+8)^3$.
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 254. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\colon x \longmapsto (-9x+1)^5$.
Déterminer sur quel ensemble la fonction g est dérivable puis déterminer sa dérivée.

Exercice 255. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h\colon x \longmapsto \sqrt{3x-1}$.
Déterminer sur quel ensemble la fonction h est dérivable puis déterminer sa dérivée.

Exercice 256. Soit h la fonction définie par $h\colon x \longmapsto \sqrt{10-x}$.
Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction h puis déterminer sa dérivée.

Exercice 257. Soit h la fonction définie par $h\colon x \longmapsto -\dfrac{\sqrt{4x+3}}{2}$.
Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction h puis déterminer sa dérivée.

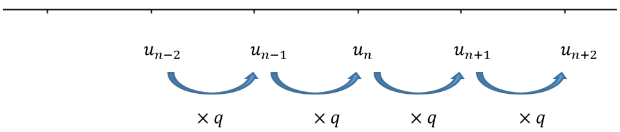
Chapitre 8

Fiche 1

Suites géométriques
Définition et terme général

I. Définition

Définition 15
On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}) = qu_n$
La constante q s'appelle la **raison** de la suite.



Ainsi, dire qu'une suite est géométrique signifie que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par une même constante.

Exemple
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Montrons que la suite (u_n) est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
Donc, il existe un réel q, $q = 2$ tel que, pour tout entier $n, u_{n+1}) = qu_n$. Ainsi, par définition, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme u_0 avec $u_0 = 1$.

Autre méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, on peut donc calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
Donc, par définition, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme u_0 avec $u_0 = 1$.

Méthode

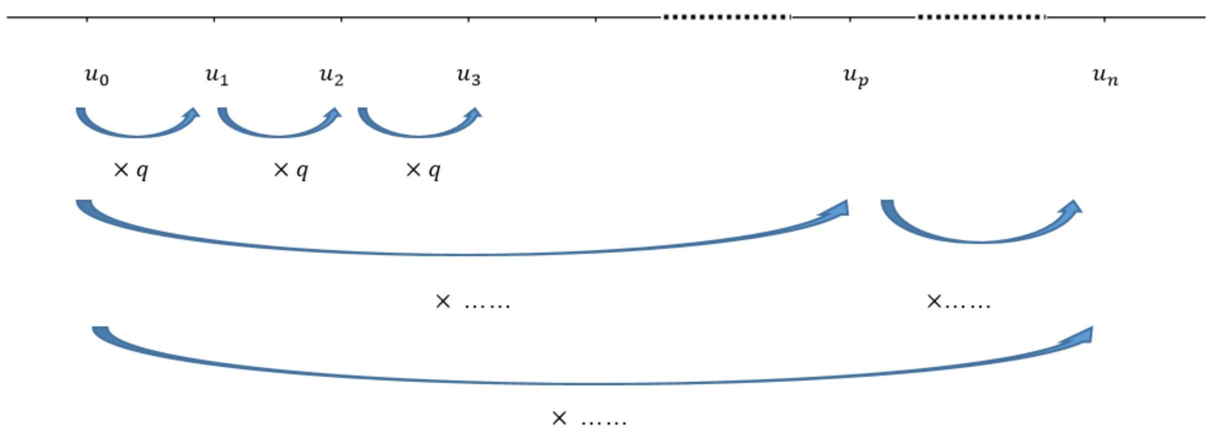
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut montrer que :
  - il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}) = qu_n$ (définition) ;
  - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.
- Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, on exhibe deux quotients de termes consécutifs qui ne sont pas égaux (un contre-exemple).

Exemple
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3}{n^2+1}$. La suite (v_n) est-elle géométrique ?

$v_0 = \dfrac{3}{1} = 3$; $v_1 = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2}$; $v_2 = \dfrac{3}{4+1} = \dfrac{3}{5}$.
Ainsi $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$.
On a donc $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$ et par conséquent, la suite (v_n) n'est pas géométrique.

II. Terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a :
$u_1 = u_0 \times q$;
$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$;
$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$;
...
et ainsi de suite.



Propriété 23
1. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
2. Réciproquement, si (u_n) est une suite telle que, il existe a et b réels tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = a \times b^n,$$

   alors (u_n) est une suite géométrique de raison b et $a = u_0$.

Démonstration : Admise □

Exemple
On considère l'exemple précédent avec la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n = 1 \times 2^n = a \times b^n$, avec $a = 1$ et $b = 2$.
Ainsi, d'après le second point de la propriété précédente, la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercices

Exercice 258. Dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est géométrique de raison q. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a) $u_0 = 1$ et $q = 2$

b) $u_0 = 1$ et $q = -2$

c) $u_0 = -1$ et $q = -1$

d) $u_0 = 1$ et $q = \dfrac{1}{2}$

Exercice 259. Dans chacun des cas suivants, la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, est géométrique de raison q. Donner l'expression du terme général de la suite puis calculer v_{20}.

a) $v_1 = 1$ et $q = 3$

b) $v_5 = 2$ et $q = -1$

c) $v_{50} = 1024$ et $q = -2$

Exercice 260. Dans chacun des cas suivants, on donne le terme général d'une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n. Déterminer si la suite (u_n) est géométrique. Si oui, donner sa raison.

a) $u_n = 3^{n+1}$

b) $u_n = n^2$

c) $u_n = 2 \times 5^{n+1}$

d) $u_n = -5^{n-2}$

Exercice 261. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite est géométrique. Si oui, donner sa raison.

a) (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 6^{n+2}$.

b) (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 - 1$.

c) (w_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et la relation, pour tout n entier naturel, $3w_{n+1} = 2w_n$.

d) (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

Exercice 262. (u_n) est une suite géométrique de raison q. Exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = 2$ et $q = 5$

b) $u_0 = -1$ et $q = -2$

Exercice 263. (u_n) est une suite géométrique de raison q. Exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $q = -5$

b) $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $q = \dfrac{3}{4}$

Exercice 264. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 5. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n et u_3.

Exercice 265. Soit (v_n) une suite géométrique de raison -2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et v_{10}.

Exercice 266. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Dans chaque cas, déterminer la (ou les) valeur(s) possible(s) de q.

a) $u_{14} = -8$ et $u_{15} = 48$

b) $u_{10} = 4$ et $u_{12} = 36$

Exercice 267. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Dans chaque cas, déterminer la (ou les) valeur(s) possible(s) de q et de u_0.

a) $u_4 = 1$ et $u_8 = 16$

b) $u_9 = 2$ et $u_{11} = \dfrac{2}{25}$

Fiche 2

Suites géométriques
Situations modélisées par une suite géométrique

Exercice 268. Il est possible de modéliser chacune des situations ci-dessous par une suite, que l'on notera (u_n).
Dans chaque cas :

a) définir (u_n) par une phrase en français ;

b) pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ;

c) dire si la suite est arithmétique ou géométrique, ou ni arithmétique ni géométrique.

1. Le nombre d'abonnés à une chaîne YouTube de 10 % par mois.
2. Une somme placée en banque augmente de 100 € par an.
3. Un nénuphar double sa surface chaque jour.
4. L'aire (en ha) d'un ensemble de forêts diminue de 0,4 % par an mais cet ensemble bénéficie d'un reboisement de 2 ha par an.
5. La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 7 % par heure après son injection.

Exercice 269. En 2010, un article coûte $8,20$ €. Il augmente chaque année de 1 %. On note p_n le prix de l'article à l'année $2010+n$.

1. Donner p_0. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n)
3. Exprimer p_n en fonction de n puis calculer le prix de l'article en 2025.

Exercice 270 - Capitalisation.
Un capital de 6 500 € est bloqué pour 15 ans sur un compte rapportant un intérêt annuel de 4 %, Cet intérêt est versé sur le compte à la fin de chaque année. On note C_0 le capital de départ et pour $n \geqslant 1$, on note C_n le montant figurant sur le compte au bout de la n-ième année.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
2. En déduire la nature de la suite (C_n) puis exprimer son terme général.
3. Quel sera le capital au bout de 5 ans ?
4. Faire afficher par votre calculatrice la liste des premiers termes de la suite (C_n) et déterminer, par lecture des valeurs obtenues, le nombre d'années nécessaires pour que le capital ait augmenté de 50 %.

Exercice 271 - Le modèle de Malthus.
En 1798, Malthus publie *An essay on the Principle of Population*. Il y émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine. En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus supposa que la population augmentait d'environ 2 % chaque année et que l'amélioration de l'agriculture permettait de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année.
Pour $n \geqslant 1$, on note P_n la population l'année $1800+n$ et a_n le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année.

1. (a) Exprimer P_n en fonction de n.

   (b) D'après Malthus, quelle aurait été la population en 1900 ?

2. Combien l'agriculture aurait-elle pu nourrir de personnes en 1900 selon ses prévisions ?
3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, déterminer en quelle année la situation devait devenir critique selon Malthus.

Exercice 272 - Modéliser pour prévoir.

On a consigné sur un tableur les résultats de mesures expérimentales obtenues lors de l'étude d'une population de bactéries. On note a_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Calculer $a_{n+1} - a_n$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pour les valeurs données dans le tableau suivant.

	A	B
1	heures	population bactérie A
2	0	10000
3	1	12400
4	2	15405
5	3	19082
6	4	23651
7	5	29304
8	6	36361

2. Proposer une suite pouvant modéliser l'évolution de la bactérie.
3. Selon le modèle choisi, quelle population de bactéries prévoit-on au bout de 12 h si l'évolution continue de la même façon ?

Exercice 273. La matière vivante contient du carbone 14. À la mort d'un être vivant, le carbone 14 se désintègre à un rythme de 1,2% tous les 100 ans.

1. Considérons aujourd'hui un échantillon contenant 5 g de carbone 14. Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse (en g) de carbone 14 dans cet échantillon après $100 \times n$ années.
   a) Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2. On arrondira au centième.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Combien de grammes de carbone 14 l'échantillon contiendra-t-il dans 500 ans ? Dans 2000 ans ? On arrondira au centième.
2. On a retrouvé un échantillon d'os qui contient 40% du carbone 14 d'un être vivant. Estimer au siècle près, l'âge de l'échantillon.

Exercice 274. Une feuille a une épaisseur de $0,1$ mm que l'on note e_0. Si on la plie en deux, on obtient une feuille d'une épaisseur de $0,2$ mm, que l'on note e_1. Pour tout entier naturel n, on note e_n l'épaisseur de la feuille (en mm) après le n-ième pliage.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer e_n en fonction de n.
2. Calculer e_{20}. Ce résultat semble-t-il possible dans la réalité ?

Fiche 3

Suites géométriques
Suite auxiliaire géométrique

Exercice 275. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   (b) Donner, pour n entier naturel, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer une expression de u_{50}.

Exercice 276. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n.$$

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul suivante présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563

   Quelles formules, étirées ensuite vers le bas, peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) et (v_n) ?

2. (a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   (b) Démontrer cette conjecture.
3. Donner la valeur exacte de u_{50}.

Exercice 277 - D'après Bac ES.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$v_n = u_n - 90.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 0,8. On précisera la valeur de v_0
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
u ← 65
n ← 0
Tant que .........
    u ← 65
    n ← 0
```

   (a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 85$.
   (b) Quelle est la valeur de la variable n après l'exécution de l'algorithme ?
4. La société Biocagette propose la livraison d'un panier qui contient des fruits et des légumes issus de l'agriculture biologique. Les clients peuvent souscrire un abonnement de 52 € par

mois, pour des paniers bios hebdomadaires. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit à cet abonnement. Les statisticiens de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

Exercice 278. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 2,4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.
   (b) Donner, pour n entier naturel, l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. (a) Déterminer le premier entier n_1, tel que $5,9 < u_{n_1} < 6$.
   (b) Déterminer le premier entier n_2 tel que $5,99 < u_{n_2} < 6$.

Exercice 279. La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 tel que $u_0 \leqslant 1$ et par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. (a) Calculer les premiers termes de la suite pour $u_0 = 0$. Que peut-on dire de la suite dans ce cas ?
   (b) Et pour $u_0 = 1$?
2. On suppose que $u_0 = -1$. Pour tout$n \geqslant 0$, on admet que $u_n \neq 1$ et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Fiche 4

Suites géométriques
Somme des termes consécutifs

I. Somme des premiers termes

Propriété 24
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- si $q = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times u_0$$

- si $q \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
Et plus généralement, la somme de plusieurs termes consécutifs se calcule avec la formule suivante :
$$\text{Somme des termes} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Démonstration :

— Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,
$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \underbrace{u_0 + u_0 + \ldots + u_o}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1)u_0$.

— Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,
On note S la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$
On a alors : $qS = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_n$
$= u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$
Par conséquent,
$S - qS = u_0 - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} + \ldots + u_{n-1} - \cancel{u_n} + \cancel{u_n} - \cancel{u_{n+1}}$
$= u_0 - u_{n+1}$
On a donc : $(1-q)S = u_0 - u_{n+1}$
$= u_0 - u_0 q^{n+1}$
$= u_0(1-q^{n+1})$
D'où :
$S = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ □

Remarque (Cas particulier)
Soit q un réel, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer la somme des 12 premiers termes de la suite.

Le premier terme est u_0 donc le 12ᵉ terme de la suite est u_{11}.
D'après la propriété, on a :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + \ldots + u_{11} &= u_0 \times \frac{1 - q^{12}}{1 - q} \\
&= -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{\frac{1}{2}} \\
&= -6 \times \left(1 - \frac{1}{4096}\right) \\
&= -6 \times \frac{4095}{4096} \\
&= -\frac{12285}{2048}
\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 280. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 4$, telle que $u_0 = 4$.
Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Exercice 281. Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique :

a) de premier terme 3 et de raison $1,05$;

b) de premier terme 2 et de raison $-0,8$.

Exercice 282. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$, telle que $u_0 = 10$.

a) Calculer $u_3 + u_1 + \ldots + u_{100}$, notée S, et écrire le résultat en fonction de puissances de 2.

b) En utilisant l'approximation $2^{10} \approx 10^3$, donner un ordre de grandeur de S.

Exercice 283. Dans chaque cas, S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Calculer S.

a) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{20}$

b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 \ldots + 1024$

c) $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{49} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}$

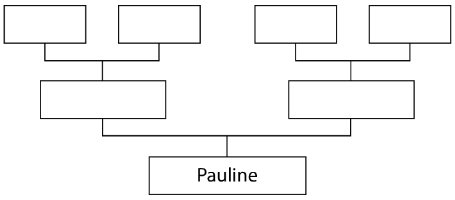
Exercice 284. Dans chaque cas, S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Calculer S.

a) $S = 1 + 2 + \ldots + 1024$

b) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{19683}$

Exercice 285 - Alexis est gourmand. Alexis se sert plusieurs fois du gâteau placé devant lui : il prend à chaque fois la moitié de ce qui reste. Quelle proportion du gâteau aura-t-il mangé après s'être resservi pour la vingtième fois ?

Exercice 286 - Arbre généalogique. Pauline veut faire son arbre généalogique.



Ses deux parents sont ses ancêtres de première génération, ses quatre grands-parents sont ses ancêtres de 2e génération, etc.
Si Pauline arrive à remonter jusqu'à la huitième génération, combien d'ancêtres aura-t-elle inscrit dans son arbre ? et à la n-ième génération ?

Exercice 287 - La récompense. De nombreuses légendes racontent l'invention du jeu d'échecs. L'une d'elle l'attribue à Sissa, sage oriental du Ve siècle après J.-C. Comme récompense, celui-ci aurait demandé à son prince 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, 2 grains sur la 2e case, 4 grains sur la 3e case, etc. en doublant à chaque fois le nombre de grains de blé. Cette demande, apparemment modeste, n'aurait pas pu être accordée : pourquoi ?
Données : un grain de blé pèse en moyenne 40 mg. La production mondiale de blé en 2009-2010 fut de 660 millions de tonnes.

Fiche 5

Suites géométriques Approfondissements

Exercice 288 - Suites emmêlées.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et v_1, v_2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer d_n en fonction de n.
3. On considère la suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Calculer s_0, s_1 et s_2.
   (b) Montrer que $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer en fonction de n les sommes suivantes :
   $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

Exercice 289 - Des carrés parfaits ?.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ par :

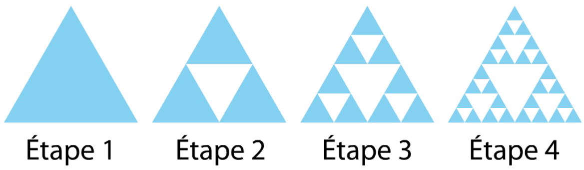
- $u_1 = 16$;
- $u_2 = 1156$;
- $u_3 = 111556$;
- $u_4 = 11115556$;
- $u_5 = 1111155556$;
- etc.

Pour $n \geqslant 1$, u_n s'écrit avec n chiffres égaux à 1 suivis de $n-1$ chiffres égaux à 5 puis d'un chiffre égal à 6.

1. Vérifier que u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sont des carrés parfaits (c'est-à-dire des carrés d'entiers).
2. (a) Calculer $S_n = 10 + \ldots + 10^{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $T_n = 10^n + \ldots + 10^{2n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
3. (a) Justifier que $u_n = T_n + 5S_n + 6$ pour $n \geqslant 2$.
   (b) En déduire une écriture de u_n en fonction de n.
   (c) Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \left(\dfrac{2 + 10^n}{3}\right)^2$.
4. Est-il vrai que pour tout $n \geqslant 1$, u_n est un carré parfait ?

Exercice 290 - Le triangle de Sierpinski.

On enlève à un triangle équilatéral coloré en bleu son triangle des milieux puis on recommence la même manipulation sur chacun des triangles bleus restants et ainsi de suite.



Quel est le nombre de triangles blancs à l'étape 100 ? Quelle part de l'aire du triangle de départ représente l'aire encore colorée en bleu à l'étape 100 ?

Exercice 291 - La rue : un univers impitoyable .

(D'après Swokowski - Analyse - De Boeck Université)

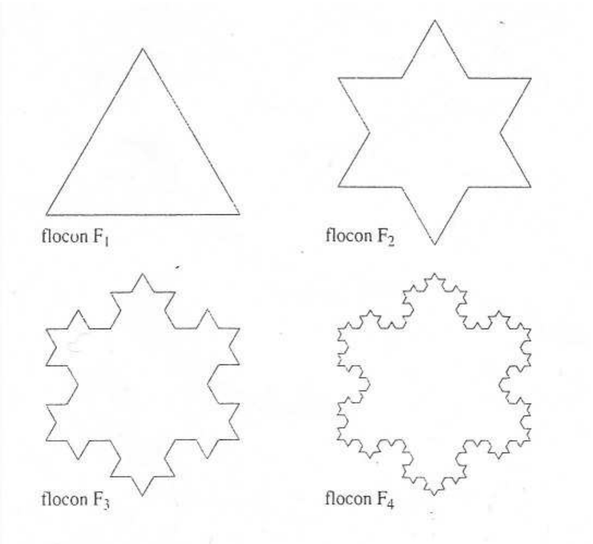
Dans une population de chats vivant en liberté, les chattes adultes ont, chaque été, une portée annuelle de trois chatons en moyenne (y compris les chattes nées l'année d'avant).

À la naissance, un chaton sur deux est une femelle. Le taux de survie d'un chaton est de 40 %, celui d'un chat adulte est de 60 %, d'une année sur l'autre. La première année, on recense une quarantaine de chats adultes dans un quartier, et une dizaine de chatons.

1. Conjecturer l'évolution de la population des chats du quartier en fonction des données.
2. On note a_n le nombre de chats adultes le n-ième été, et c_n le nombre de chatons nés durant l'été de la n-ième année. On pose $a_0 = 40$ et $c_0 = 10$. Montrer que :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}4c_n \\ c_{n+1} = 1{,}5a_{n+1} \end{cases}$$
3. En déduire que les suites (a_n) et (c_n) sont géométriques, et exprimer a_n et c_n en fonction de n.
4. Commenter alors objectivement l'évolution de la population.

Exercice 292 - Les flocons de Von Koch.

Le flocon F_1 est un triangle équilatéral de cote 1I. Pour passer d'un flocon F_n au suivant, on partage chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux et on substitue au segment central deux serments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral tourné vers l'extérieur. Les quatre premiers flocons sont construits ci-dessous.



On note respectivement c_n, ℓ_n, p_n et a_n, le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire du flocon F_n.

1. **Calcul de c_n**
Montrer que la suite (c_n) est définie par :
$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_{n+1} = 4c_n \end{cases}$$
En déduire une expression de c_n en fonction de n.

2. **Calcul de ℓ_n**
Exprimer ℓ_n en fonction de n.

3. **Calcul de p_n**
Déduire des questions précédentes que la suite (p_n) est géométrique et préciser la raison.

4. **Calcul de a_n**

   (a) Calculer a_1 .

   (b) En remarquant que l'on construit F_{n+1} en « ajoutant » sur chaque côté de F_n un triangle équilatéral de côté ℓ_{n+1}, établir l'égalité :
$$a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

   (c) En déduire l'égalité :
$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$
pour tout $n \geqslant 1$.

   (d) Montrer que la suite (a_n) est majorée par $\frac{2}{5}\sqrt{3}$.

Lorsqu'on continue la construction des flocons de Von Koch. on obtient une suite de polygones dont le pénrr :tre est aussi grand que l'on veut mais dont l'aire reste bornée.
Autre étrangeté : si l'on observe le contour du flocon « limite » avec une loupe de grossissement égal à 3, on observe la même ligne brisée qu'à l'œil nu. Cette « courbe » auto-semblable à un rapport d'échelle près est appelée une **courbe fractale**.
Le triangle de Sierpinski est un autre exemple de forme fractale.

Chapitre 9

Fiche 1

Applications de la dérivation
Signe de la dérivée et variations

I. Des variations à la dérivée

Propriété 25
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si f est strictement croissante (ou croissante) sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est strictement décroissante (ou décroissante) sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Démonstration : Démontrons le premier cas.
On considère une fonction f strictement croissante sur I.
Soit $x \in I$ et h un réel non nul tel que $x + h \in I$.
Étudions le signe du quotient $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
On a deux cas possibles :

- si $h > 0$, on a $x < x + h$; or f est strictement croissante sur I ; donc $f(x) < f(x+h)$ et donc $f(x+h) - f(x) > 0$;
- si $h < 0$, on a $x + h < x$; or f est strictement croissante sur I ; donc $f(x+h) < f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) < 0$.

Dans les deux cas, on a montré que $f(x+h) - f(x)$ et h sont de même signe. Par conséquent, le quotient $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est strictement positif. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, ce quotient restera strictement positif. On admet alors que, dans ce cas, la limite de ce quotient (donc le nombre dérivé) est positive ou nulle.

Les autres cas se démontrent de la même manière. □

Interprétation graphique

- Si f est croissante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont des coefficients directeurs positifs.
- Si f est décroissante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont des coefficients directeurs négatifs.
- Si f est constante sur I, toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ ont un coefficient directeur nul.

II. De la dérivée aux variations

Propriété 26
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Les énoncés 1. et 2. restent valables si f' s'annule en un nombre fini de valeurs x de I.

Démonstration : Admise □

Application : détermination du sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . L'étude du signe de la dérivée de f permet, à l'aide de la propriété précédente, de déterminer les variations de f.

Exemple
Déterminons des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

- **Étape 1 : dérivabilité et expression de la dérivée**
  f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $f'(x) = x^2 + x - 2$.
- **Étape 2 : étude du signe de f' et obtention des variations**
  Le trinôme a pour racine évidente 1, le produit des racines est -2, la seconde racine est donc -2. (ou : le discriminant du trinôme est : $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$; $\Delta > 0$, le trinôme a donc 2 racines x_1 et x_2, avec $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.) De plus, le coefficient du terme de degré 2 est de signe positif, on en déduit donc le signe de f' et (d'après la propriété précédente) les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{25}{3}$	$\searrow$	$\frac{23}{6}$	$\nearrow$	

$$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-8) + \frac{1}{2} \times 4 + 4 + 5 = -\frac{8}{3} + 11 = \frac{33-8}{3} = \frac{25}{3}$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{5}{6} + 3 = \frac{5+18}{6} = \frac{23}{6}$$

Applications de la détermination du tableau de variations :

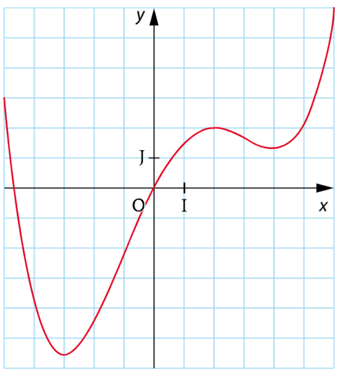
> La détermination du tableau de variations de f permet ainsi :
> - d'obtenir un encadrement de $f(x)$ sur un intervalle donné,
> - de déterminer le maximum ou le minimum de f sur un intervalle,
> - de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, avec $x \in I$ et $k \in R$,
> - de contrôler que l'allure de la courbe représentative d'une fonction est bien celle affichée sur l'écran d'une calculatrice.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,I,\,J)$.

Des variations à la dérivée

Exercice 293. On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,6]$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Combien de fois la dérivée de la fonction f s'annule-t-elle sur $[-5\,;\,6]$?
2. Donner le signe de $f'(-1)$ et celui de $f'(3)$.
3. Comparer $f'(-4)$ et $f'(-1)$.
4. Comparer $f'(-5)$ et $f'(5)$.

Exercice 294. On considère une fonction f dérivable sur son ensemble de définition et dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-10		-3		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-8	↗	2	↘	-1	↗	0

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(-3)$? $f(-1)$ et $f(5)$? $f(5)$ et $f(6)$?
3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur $[-10\,;\,-3]$? sur $[-3\,;\,0]$? sur $[0\,;\,10]$? Justifier.

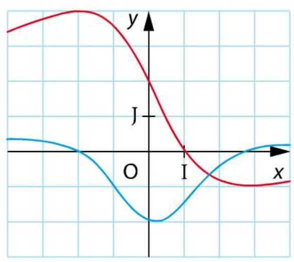
Exercice 295. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et admet ce tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

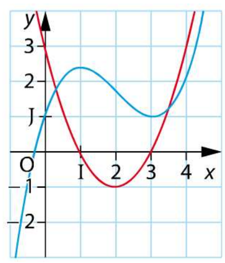
1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(0)$? $f(-0,5)$ et $f(4)$?
3. Quel est le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $]-1\,;\,+\infty[$?

Exercice 296 - Qui est qui ?. Dans chacun des cas suivants, on a représenté la courbe d'une fonction f et celle de sa dérivée f'.
Identifier la courbe représentative de f et celle de f'. Justifier.

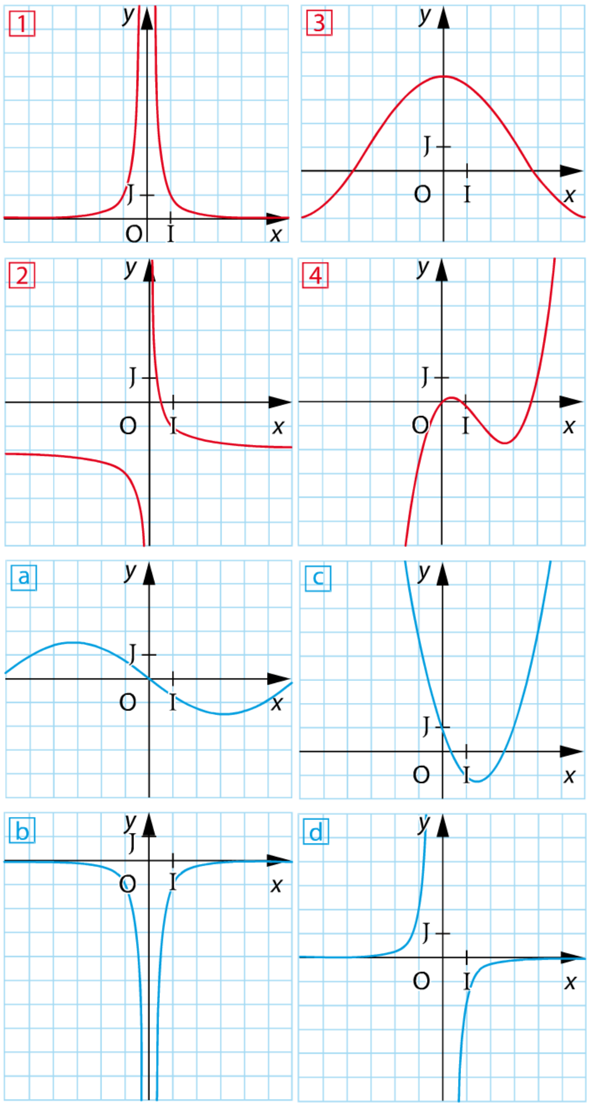
a.



b.



Exercice 297. On donne les courbes de quatre fonctions numérotées de $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$ ainsi que celles de leurs dérivées, numérotées de $\boxed{a}$ à $\boxed{d}$.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.



De la dérivée aux variations

Pour chacun des exercices suivants, étudier la dérivabilité de la fonction puis calculer sa dérivée et dresser son tableau de variations.

Exercice 298.

(a) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 4x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 299.

(a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \neq 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Exercice 300.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$, $x \neq 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 301.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2-6x}{x^2-3x+3}$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{x^2-4x+3}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\ ;\ 3\}$.

Exercice 302.

(a) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{2x+4}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$;

(b) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$, $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 303 - Bien interpréter un écran de calculatrice.

Soit f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + \dfrac{35}{12}x + \dfrac{1}{12}$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur l'écran d'une calculatrice pour $-2 \leqslant x \leqslant 4$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$.

   (b) Lire graphiquement le sens de variation de f.

2. (a) Calculer f' puis étudier le sens de variation de f.

   (b) Que peut-on en conclure quant à la question 1 ?

   (c) Si on prend pour la fenêtre d'affichage $Xmin = 0{,}5$ et $Xmax = 1{,}5$, quelles valeurs de $Ymin$ et $Ymax$ peut-on choisir pour observer sur le graphique les résultats de la question 2(a) (expliquer votre raisonnement) ?

Fiche 2

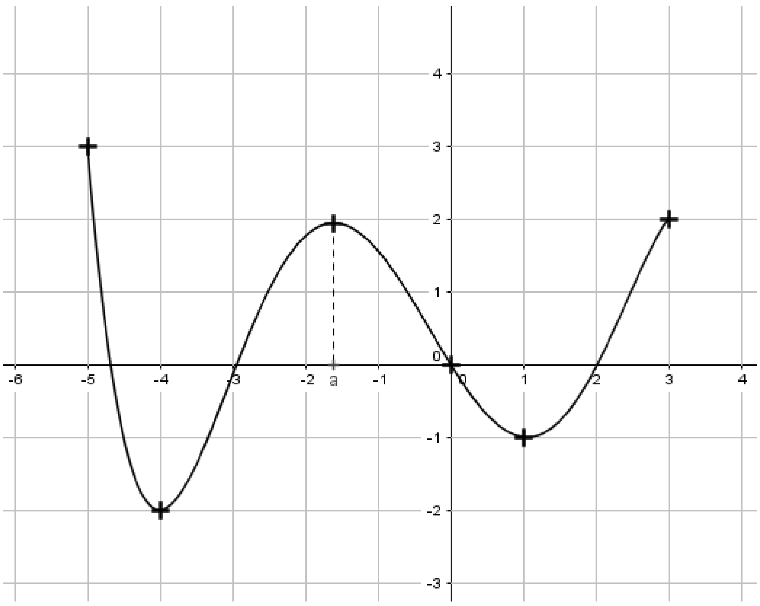
Applications de la dérivation
Extremum d'une fonction

I. Les différents types d'extrema

Définition 16
Soit f une fonction définie sur un intervalle I,$x_0 \in$ I. On dit que :

- f admet son **maximum** sur l'intervalle I en a si, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un **maximum local** en a si, il existe un intervalle **ouvert** J contenu dans I tel que f admette un maximum global en a sur J.
- f admet son **minimum** sur l'intervalle I en a si, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant f(a)$.
- f admet un **minimum local** en a si, il existe son intervalle **ouvert** J contenu dans I tel que f admette son minimum global en a sur J.

Exemple
La courbe représentative suivante est la représentation graphique d'une fonction définie sur $[-5\,;3]$.



- f admet son maximum sur $[-5\,;3]$ en -5 et ce maximum est 3. Elle atteint son minimum sur $[-5\,;3]$ en -4 et ce minimum est -2.
- f admet un minimum local en 1 car -1 est le minimum de f sur $J =]0;2[$, et J est un intervalle ouvert inclus dans I.

- f admet un maximum local en a car $f(a)$ est le maximum de f sur $K =]-2;-1[$, et K est un intervalle ouvert inclus dans I.
- f n'admet pas de maximum local en 3 car car il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans $[-5;3]$ contenant 3.
- Le minimum de f sur $[-5;3]$ est également un minimum local car c'est le minimum de f sur $]-5;-2[$ ou $]-5;3[$.
- Le maximum de f sur $[-5;3]$ n'est pas un maximum local car il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans $[-5;3]$ contenant -5.

Remarques

1. Si I est un intervalle ouvert, tout extremum global sur I, s'il existe, est un extremum local.
2. Le maximum (ou le minimum) d'une fonction peut être atteint en plusieurs, voire même une infinité de valeurs de x comme c'est le cas pour la fonction sin.
3. Une fonction peut ne pas admettre de maximum ou de minimum sur un intervalle.

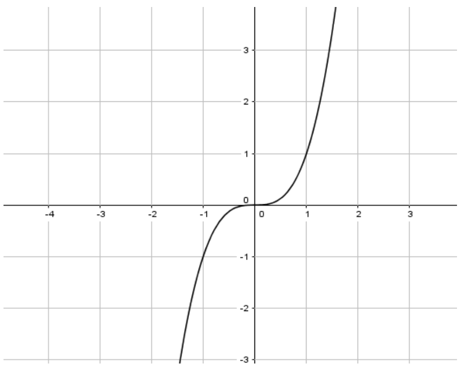
II. Condition nécessaire d'existence d'un extremum sur un intervalle ouvert

Théorème 1
Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et soit a est un nombre réel appartenant à I.
Si f admet un extremum (local ou global)en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration : Une esquisse de la preuve est faîte dans le cas où f admet un maximum local en a. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout x de J, $f(x) - f(a) \leqslant 0$, dès lors le taux de variations de f entre a et x est positif si $x > a$ et négatif si $x < a$. Le nombre dérivé de f en a étant la limite de ce taux, il est à la fois positif et négatif donc nul en a. $\square$

Remarques

1. Cela signifie que si f admet un extremum (local ou global) en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.
2. Si I est un intervalle fermé, le théorème ne s'applique pas. Dans l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5;3]$ est 3, atteint en -5 et la tangente à la courbe n'est pas horizontale.
3. la condition est nécessaire mais non suffisante puisque la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0 et pourtant la fonction cube n'admet pas d'extremum en O.



III. Condition suffisante d'existence d'un extremum sur un intervalle ouvert

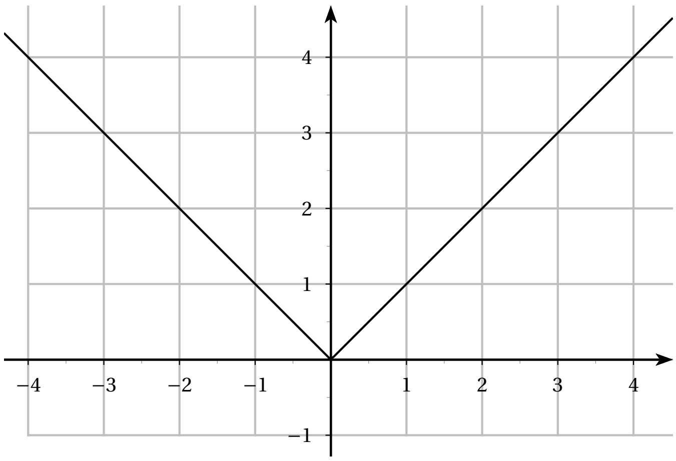
> **Théorème 2**
> Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et soit a est un nombre réel appartenant à I.
> Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Démonstration : Dire que f' s'annule en changeant de signe en a signifie qu'il existe un intervalle ouvert $]a-\alpha; a+\alpha[$ inclus dans I dans lequel tel que f' soit de signe constant sur $]a-\alpha; a[$ et sur $]a, a+\alpha[$ mais de signes opposés. Deux cas peuvent se présenter :

- f' positive sur $]a-\alpha; a[$ puis négative sur $]a, a+\alpha[$ ce qui implique que f est croissante sur $]a-\alpha; a[$ puis décroissante sur $]a, a+\alpha[$, dans ce cas f admet un maximum en a sur l'intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$,
- f' négative sur $]a-\alpha; a[$ puis positive sur $]a, a+\alpha[$ ce qui implique que f est décroissante sur $]a-\alpha; a[$ puis croissante sur $]a, a+\alpha[$, dans ce cas f admet un minimum en a sur l'intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$, □

Remarques

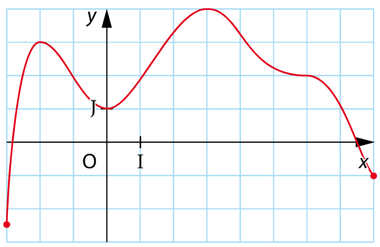
1. Une fonction peut admettre un extremum en un réel a sans être dérivable en a comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue, admettant son minimum sur $\mathbb{R}$ en 0 sans être dérivable en 0.



2. les extrema d'une fonction sont donc à chercher :
    - aux points intérieurs à I où f' existe et s'annule
    - aux points intérieurs à I où f' n'existe pas
    - aux extrémités de I si I est fermé (ou semi fermé)

Exercices

Exercice 304. 1. Quels sont les extrema ou extrema locaux de la fonction dérivable représentée ci -dessous ?



2. (a) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$?
   (b) Ces valeurs correspondent-elles à des extrema ou des extrema locaux ?

Exercice 305. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et a admet le tableau de variation suivant :

x	-10		-3		0		$+10$
$f(x)$	-8	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-10;10]$.
2. La fonction f admet elle un maximum local, global ?
3. Connaît-on certains des nombres dérivés suivants : $f'(-10)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(10)$?

Exercice 306. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

1. Étudier le sens de variations de f.
   (a) La fonction f possède-t-elle des extrema-locaux ?
   (b) La fonction f possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 307. La fonction f est définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}.$$

1. Étudier le sens de variations de f.
   (a) La fonction f possède-t-elle des extrema-locaux ?
   (b) La fonction f possède-t-elle des extrema (globaux) ?

Exercice 308. Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 euros.

Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \dfrac{900}{x}$ pour $x \in I$ où $I = [10,100]$.

1. (a) Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ en prenant pour unités 1 cm pour 5 objets et 1 cm pour 10 euros.
   (b) Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.
2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production inférieur à 80 euros.

Etude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.
2. Déterminer son sens de variation sur $[10;100]$ et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Fiche 3

Applications de la dérivation
Inégalités et encadrements

Obtenir une inégalité

Exercice corrigé

Méthode :

— On se ramène à une inégalité avec un second membre nul,

— on étudie les variations de la fonction dont l'expression est donnée dans le membre non nul,

— on conclut en donnant les conditions pour lesquelles la fonction est du signe donné par l'inégalité.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que, pour tout réel x strictement positif : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Correction :

1. **Dérivabilité :** La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est une fonction rationnelle définie sur $]0\,;\,+\infty[$ donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Calcul de la dérivée : Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.
   Résolution sur $]0\,;\,+\infty[$ de $f'(x) = 0$: Soit x un réel de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   Signe de f' sur $]0\,;\,+\infty[$: la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2}$ est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$, donc la fonction f' a le même signe que la fonction $x \mapsto x-1$ sur $]0\,;\,+\infty[$, c'est à dire, strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1;+\infty[$.
   variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$:
   - la fonction f' est strictement négative sur $]0,1[$ et s'annule en 1 donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$,
   - f' est strictement positive sur $]1;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	

2. De l'étude précédente, on peut déduire que la fonction f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ qui vaut 2 donc, pour tout x de $]0;+\infty[$, $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

Remarque
On peut aussi démontrer ce résultat en remarquant que :

$$x+\frac{1}{x}-2=\sqrt{x}^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Mais cette dernière technique a une portée plus limitée.

Obtenir un encadrement

Exercice corrigé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+x-2$. Donner un encadrement de f lorsque x appartient à $[0,2]$.
Correction : Étudions la fonction f sur l'intervalle $[0,2]$.

— **Dérivabilité :** La fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ donc dérivable sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.
Calcul de la dérivée : Pour tout x de $]-\infty\,;\,+\infty[$, $f'(x)=3x^2-4x+1$.
Résolution sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ de $f'(x)=0$: 1 est une racine évidente, la seconde racine est donc $\dfrac{1}{3}$.
Signe de f' sur $[0,2]$: le signe du coefficient du terme de degré 2 est positif ce qui permet d'obtenir le signe de f'
variations de f sur $[0,2]$:

— **Résumé** :

x	0		$\frac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-\frac{50}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

On a donc démontré que pour tout x de $[0,2]$, $-2\leqslant f(x)\leqslant 0$.

Exercices

Exercice 309. Montrer que pour tout $x\in[0;2]$, $\dfrac{1}{3}x^3\leqslant x+1$

Exercice 310. Encadrer $f(x)=x^3-3x+3$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice 311. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

$$\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\quad;\quad I=]0\,;\,+\infty[$$

Exercice 312. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

$$\frac{x}{1+x}-x\geqslant 4\quad;\quad I=[-10\,;\,-1[$$

Exercice 313. Démontrer l'inégalité suivante sur l'intervalle I en étudiant les variations d'une fonction :

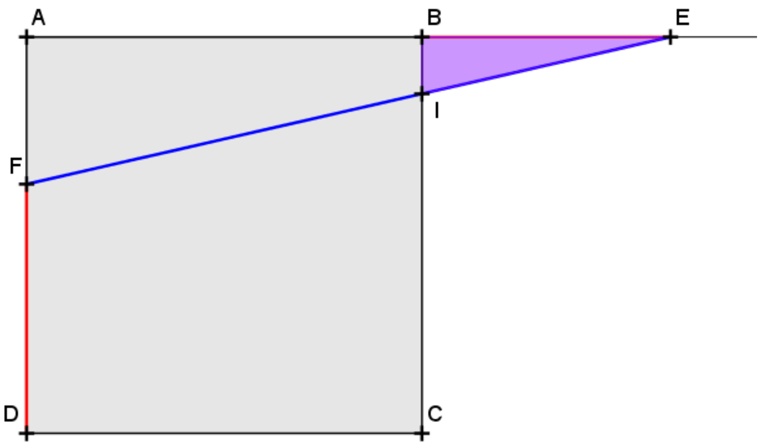
$$x^2+x\geqslant\frac{1}{x}+1\quad;\quad I=[1\,;\,+\infty[$$

.

Fiche 4

Applications de la dérivation
Exercices d'optimisation

Exercice 314. $ABCD$ est un carré de côté 1.
Le point E est situé sur la droite (AB), à l'extérieur du segment $[AB]$ et du côté de B, le point F est sur le segment $[AD]$ et $BE = DF$.



I est le point d'intersection des droites (BC) et (EF).
On veut déterminer la position du point E pour laquelle l'aire du triangle BEI maximale.

1. Calcul de l'aire du triangle BEI
   (a) On pose $BE = DF = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$). Démontrer que $BI = \dfrac{x - x^2}{x+1}$.
   (b) En déduire l'expression de l'aire $S(x)$ du triangle BEI en fonction de x.
2. Étude de la fonction S
   (a) Déterminer la fonction dérivée de S.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.
   (c) Contrôler graphiquement la cohérence des résultats à l'aide de la calculatrice.
   (d) Conclure.

Exercice 315. La figure ci-dessous représente un patron du parallélépipède de la figure 2. Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée carrée de 30 cm de côté.

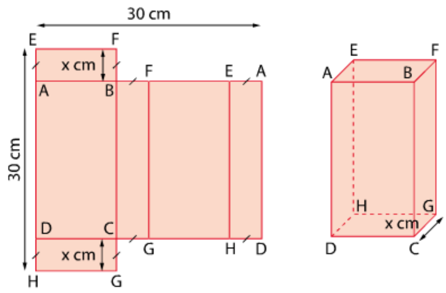


Fig. 1 Fig. 2

1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFG$ s'exprime en cm^3 par $V(x) = 2x(15-x)^2$ pour $x \in [0\ ;\ 15]$.
2. Exprimer $V(x)$ sous forme développée puis étudier le sens de variation de la fonction V sur $[0\ ;\ 15]$.
3. Tracer la courbe représentant la fonction V avec la calculatrice. Indiquer la fenêtre choisie.
4. Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait. Le fabricant voudrait que le volume de la boîte soit 0,5 litres, c'est-à-dire 500 cm^3.
   (a) Combien de valeurs de x correspondent à des boîtes de 0,5 litres ? Justifier.
   (b) Déterminer des valeurs approchées à 0,1 près de ces valeurs de x. Quel es celle que retiendra le fabricant ?

Exercice 316. Économiser l'emballage
Un grand lessivier commercialise son produit pour lave vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres ($1 \leqslant x \leqslant 2$). Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm^3. Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.
2. (a) Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \dfrac{36}{x}$ sur $[1\ ;\ 2]$.
   (b) Montrer que $S'(x)$ a même signe que $x^3 - \dfrac{9}{2}$.
3. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction u définie sur $[1\ ;\ 2]$ par $u(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}$.
   (b) En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution dans $[1\ ;\ 2]$ et en donner une valeur approchée à la calculatrice à 0,1 près.
   (c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire le tableau de variation de S.
5. Quelle valeur de x rend S minimale ?

Chapitre 10

Fiche 1

Sens de variation d'une suite
Définition et étude du sens de variation

I. Sens de variation d'une suite

Définition 17
Soit (u_n) une suite. On dit que :

- (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$;
- (u_n) est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang ;
- (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarques

1. Une suite est dite strictement croissante (ou strictement décroissante) si l'ordre est strict dans la définition précédente,
2. Une suite est dite croissante (ou décroissante) à partir d'un rang si les inégalités précédentes sont vraies à partir d'un rang n_0.
3. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (-1)^n$, n'est ni croissante, ni décroissante.
4. si une suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) alors la suite $(-u_n)$ est décroissante (resp. croissante).

II. Différentes méthodes d'étude des variations

II.1. Méthode 1 : étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

- Pour démontrer qu'une suite est croissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
- Pour démontrer qu'une suite est décroissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est négatif.
- On peut retenir que l'étude du sens de variation d'une suite numérique revient à l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour un n quelconque.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :**
   $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = -5} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 5\ ;\ n \geqslant 0} \end{cases}$
   Soit n un entier naturel quelconque, $u_{n+1} - u_n = 5$.
   Ce dernier nombre est positif.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   On peut remarquer que cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'étude des variations d'une suite arithmétique.

2. **Étudier le sens de variation de la suite définie par :**
   $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = -5} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1\ ;\ n \geqslant 0} \end{cases}$
   Soit n un entier naturel quelconque, $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1$.
   Or $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ et ce dernier nombre étant le carré d'un nombre réel, il est positif.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.
   La suite (u_n) est donc croissante.

II.2. Méthode 2 : comparaison à 1 du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Pour démontrer qu'une suite de **termes strictement positifs** est croissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1.
- Pour démontrer qu'une suite de **termes strictement positifs** est décroissante, il suffit de prouver que, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à 1.
- On peut retenir que l'étude du sens de variation d'une suite numérique de termes strictement positifs revient à la comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, pour un n quelconque.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $\boldsymbol{u_n = (n+1) \times 3^n}$ pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$.**
   Soit n un entier naturel quelconque, le nombre $(n+1) \times 3^n$ est strictement positif.
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2) \times 3^{n+1}}{(n+1) \times 3^n} = \frac{(n+2) \times 3}{(n+1)}$.
   Or $n + 2 > n + 1 > 0$ et donc $\frac{(n+2)}{(n+1)} > 1$, par conséquent $\frac{(n+2) \times 3}{(n+1)} > 3$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1.
   La suite (u_n) est donc croissante.

2. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $\boldsymbol{u_n = -5 \times 3^n}$ pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$.**
   Soit n un entier naturel quelconque, le nombre -5×3^n est strictement négatif. Étudions donc le sens de variation de $(-u_n)$ dont les termes sont strictement positifs.
   $\frac{-u_{n+1}}{-u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\frac{-u_{n+1}}{-u_n}$ est supérieur à 1.

La suite $(-u_n)$ est donc croissante et par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

On peut remarquer que cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'étude des variations d'une suite géométrique de raison positive.

II.3. Méthode 3 : suite définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f

- Pour démontrer qu'une suite, définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, est croissante, il suffit de prouver que, cette fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Pour démontrer qu'une suite, définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, est décroissante, il suffit de prouver que, cette fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
- On peut retenir que pour déterminer le sens de variation d'une suite numérique définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, il suffit de connaître le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
- **Attention**, cette technique ne s'applique pas au cas où la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Le sens de variation de f n'est pas nécessairement celui de la suite. Voir l'exemple 2 ci-dessous.

Exemples

1. **Étudier le sens de variation de la suite définie par $u_n = n^2 + 4n + 5$ pour tout entier naturel n.**
   Soit n un entier naturel quelconque, la suite est définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
   Or cette fonction f est une fonction polynôme du second degré dont le sens de variation est obtenu grâce à la technique étudiée en seconde.
   On sait, en effet, que l'abscisse du sommet est -2, le coefficient du terme de degré 2 est positif, donc la fonction f est croissante sur $[-2\,;\,+\infty[$ et par conséquent sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

2. **Conjecturer le sens de variation de la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n et celui de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ pour tout entier naturel n.**
   On remarque que le calcul des premiers termes des deux suites donne :

n	u_n	v_n
0	10	0
1	3,3166247904	1
2	2,0776488612	1,4142135624
3	1,7543229068	1,553773974
4	1,6596152888	1,5980531825

Les suites sont définies par une relation de récurrence utilisant la même fonction croissante et pourtant ces deux suites n'ont pas le même sens de variation que cette fonction.

Exercices

Exercice 317. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n - 3n$;

b) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -3u_n + 4$;

c) $u_n = 2 \times 5^{n-1}$.

Exercice 318. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3n + 5$;

b) $u_n = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;

c) $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Exercice 319. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de la suite (u_n).

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

b) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$;

c) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;

d) $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n + 8n^2 - 42n + 55$.

Exercice 320. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = 3n - 7$;

b) $u_n = -7 \times 3^n$;

c) $u_n = (-0,37)^n$.

Exercice 321. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = -\dfrac{1}{2}n + 5$;

b) $u_n = -\dfrac{1}{2} \times 5^n$;

c) $u_n = -5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Exercice 322. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{4^{n-1}}{3}$;

b) $u_n = \dfrac{4n-1}{3}$;

c) $u_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$.

Exercice 323. Déterminer, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{11}{10^n}$;

b) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{11}{10}$;

c) $u_0 = 1$ et $u_n - u_{n+1} = \dfrac{11}{10}$.

Exercice 324. Étudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n) à partir de celui d'une fonction.

a) $u_n = -n^2 - 3n + 9$;

b) $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$;

c) $u_n = n^3 - n$.

Exercice 325. Étudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n) à partir de celui d'une fonction.

a) $u_n = 9n^2 - 9n + 2$;

b) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$;

c) $u_n = (3n - 11)^4$.

Fiche 2

Sens de variation d'une suite
Approche de la notion de limite

I. Limite infinie - exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 6$. La suite (u_n) est arithmétique ; elle a pour raison 3 qui est un nombre strictement positif, donc la suite (u_n) est croissante.

On peut alors se poser alors la question suivante :

Quel que soit le nombre réel A, aussi grand soit-il, existe-t-il un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A ? Autrement dit, existe-t-il un entier n_0 à partir duquel tous les nombres u_n sont supérieurs à A ?

Examinons le cas $A = 1000$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant A &\iff 3n + 6 \geqslant 1000 \\ &\iff n \geqslant \frac{994}{3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{994}{3} \approx 331,3$ tronqué au dixième.
Donc, à partir du rang 332, tous les termes de la suite sont supérieurs à 1000.

On montrerait de même que pour tout réel A , il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, u_n est supérieur à A.

Définition 18
Si quel que soit le réel positif A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) quand n tend vers $+\infty$.
On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque
Une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement monotone croissante.
Exemple : la suite de terme général $n + (-1)^n$ n'est pas monotone mais a pour limite $+\infty$.

II. Limite nulle - exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n strictement positif par $u_n = \dfrac{3}{n}$.
Pour tout entier n strictement positif, on a $u_n = f(n)$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x}$ qui est décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$; par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

En observant les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que les termes u_n « se rapprochent de plus en plus de 0 Lorsque n devient grand ». On peut alors se poser alors la question suivante :

Quel que soit le nombre a positif, aussi proche de 0 soit-il, existe-t-il rang à partir duquel tous les termes de la suite vérifient $0 < u_n \leqslant a$? Autrement dit, existe-t-il un entier n_0 à partir duquel tous les nombres u_n vérifient $0 < u_n \leqslant a$?

Examinons le cas $a = 0,001$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leqslant a &\iff 0 < \frac{3}{n} \leqslant 0,001 \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{0,001} \\ &\iff n \geqslant 3000 \end{aligned}$$

Ainsi, à partir du rang 3000, l'écart entre le nombre u_n et 0 est inférieur à $0,001$.

On montrerait de même que pour tout réel a strictement positif, il existe un rang n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, on a $0 < u_n \leqslant a$.

Définition 19
Si quel que soit le réel strictement positif ε choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement compris entre $-\varepsilon$ et ε on dit que la suite (u_n) a pour limite 0 (ou converge vers 0) quand n tend vers $+\infty$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $u_n \longrightarrow 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque
Une suite qui a pour limite 0 n'est pas nécessairement monotone.
Exemple : la suite de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais a pour limite 0.

III. Suite n'admettant pas de limite

Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (-1)^n$.
On a : $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$; $u_4 = 1$; ...

- Tous les termes sont inférieurs à 2. Par conséquent, la suite n'a pas pour limite $+\infty$.
- Tous les termes sont supérieurs à -2, par conséquent, la suite n'a pas pour limite $-\infty$.
- Il n'existe aucun nombre dont « se rapprochent » les termes de la suite.

On dit que la suite (u_n) diverge et n'admet pas de limite.

Exercices

Exercice 326. À l'aide de la calculatrice, afficher le tableau de valeurs des suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n^3$.

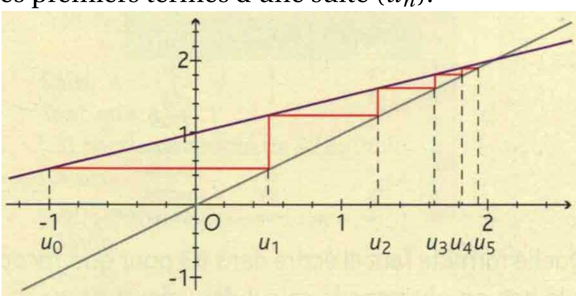
1. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Quelle semble être la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 327. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = 1,3^n$. On a calculé les premiers termes de la suite dans une page de tableur :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	1
3	1	0,5	1,3
4	2	0,25	1,69
5	3	0,125	2,197
6	4	0,0625	2,8561

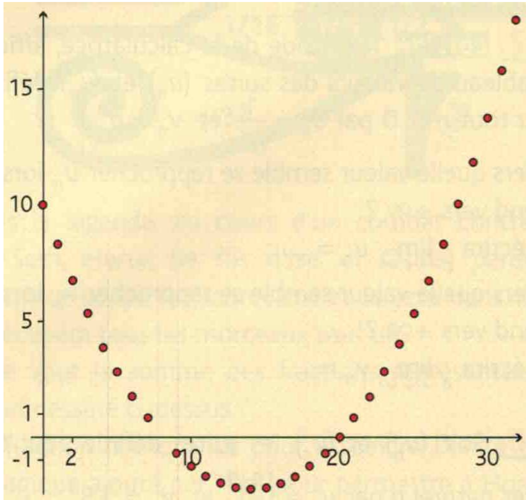
1. Quelle formule faut-il écrire en B2 pour que, recopiée vers le bas, on obtienne le calcul des valeurs des termes de la suite (u_n) ?
2. Même question avec les valeurs des termes de la suite (v_n) pour la cellule C2.
3. Afficher les valeurs des termes des deux suites jusqu'à $n = 50$.
4. Quelle semblent être les valeurs de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Exercice 328. On a représenté graphiquement les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 329. On a représenté graphiquement les premiers termes d'une suite (u_n).



Conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 330.

1. À l'aide d'une calculatrice, afficher le tableau de valeurs des suites (u_n) et (v_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Toujours à l'aide de la calculatrice, afficher la représentation graphique des suites pou n compris entre 0 et 100 en choisissant, à l'aide du tableau de valeurs, une fenêtre adaptée.
2. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Quelle semble être la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 331. Soit (u_n) et (v_n) les suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n - 5 \end{cases}.$$

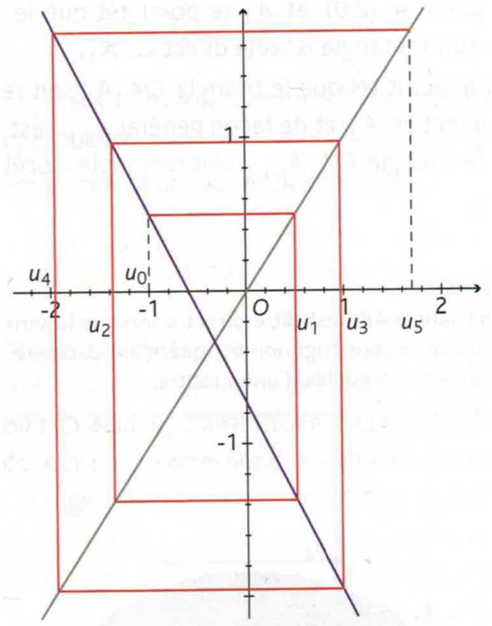
On a calculé les premiers termes de chacune des suites dans une page de tableur :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	3	2
3	1	1	-3,5
4	2	-3	-7,625
5	3	-11	-10,71875
6	4	-27	-13,039063
7	5	-59	-14,779297

1. Quelle formule faut-il écrire en B3 pour que, recopiée vers le bas, on obtienne le calcul des valeurs des termes de la suite u_n ?
2. Même question avec les termes de la suite (v_n) pour la cellule C3.

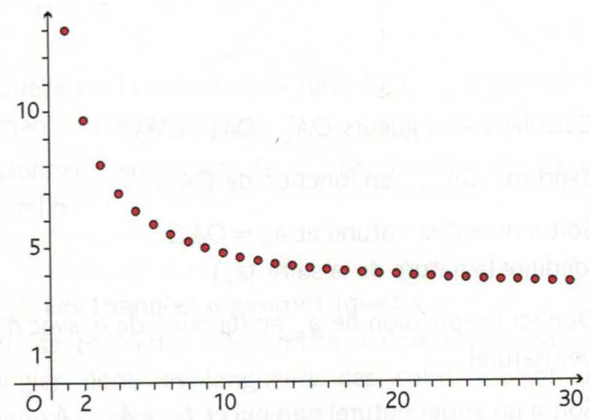
3. Afficher les valeurs des termes des deux suites jusqu'à $n = 50$.
4. Quelle semblent être les valeurs de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Exercice 332. On a construit sur le graphique suivant les premiers termes d'une suite (u_n).



D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 333. On a représenté sur le graphique suivant les premiers termes d'une suite (u_n).



D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 334.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 4. Conjecturer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 4. Conjecturer la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 335. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) lorsque $r > 0$.
2. Conjecturer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) lorsque $r < 0$.

Exercice 336. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{n}\ ;\ v_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } w_n = \frac{2}{n^2} \text{ pour } n > 0.$$

1. À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.
2. Conjecturer alors la limite en $+\infty$ des suites définies pour $n > 0$ par :
$$r_n = 3 + \frac{1}{n}\ ;\ s_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 337. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = n\ ;\ v_n = n^2 \text{ et } w_n = (-n)^3 \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.
2. Conjecturer alors la limite en $+\infty$ des suites définies pour $n > 0$ par :
$$r_n = -n^2\ ;\ s_n = (-n)^3 - 100 \text{ et } t_n = n^2 + n.$$

Exercice 338. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = (-1)^n\ ;\ v_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } w_n = 3 + (-1)^n.$$

À l'aide de la calculatrice (tableau de valeur ou graphique) ou d'un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ de chacune des suites.

Chapitre 11

Fiche 1

La fonction exponentielle
Définition et premières propriétés

I. Définition de la fonction exponentielle

Théorème 3
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration : Admise $\square$

Définition 20
La fonction **exponentielle** est la fonction notée exp définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème 4 (Relation fonctionnelle)
Pour tous réels x et y : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration : Admise $\square$

Propriété 27
Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$

Démonstration : Admise $\square$

Exemple (Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques)
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(3) \times \exp(5)$

b) $\dfrac{\exp(-2)}{\exp(4)}$

c) $\exp(x) \times \exp(-x)$

d) $\left(\exp(3x)\right)^2$

Correction :

a) $\exp(3) \times \exp(5) = \exp(3+5) = \exp(8)$

b) $\dfrac{\exp(-2)}{\exp(4)} = \exp(-2-4) = \exp(-6)$

c) $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

d) $\left(\exp(3x)\right)^2 = \exp(2 \times 3x) = \exp(6x)$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1. Signe et variations

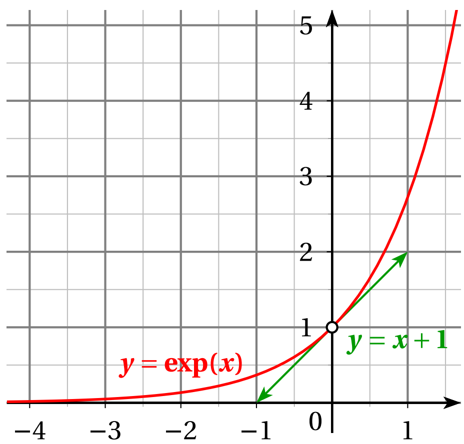
Propriété 28
Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est :

- strictement positive
- strictement croissante

Démonstration : Admise □

III.2. Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$



Remarques

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est **asymptote** à la courbe représentative en $-\infty$.
- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

Exemple (étudier les variations d'une fonction comportant $\exp(x)$)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times \exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ n' a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Correction :

1. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel, $f'(x) = 1 \times \exp(x) + x \times \exp'(x) = 1 \times \exp(x) + x \times \exp(x)$
   Donc, après factorisation par $\exp(x)$:
   $f'(x) = \exp(x) \times (1 + x)$

2. Pour étudier le sens de variation de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   Or quel que soit le réel x, le nombre $\exp(x)$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x+1$.
   Ainsi, f' est négative sur $]-\infty;-1]$ donc f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et f' est positive sur $[-1;+\infty[$ donc f est croissante sur $[-1;+\infty[$.
   On peut résumer l'étude par le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-\exp(-1)$	$\nearrow$	

3. D'après l'étude précédente, la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est atteint lorsque x prend la valeur -1. Or ce minimum est $-\exp(-1)$ et la calculatrice donne comme valeur arrondie au centième de ce nombre $-0,37$; on peut donc conclure que, pour tout x réel , $f(x) > -1$ et par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ n' a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercices

Calculs algébriques

Exercice 339. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(3) \times \exp(4)$

b) $\exp(4) \times \exp(-4)$

Exercice 340. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(\exp(5) - \exp(4)\right)^2 - \left(\exp(5) + \exp(4)\right)^2$

b) $\left(\exp(2) + \exp(-2)\right)\left(\exp(2) - \exp(-2)\right)$

c) $\left(\exp(3)\right)^2$

d) $\left(\dfrac{\exp(3)}{\exp(4)}\right)^2$

Exercice 341. Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(x) \times \exp(-x+1)$

b) $\exp(1) \times \exp(-x)$

c) $\dfrac{\exp(-1)\exp(-2)}{(\exp(2))^{-2}\exp(-x)}$

Exercice 342. Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)^2 - \left(\exp(x) - \exp(-x)\right)^2$

b) $\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)^2 - \exp(-x)\left(\exp(3x) - \exp(-x)\right)$

Étude de fonctions

Exercice 343. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 344. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{\exp(x)}$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 345. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 346. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Fiche 2

La fonction exponentielle
Notation exponentielle

Une nouvelle notation

Définition 21
L'image de 1 par la fonction exp est notée e. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarques
- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme π, c'est un nombre irrationnel et transcendant. Son arrondi à 10^{-9} est : $\mathrm{e} \approx 2,718\,281\,828$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = \left(\exp(1)\right)^n = \mathrm{e}^n$.

  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel x : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$.

  On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.
  La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
  $\mathrm{e}^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
  Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

Propriété 29
Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Exemples
1. **Calculer avec la notation exponentielle**
   Simplifier les expressions suivantes :

   a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^2$ b) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-2}}{\left(\mathrm{e}^2\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{-x}}$

   Correction :

   a) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{3-4+2} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

   b) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\times 3x} = \mathrm{e}^{6x}$

   c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-2}}{\left(\mathrm{e}^2\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1-2}}{\mathrm{e}^{-2\times 2-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-4-x}} = \mathrm{e}^{-3+4+x} = \mathrm{e}^{1+x}$

2. **Transformer des expressions**
   Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Correction : Soit x un réel,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

On a donc établi la première égalité.
D'autre part,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^0 - e^{-2x}}{e^0 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Exercices

Calculs algébriques avec notation e^x

Exercice 347. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$

b) $\left(e^4\right)^3 e^4$

c) $\left(e^3\right)^{-2} e^5$

d) $\dfrac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$

Exercice 348. Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^{-x})^2$

b) $\sqrt{(e^2+1)^2 - (e^2-1)^2}$

c) ee^{2x+1}

d) $e^{3-2x}e^{x+5}$

e) $\left(e^{5x}\right)^2$

f) $e^{9x} - 2\left(e^{3x}\right)^3$

Exercice 349. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$

b) $e^x(e^x + e^{-x})$

c) $(e^x)^5\left(e^{-2x}\right)^2$

d) $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$

e) $\sqrt{e^{-2x}}$

f) $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

Exercice 350. Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = (e^x - e^{-x})\left(e^{2x} + e^x + 1\right)$

b) $B = \left(e^{3x}\right)^2 + \left(e^{-3x}\right)^2 - \left(e^{3x} - e^{-3x}\right)^2$

c) $C = \left(e^{3x}\right)^2 - e^{2x}\left(e^{2x} + e^{-2}\right)^2$

Exercice 351. Factoriser les expressions suivantes :

a) $xe^x - e^x$

b) $(x+3)e^{-2x} - 2e^{-2x}$

c) $e^{3x} - e^{2x}$

d) $e^{2x} + 2e^x + 1$

e) $e^{2x} - 4x^2$

f) $e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

Exercice 352. Démontrer que pour tout réel x, on a :

a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

b) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = e^{2x} + 1$

c) $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$

d) $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

e) $\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \dfrac{4}{1+3e^{-2x}}$

f) $1 - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Fiche 3

La fonction exponentielle
Lien avec les suites géométriques

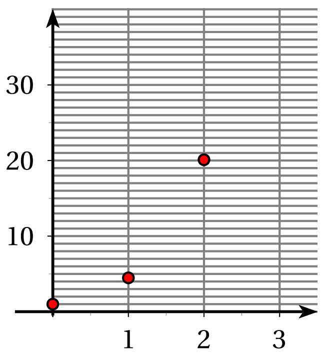
I. Lien avec les suites géométriques

Propriété 30
Soit a un réel, la suite (u_n) définie par $u_n = \mathrm{e}^{na}$, pour tout n entier naturel, est une suite géométrique de raison e^a.

Démonstration : Soit a un nombre réel.
Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = \mathrm{e}^{na}$.
Alors, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a = u_n \times \mathrm{e}^a$.
Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a.
De plus, $u_0 = \mathrm{e}^{0\times a} = \mathrm{e}^0 = 1$.
Donc, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 1 \times (\mathrm{e}^a)^n$. □

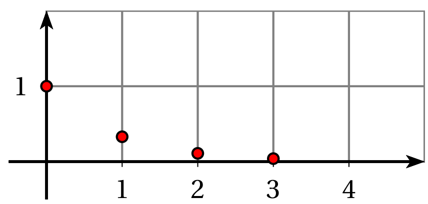
Exemples

- La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{1,5\times n}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{1,5}$.



On parle de croissance exponentielle.

- La suite définie par $u_n = \mathrm{e}^{-1,1\times n}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1,1}$.



On parle de décroissance exponentielle.

Remarque
Réciproquement, on admet que pour tout réel q avec $q > 0$, il existe un unique réel, a tel que $\mathrm{e}^a = q$. Dès lors $q^n = \mathrm{e}^{na}$. Ainsi, le terme général de toute suite géométrique de raison strictement positive peut s'écrire à l'aide de la fonction exponentielle.

Exemples

1. **Exponentielle et suite**

   (a) Déterminer la nature, la raison et le premier terme de la suite définie par $u_n = e^{-6n}$.

   (b) Déterminer la nature, la raison et le premier terme de la suite définie par $u_n = e^{6n+1}$.

   Correction :

   (a) La suite est géométrique de raison e^{-6} et de premier terme 1.

   (b) Pour n entier naturel. $u_n = e^{6n} \times e^1$, la suite est géométrique de raison e^6 et de premier terme e^1.

2. **Exponentielle et somme des termes**
   Soit n un entier naturel non nul, déterminer la somme S en fonction de n lorsque S est définie par : $S = 1 + e + e^2 + ... + e^n$.
   Correction :
   S est la somme des $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e et de premier terme 1, donc
   $$S = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$
   .

3. **Identifier une suite géométrique**
   Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 10 \times e^{3n}$.

   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) On donne $e^3 \approx 20$. Justifier que la suite (u_n) est croissante puis déterminer mentalement à partir de quel rang on a $u_n > 10^6$.

   Correction :

   (a) Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} = 10 \times e^{3(n+1)} = 10 \times e^{3n+3} = 10 \times e^{3n} \times e^3 = u_n \times e^3$.
   Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^3.
   Son premier terme est u_0 avec $u_0 = 10 \times e^{3\times 0} = 10$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on a :
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times \left(e^3\right)^{n+1} - 10 \times \left(e^3\right)^n = 10 \times \left(e^3\right)^n (e^3 - 1) \approx 10 \times \left(e^3\right)^n \times 19$.
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
   De plus :
   $u_1 \approx 10 \times 20 \approx 200$
   $u_2 \approx u_1 \times 20 \approx 4000$
   $u_3 \approx u_2 \times 20 \approx 80000$
   $u_4 \approx u_3 \times 20 \approx 16000000$
   Et $16000000 > 10^6$, donc u_n dépasse le million dès le rang 4.

Exercices

Exponentielle et suites

Exercice 353. Donner la nature et la raison des suites ci-dessous.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^n$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{-6n}$.
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{3n}$.
4. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^2 n$.

Exercice 354. Déterminer le sens de variation des suites de l'exercice précédent.

Exercice 355. Étudier le sens de variations des suites suivantes.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{5n}$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
3. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{0,5} u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 356. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^n$$

1. Démontrer que S_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer S_n en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n la somme S_n va-t-elle dépasser un milliard ?

Exercice 357. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression des sommes suivantes en fonction de n :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k} = 1 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^6 + \cdots + \mathrm{e}^{2n}$
2. $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{0,5k} = 1 + \mathrm{e}^{0,5} + \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{1,5} + \cdots + \mathrm{e}^{0,5n}$

Exercice 358. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des sommes suivantes :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{e}^k = 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^5$
2. $S = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{e}^{0,01k} = 1 + \mathrm{e}^{0,01} + \mathrm{e}^{0,02} + \cdots + \mathrm{e}^{0,1}$

Fiche 4

La fonction exponentielle
Équations et Inéquations

I. Équations et inéquations

Propriété 31
Pour tous réels x et y :

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Démonstration : Admise □

Remarque
On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

- Pour résoudre une équation faisant intervenir une fonction exponentielle, on peut transformer l'équation en une égalité entre deux images de la fonction exponentielle.
- La propriété $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ permet de se « débarrasser » de l'exponentielle et ainsi de se ramener à une équation que l'on peut résoudre.
- La propriété $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ permet de résoudre des inéquations de manière analogue.

Exemples

1. **Résoudre une équation ou une inéquation**
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

   (a) $e^{x+1} = 1$
   (b) $2e^{-2x+1} - 2e = 0$
   (c) $e^x < 1$
   (d) $-2e^{x+2} \geqslant -2e^{-5}$
   (e) $-3e^{2x+8} + 3e \leqslant 0$
   (f) $e^{x+3} < 0$

   Correction :

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+1} = 1 \iff e^{x+1} = e^0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1$
   L'équation a une unique solution : -1

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $2e^{-2x+1} - 2e = 0 \iff 2e^{-2x+1} = 2e^1 \iff -2x + 1 = 1 \iff x = 0$
   L'équation a une unique solution : 0.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0$
   L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,0[$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-2e^{x+2} \geqslant -2e^{-5} \iff x+2 \leqslant -5 \iff x \leqslant -7$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,-7]$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-3e^{2x+8} + 3e \leqslant 0 \iff -3e^{2x+8} \leqslant -3e^{1} \iff 2x+8 \geqslant 1 \iff x \geqslant -\dfrac{7}{2}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[-\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$.

(f) Pour tout réel x, $e^{x} > 0$, donc l'inéquation n'a aucune solution.

2. **Étudier le signe d'une expression**
Soit x un réel.
(a) Étudier le signe de $-3e^{x+1}$.
(b) i. Résoudre $e^{2x-5} - 1 > 0$ et $e^{2x-5} - 1 = 0$.
ii. En déduire le signe de $e^{2x-5} - 1$.
(c) Étudier de même le signe de $e^{-x} - e$.

Correction :

(a) Quel que soit le réel x, e^{x+1} est strictement positif donc $-3e^{x+1}$ est strictement négatif.

(b) i. Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-5} - 1 > 0 \iff e^{2x-5} > e^{0} \iff 2x-5 > 0 \iff x > -\dfrac{5}{2}$.
De même, $e^{2x-5} - 1 = 0 \iff e^{2x-5} = e^{0} \iff x = -\dfrac{5}{2}$.
ii. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $e^{2x-5} - 1$		$-$	0	$+$	

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - e > 0 \iff e^{-x} > e^{1} \iff -x > 1 \iff x < -1$
De même, $e^{-x} - e = 0 \iff x = -1$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $e^{-x} - e$		$+$	0	$-$	

Exercices

Équations - Inéquations

Exercice 359. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $\exp(x) = \mathrm{e}$

b) $\exp(-x) = 1$

c) $\exp(2x-1) = \mathrm{e}$

d) $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$

e) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$

f) $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$

g) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 0$

h) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$

i) $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$

j) $x\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$

Exercice 360. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $\exp(x) < \mathrm{e}$

b) $\exp(-x) \geqslant 1$

c) $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^x$

d) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} < 2$

e) $\mathrm{e}^x < 1$

f) $\mathrm{e}^{-x} > 0$

g) $\mathrm{e}^{-x} > 1$

h) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$

i) $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$

j) $x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} < 0$

Exercice 361.

1. Déterminer les racines du polynôme :
$$P(X) = X^2 + 4X - 5.$$
2. En déduire les solutions de l'équation :
$$\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x = 5.$$
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$
   (b) $\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^{x+1} - 2\mathrm{e} = 0$
   (c) $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$

Exercice 362. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 1} > 0$

b) $-\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 2 > 0$

c) $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0$

d) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 < 0$

Exercice 363. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\mathrm{e}^{x^2+2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}}$

b) $2\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x + 3 = 0$

c) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > \sqrt{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

d) $\mathrm{e}^{x^2} + 1 \leqslant 2$

Fiche 5

La fonction exponentielle
Exponentielle d'une fonction affine

I. Fonctions $x \longmapsto e^{ax+b}$

Propriété 32
Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction affine de la forme $u(x) = ax + b$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = a \times f(x)$.

Démonstration : Admise □

Exemples

1. La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{2x+1}$ est la fonction $x \longmapsto 2 \times e^{2x+1}$.
2. La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{-8x+2}$ est la fonction $x \longmapsto -8 \times e^{-8x+2}$.

II. Fonctions $x \longmapsto e^{kx}$

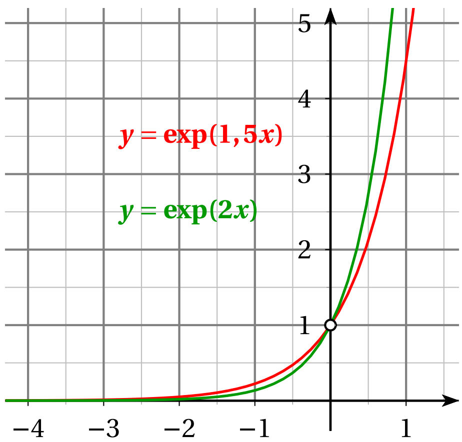
Propriété 33
Quel que soit le réel k, la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto k \times e^{kx}$.
À retenir : pour ces fonctions, $f'(0) = k$ et $f' = k \times f$.

Démonstration : Admise □

Propriété 34
si $k > 0$, la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Admise □

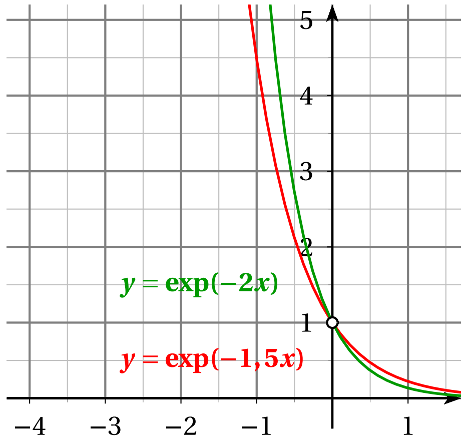
x	$-\infty$	$+\infty$
e^{kx}	0 ↗	$+\infty$



Propriété 35
si $k < 0$, la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Admise □

x	$-\infty$	$+\infty$
e^{kx}	$+\infty$ ↘	0



Exemple (Étude de variations)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x+4}$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de f.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (c) Étudier les variations de f.
2. Étudier les variations de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -7e^{-x}$.
3. Étudier les variations de h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{3x} - 3x$.

Correction :

1. (a) $f(x)$ est de la forme e^{ax+b} donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour x réel, $f'(x) = a \times e^{ax+b} = -3e^{-3x+4}$
   (b) Soit x un réel, $e^{-3x+4} > 0$ donc $f'(x) < 0$.
   (c) La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel, $g'(x) = -7 \times (-1)e^{-x} = 7e^{-x}$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour x réel, $h'(x) = 3e^{3x} - 3$.
   Résolvons l'équation $h'(x) = 0$. Soit x un réel,
   $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
   Résolvons l'inéquation $h'(x) > 0$. Soit x un réel,
   $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} - 3 > 0 \Leftrightarrow e^{3x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
   On en déduit le tableau de signes suivant pour $h'(x)$ et les variations de h. On complète le tableau avec $h(0) = e^{3\times 0} - 3 \times 0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	1	↗	

Exercices

Calculs de dérivées

Exercice 364. Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+2}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$

Exercice 365. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$

d) $f(x) = x\mathrm{e}^{x+1}$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$

f) $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$

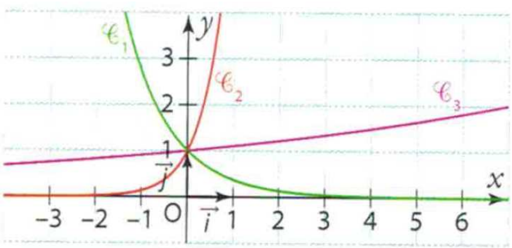
g) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

Études de variations

Exercice 366. On considère les fonctions f, g et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\quad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$

1. Associer à chaque fonction sa courbe parmi les suivantes.



2. En s'appuyant sur la question précédente, conjecturer les limites en $+\infty$ des suites ci-dessous :

   (a) (u_n) définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (b) (v_n) définie par $v_n = \mathrm{e}^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (c) (w_n) définie par $w_n = \mathrm{e}^{0,1n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 367. Déterminer les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1+x)$.

Exercice 368. Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2(x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{x}$.

1. Déterminer les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 369. Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x - \mathrm{e}^{-1}$.

1. Déterminer les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 370. Étudier le sens de variations des suites suivantes.

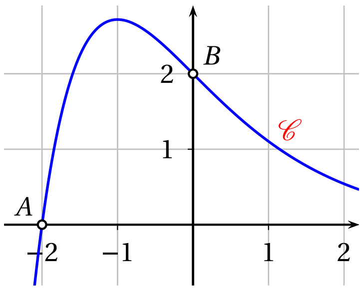
1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{5n}$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.

Fiche 6

La fonction exponentielle
Exercices de synthèse

Exercice 371. Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(0\,;\,2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$



1. À l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 372. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}+1$$

telle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;\,4)$ et $B(-1{,}5\,;\,1)$ dans un repère du plan.

1. Déterminer une expression de $f(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x :
$$f(x) = 2\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\frac{3}{\mathrm{e}^x}+1.$$
3. Démontrer que, pour tout réel x :
$$f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire le tableau de variation de f.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Exercice 373.

1. **Partie A - Résultats préliminaires**
   (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ au point d'abscisse 0.
   (b) Soit $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$.
      i. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
      ii. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

iii. Conclure sur la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

2. **Partie B - Étude d'une fonction**
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
   (a) i. Justifier, à l'aide des résultats de la partie A, que la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.
      ii. Calculer la dérivée de h.
      iii. Étudier le sens de variation de h.
   (b) i. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
      ii. Montrer que $h(x) - x = \dfrac{x(1+x-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
      iii. Utiliser la question précédente et la partie A pour étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $(\mathscr{T})$.
   (c) Contrôler les résultats précédents en traçant la droite $(\mathscr{T})$ et la courbe $\mathscr{C}$ sur votre calculatrice.

Exercice 374 - Taux d'alcoolémie.

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,4]$ par :
$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-1,25t}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur I.
2. Montrer que $f'(t) = 3(1-1,25t)\mathrm{e}^{-1,25t}$.
3. Établir le tableau de variation de f sur I.
4. Faire un tableau de valeurs de $f(t)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25.
5. Représenter f dans un repère orthogonal (prendre l'unité à 3 cm en abscisses et à 10 cm en ordonnées).
6. On admet que $f(t)$ modélise le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) en fonction du temps t (en heures) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $t = 0$.
Le taux maximum toléré est 0,5 g/L.
   (a) Cet homme est-il en infraction avec la loi s'il conduit un véhicule juste après l'absorption ?
   (b) Déterminer graphiquement son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu.
   (c) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.

Exercice 375 - Croissance de von Bertalanffy.

La fonction de croissance de von Bertalanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kilogrammes) à l'âge t (en années) des éléphantes africaines.
Son expression est :
$$W(t) = 2\,600\left(1 - 0,51\mathrm{e}^{-0,075t}\right)^3.$$

1. Évaluer la masse d'un nouveau-né.
2. On appelle $W'(t)$ est le taux de croissance à l'instant t.
Évaluer le taux de croissance d'un nouveau-né.
Indication : pour calculer W', on pourra écrire $W = 2600u^3 = 2600u^2 \times u$ avec $u :\ t \longmapsto 1 - 0,51e^{-0,075t}$ et appliquer plusieurs fois successivement la formule de dérivation d'un produit.

Chapitre 12

Fiche 1

Variables aléatoires
Activités d'introduction

Considérons la roulette ci-dessous, que l'on fait tourner ; lorsqu'elle s'arrête, on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros $1, 2, \ldots, 15$. On suppose que les quinze secteurs ont des angles égaux.

Supposons que l'on joue avec la règle suivante :

- on mise 2 € sur un numéro (mise perdue) ;
- si le numéro misé sort, on gagne un lot d'une valeur de 20 € ;
- si l'un des numéros voisins (sur la roulette) sort, on gagne un lot de consolation valant 3 € ;
- sinon on ne gagne rien.

Notons G le gain réalisé.

1. Définir la loi de probabilité sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 15\}$ des issues.
2. Expliquer pourquoi on peut considérer que les valeurs possibles du gain G sont : $-2, +1$ et $+18$.
3. On considère les trois événements : « le gain est -2 », noté $(G = -2)$; « le gain est $+1$ », noté $(G = 1)$; « le gain est $+18$ », noté $(G = 18)$. Calculer $P(G = -2)$.
4. Déterminer les valeurs de p_1, p_2 et p_3 figurant dans le tableau ci-après.

Gain G	-2	1	18
Probabilité	p_1	p_2	p_3

   Quelle est la probabilité de l'événement $(G \geqslant 0)$?

5. (a) Calculer le gain (ou la perte) réalisé par une personne qui jouerait 2 € sur chacun des 15 numéros possibles Calculer ensuite le « gain » moyen par numéro (en divisant par 15).
   (b) Calculer le nombre $-2p_1 + 1p_1 + 18p_3$ et comparer au résultat de la question précédente.

Le gain G, considéré dans l'exemple précédent, peut être considéré comme une fonction définie sur l'ensemble E par : $G : E \longrightarrow \{-2, 1, 18\}$. Nous nommerons **variable aléatoire** une telle fonction.
Le tableau de la question 4. définit une loi de probabilité sur le nouvel ensemble d'issues $E' = \{-2, 1, 18\}$, que nous définirons en cours : c'est la loi de la variable aléatoire G.
Le nombre $E(G) = -2p_1 + 1p_2 + 18p_3$, égal au « gain moyen pour une mise de 2 € » (voir question 5.), est l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire G.

Fiche 2

Variables aléatoires
Notion de variable aléatoire

I. Exemple

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « pile » et on perd 1 € pour chaque « face ».
L'ensemble des issues est $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$, et il est raisonnable de choisir l'équiprobabilité sur l'ensemble Ω. Notons G le gain correspondant à chaque issue ; les valeurs possibles du gain sont (en euros) :

$$-3 \text{ (3 faces)} ; 0 \text{ (2 faces, 1 pile)} ; +3 \text{ (1 face, 2 piles) et } +6 \text{ (3 piles)}.$$

Nous pouvons donc considérer G comme une fonction définie sur l'univers Ω à valeurs dans l'ensemble $\{-3\ ;\ 0\ ;\ +3\ ;\ +6\}$, une telle fonction est appelée variable aléatoire définie sur Ω
Les quatre événements :

$$(G=-3) = \{FFF\} \quad , \quad (G=0) = \{FFP, FPF, PFF\}$$
$$(G=+3) = \{FPP, PFP, PPF\} \quad , \quad (G=+6) = \{PPP\}$$

ont pour probabilités respectives :

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \text{ et } \frac{1}{8}$$

Nous pouvons donc considérer, sur le nouvel ensemble d'issues $\{-3\ ;\ 0\ ;\ +3\ ;\ +6\}$, une nouvelle loi de probabilité P' décrite par le tableau suivant :

Valeur du gain $G : x_i$	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = +3$	$x_4 = +6$
Probabilité$P'(x_i) = P(G = x_i)$	$p_1 = \frac{1}{8}$	$p_2 = \frac{3}{8}$	$p_3 = \frac{3}{8}$	$p_4 = \frac{1}{8}$

Cette loi de probabilité P' sera appelée « loi de la variable G ».

II. Définition

Définition 22
Une **variable aléatoire finie** X est une fonction définie sur un ensemble Ω muni d'une probabilité P, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$, qui prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On note :

$$p_i = P(X = x_i)$$

L'association pour $1 \leqslant i \leqslant n$ des p_i aux x_i permet de définir une loi de probabilité P_X sur l'ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, appelée la loi de la variable aléatoire X ainsi

$$p_i = P(X = x_i) = P_X(x_i)$$

Ainsi le rôle de la variable aléatoire X est de transporter la probabilité P définie sur Ω sur un autre ensemble E qui est l'ensemble des valeurs prises par X.

$$\boxed{\Omega, P} \xrightarrow{X} \boxed{E, P_X} \quad \text{avec} \quad p_i = P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Exercices

Exercice 376. Un joueur tire au hasard une boule dans une urne contenant 1 boule verte, 2 boules bleues et 3 boules rouges.

1. Déterminer la probabilité des évènements V :« Tirer une boule verte », B :« Tirer une boule bleue » et R :« Tirer une boule rouge ».
2. La boule verte rapporte 5 euros, une boule bleue rapporte 2 euros et une boule rouge fait perdre 3 euros. On nomme G le gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles valeurs G peut-il prendre ?
   (b) Quel est l'évènement $(G = 5)$? Déterminer sa probabilité.
   (c) Donner la loi de probabilité de G.

Exercice 377. On s'intéresse aux familles de trois enfants. On prend au hasard une de ces familles et on note le sexe de chaque enfant dans l'ordre décroissant des âges. Ainsi FFG désignera l'issue : « les deux premiers enfants sont des filles et le dernier est un garçon ».

1. (a) Écrire toutes les issues possibles.
   (b) On choisit la loi équirépartie sur l'ensemble de ces issues. Quelle est la probabilité d'obtenir l'issue FFG ?
2. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de filles dans la famille.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Compléter : $(X = 1) = \{FGG, ...\}$
   (c) Déterminer $P(X = 1)$.
   (d) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 378. La roue d'une loterie s'arrête de façon équiprobable sur l'un des numéros de 0 à 10. Le joueur, qui lance la roue, gagne un nombre d'euros égal au nombre de consonnes figurant dans l'écriture en français du numéro obtenu.

1. le gain du joueur déterminer une variable aléatoire X. déterminer la loi de probabilité de X.
2. pour faire une partie, le joueur doit payer 2 euros. Reprendre la première question avec la variable aléatoire Y qui donne le gain algébrique du joueur, en tenant compte de sa mise.

Exercice 379. Pour une mise de $0,50$ euros, on lance un dé cubique supposé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Tout numéro pair (respectivement impair) fait gagner (respectivement perdre) le nombre d'euros qui lui correspond. Soit G le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de G.

Exercice 380. On lance deux dés tétraédriques supposés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Une issue est par exemple R1V4 si la face cachée du dé rouge est celle du 1 et la face cachée du dé vert est celle du 4.

1. (a) Combien y a -t-il d'issues possibles ?
   (b) Quelle la loi de probabilité peut-on choisir sur l'ensemble de ces issues ?

   Soit S la variable aléatoire associant à chaque issue la somme des 2 nombres figurant sur les faces cachées.
2. (a) Compléter : $(S = 4) = \{R1V3; \dots\}$
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $(S = 4)$
3. Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 381. Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, 2, 3$ et 4 avec des probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 proportionnelles aux nombres $1, 2, 3$ et 4. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 382. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,1$	$0,2$	$0,2$

1. On note $(X \leqslant 3)$ l'événement : $(X = 2)$ ou $(X = 3)$. Déterminer $P(X \leqslant 3)$.
2. Déterminer $P(X > 5)$, $P(X \geqslant 5)$, $P(X < 5)$.

Fiche 3

Variables aléatoires
Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

I. Définition

Définition 23
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2,..., x_n avec les probabilités p_1,...,p_n. On appelle :

- **Espérance** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- **Variance** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

- **Écart-type** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

I.1. Remarques

1. Ces paramètres sont les valeurs théoriques, dans le modèle probabiliste, des paramètres statistiques :
   - l'espérance est la valeur théorique de la moyenne $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$;
   - la variance et l'écart-type correspondent à la variance et à l'écart-type empiriques $V = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$ et $\sigma = \sqrt{V}$.
2. Lorsque les valeurs prises par la variable aléatoire X représentent des gains ou des pertes à un jeu, alors l'espérance $E(X)$ représente le gain moyen par partie.
   - Si $E(X) > 0$ alors le jeu est favorable au joueur ;
   - Si $E(X) < 0$ alors le jeu est défavorable au joueur ;
   - Si $E(X) = 0$ alors le jeu est équitable.

   Lorsque la dispersion est grande, cela traduit le risque de « gagner gros » ou de « perdre gros ».

II. Propriété - Formule de Kœnig (ou de Kœnig-Huyghens) (admise)

Propriété 36
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2,..., x_n avec les probabilités p_1,...,p_n.
La **variance** de la variable aléatoire X est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

On écrit ainsi :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

III. Propriété (admise)

Propriété 37
Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels, on a :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \text{ et } V(aX+b) = a^2V(X)$$

IV. Exemple

On considère l'ensemble $\Omega = \{-2\,;\,0\,;\,1\,;\,3\,;\,5\,;\,6\}$ et on définit la loi de probabilité suivante sur Ω :

Valeur de X	-2	0	1	3	5	6
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$

1. Calculer l'espérance, la variance puis l'écart-type de cette loi.

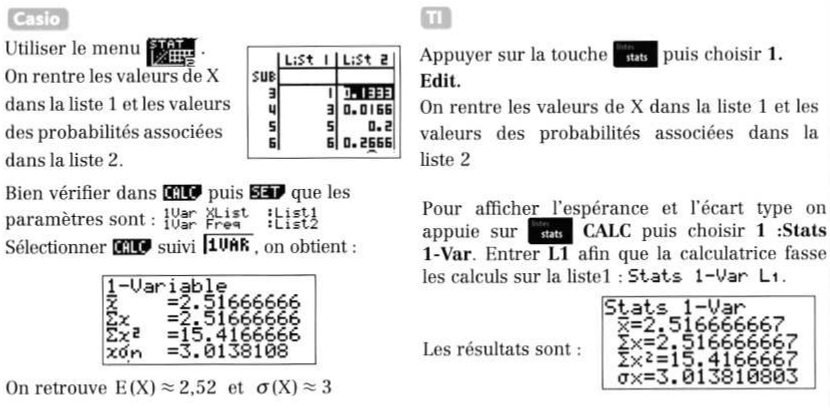
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ &= -2\times\frac{2}{15} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{2}{15} + 3\times\frac{1}{60} + 5\times\frac{1}{5} + 6\times\frac{14}{15} \\ &= \frac{151}{60} \\ &\approx 2{,}52 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 \\ &= (-2)^2\times\frac{2}{15} + 0^2\times\frac{1}{4} + 1^2\times\frac{2}{15} + 3^2\times\frac{1}{60} + 5^2\times\frac{1}{5} + 6^2\times\frac{14}{15} - \left(\frac{151}{60}\right)^2 \\ &= \frac{32699}{3600} \\ &\approx 9{,}08 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{32699}{3600}} \approx 3{,}01 \text{ arrondi au centième.}$$

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, les paramètres de la loi de probabilité.



Casio

Utiliser le menu STAT.
On rentre les valeurs de X dans la liste 1 et les valeurs des probabilités associées dans la liste 2.

Bien vérifier dans CALC puis SET que les paramètres sont : 1Var XList :List1 1Var Freq :List2
Sélectionner CALC suivi 1VAR, on obtient :

1-Variable
x̄ =2.51666666
Σx =2.51666666
Σx² =15.4166666
xσn =3.0138108

On retrouve E(X) ≈ 2,52 et σ(X) ≈ 3

TI

Appuyer sur la touche stats puis choisir **1. Edit.**
On rentre les valeurs de X dans la liste 1 et les valeurs des probabilités associées dans la liste 2

Pour afficher l'espérance et l'écart type on appuie sur stats **CALC** puis choisir **1 :Stats 1-Var**. Entrer **L1** afin que la calculatrice fasse les calculs sur la liste1 : Stats 1-Var L1.

Les résultats sont :

Stats 1-Var
x̄=2.516666667
Σx=2.516666667
Σx²=15.4166667
σx=3.013810803

Exercices

Exercice 383. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	1	2
$P(X = x_i)$	0,25	0,3	?

1. Quelle est la probabilité manquante ?
2. Calculer $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 384. Xavier et Yves jouent à deux jeux différents. les variables X et Y donnant leurs gains respectifs ont les lois de probabilités données ci dessous :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1
$P(Y = k)$	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

Comparer en terme d'espérance de gain et de risque les jeux de Xavier et Yves.

Exercice 385. Boris possède une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir « PILE » est le double d'obtenir « FACE ». Boris propose à Michel de lancer la pièce : si Michel obtient « FACE » Boris lui donne x euros ; si Michel obtient « PILE » il donne y euros à Boris. (x et y désignent des entiers naturels).

1. Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires M et B donnant les gains algébriques de Michel et Boris lors du lancer d'une pièce.
2. comment choisir x et y pour que le jeu soit équitable pour Michel ? L'est il alors pour Boris ?

Exercice 386. Une boîte contient 10 boules numérotées. Le tableau suivant en montre la composition.

Numéro	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

On paie 10 euros pour pouvoir tirer une boule au hasard et recevoir la somme, en euros, inscrite sur la boule.

1. Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de G et l'espérance $E(G)$.
2. peut-on rendre ce jeu équitable en changeant dans le tableau uniquement le numéro d'une seule boule ?

Exercice 387. Un exercice est composé de cinq questions pour lesquelles, on doit répondre obligatoirement par « vrai » ou « faux ». Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse retire 1 point. En cas de score final négatif, la note est ramenée à zéro.
On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat ayant répondu au hasard.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle note peut espérer le candidat ?
3. On décide de ramener la note de chaque candidat sur 20. Quelle note peut espérer cette fois le candidat ?

Exercice 388. Victor joue au jeu suivant : on tire une lettre au hasard dans le mot « Mathématiques ».

- Si la lettre obtenue est une voyelle, il gagne 9 euros.
- Sinon, il perd 8 euros

Partie 1

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Victor après une partie.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Faut-il conseiller à Victor de jouer à ce jeu ?

Partie 2

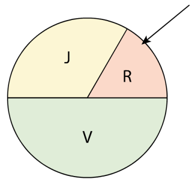
Victor décide de jouer trois parties successives.

1. Faire un arbre représentant la situation.
2. Déterminer la probabilité que Victor gagne les quatre parties.
3. On note Y son gain algébrique après quatre parties.
   (a) Déterminer l'espérance de Y.
   (b) Victor a-t-il intérêt à multiplier le nombre de parties ?

Exercice 389. Les deux frères BOLA, Tim et Tom, ont chacun organisé une tombola.
Tim propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent : 1 lot de 250 €, 4 lots de 50 € et 25 lots de 2 €.
Tom propose également 100 billets, mais annonce 5 lot de 20 €, 10 lots de 15 €, 15 lots de 10 € et 2à lots de 5 €. et 20 lots de 5 €.
Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 €.
Soit X et Y les gains algébriques respectifs liés à l'achat d'un billet chez Tim et Tom.

1. Calculer pour chaque tombola et comparer ;
   (a) la probabilité d'avoir un billet gagnant ;
   (b) la probabilité de gagner au moins 5 € ;
   (c) la probabilité de gagner au moins 40 €.
2. Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X et Y. Comparer et interpréter.
3. Calculer la variante et l'écart type de X et de Y. Que pourrait-on conseiller à Eva, qui hésite entre Tim et Tom, sachant qu'elle n'a pas le goût du risque ?

Exercice 390.
Une roue de loterie est divisée en trois secteurs : un rouge (R), un jaune (J) et un vert (V), d'angles au centre respectifs : 60°, 120° et 180°.
Lorsqu'elle s'arrête de tourner, un repère fléché indique l'une des trois couleurs avec une probabilité proportionnelle à l'angle du secteur concerné.



1. Déterminer là loi de probabilité sur l'ensemble des issues $\Omega = J, V, R$.
2. Le joueur perd 2 € si la flèche indique la partie verte, gagne $0,50$ € si la flèche indique la partie jaune et x euros si la flèche indique la partie rouge.
   Soit G le gain algébrique du joueur.
   (a) Calculer $E(G)$.
   (b) Comment choisir x pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 391. On considère le jeu suivant : le joueur place une mise m sur la table, $m > 0$, puis tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
Si la carte tirée est :

- un as, le joueur gagne 4 fois sa mise ;
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise ;
- une dame, le joueur gagne sa mise ;
- un valet, le joueur gagne sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise. On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée et on nomme X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (en tenant compte de la mise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ en fonction de m.
3. Existe-t-il une valeur de m telle que le jeu soit équitable ?

Fiche 4

Variables aléatoires
Exercices supplémentaires

Exercice 392. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X < 2)$, $P(X > 4)$,$P(1,3 < X < 3,5)$.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 393. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
$0,92$	$0,06$	$0,016$	$0,004$

   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 394 - D'après Baccalauréat 96.
Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues parmi les trois boules extraites. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de l'urne, en remettant, après chaque tirage, la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours des trois tirages. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et son écart type.

Chapitre 13

Fiche 1

Produit scalaire dans le plan
Définition par le défaut d'orthogonalité

I. Norme d'un vecteur - rappels

Définition 24
Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La longueur AB s'appelle la **norme du vecteur $\vec{u}$**. On la note $\|\vec{u}\|$. Ainsi, on a $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Si, de plus, $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un **vecteur unitaire**.

Propriété 38
1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel, alors : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$, alors :
$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2.$$

II. Activité d'introduction - Défaut d'orthogonalité

Exercice 395.

1. **Énoncé vectoriel du théorème de Pythagore**

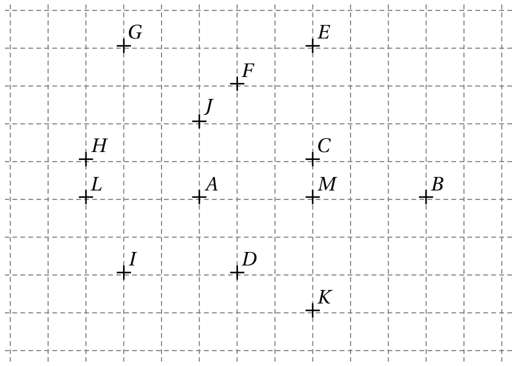
   Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que :
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.$$
   Justifier l'affirmation suivante :
$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

Que se passe-t-il lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont plus orthogonaux ? L'expression est-elle positive ? Négative ? C'est à ces questions que l'on se propose de répondre maintenant.

2. **Observer - conjecturer**
   Définition

   On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, qui se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ » et défini par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

On considère la figure suivante où chaque carré du quadrillage a pour côté 1 unité.



(a) Compléter le tableau suivant en prenant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{v}$	$\lVert\overrightarrow{u}\rVert^2$	$\lVert\overrightarrow{v}\rVert^2$	$\lVert\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rVert^2$	$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{AC}$	$6^2 = 36$	$3^2+1^2 = 9+1 = 10$	$3^2+1^2 = 9+1 = 10$	$\frac{1}{2}(36+10-10) = 18$
$\overrightarrow{AD}$				
$\overrightarrow{AB}$				
$\overrightarrow{AA}$				
$\overrightarrow{AE}$				
$\overrightarrow{AF}$				
$\overrightarrow{AG}$				
$\overrightarrow{AH}$				
$\overrightarrow{AI}$				
$\overrightarrow{AJ}$				
$\overrightarrow{AK}$				
$\overrightarrow{AL}$				
$\overrightarrow{AM}$				

(b) Conjecturer des réponses aux questions suivantes :

i. Dans quel(s) cas un produit scalaire est-il positif ? négatif ? nul ?

ii. Y a-t-il des points différents qui donnent le même produit scalaire ? À quelle configuration géométrique les points concernés semblent-ils appartenir ?

iii. Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ?

III. Définition - Produit scalaire et orthogonalité

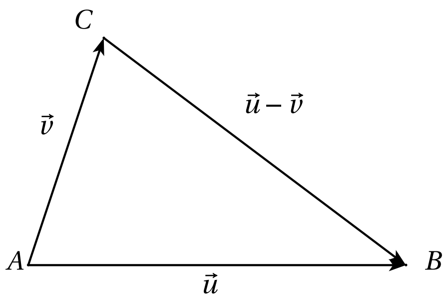
III.1. Définition

Définition 25
On appelle **produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$** le nombre réel, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, qui se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ » et qui est défini par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Remarques

1. Soit A, B et C trois points tels que : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.



On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\end{aligned}$$

2. Si $\vec{u}=\vec{v}$, alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{u}&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2\|\overrightarrow{u}\|^2\right)\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2\end{aligned}$$

On note $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$, ce nombre s'appelle **le carré scalaire de $\vec{u}$**.

III.2. Produit scalaire et orthogonalité

Définition 26

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls**. Soit A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. On dit que **les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** lorsque (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème 5 (Traduction vectorielle du théorème de Pythagore)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

(ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Démonstration : On raisonne par disjonction des cas.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, supposons, par exemple, que $\vec{u} = \vec{0}$.
   Alors :
   - D'une part, par définition,
     $$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$
   - D'autre part, le vecteur nul étant orthogonal à tout vecteur, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

   Par conséquent, les deux énoncés sont vrais donc équivalents.
2. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a montré l'équivalence dans l'activité. □

Exercices

Exercice 396. On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.
3. En déduire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercice 397. On considère trois points E, F et G du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1. $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG}$
2. $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE}$
3. $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FE}$

Exercice 398. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{a}\|$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right\|$.
2. En déduire $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$.

Fiche 2

Produit scalaire
Expression analytique

I. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Théorème 6
Soit dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration : Voir partie exercices. □

II. Règles de calcul

Propriété 39
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel, on a :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Démonstration :

1. On utilise la définition du produit scalaire.
2. Voir partie exercices.
3. Voir partie exercices. □

Propriété 40 (Identités remarquables)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration : On utilise les règles de calcul de la propriété précédente. □

III. Autre expression utilisant les normes

Propriété 41
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

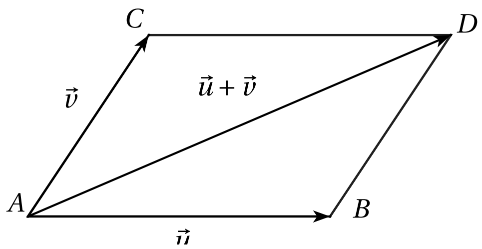
Démonstration : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$ quelconque, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) &= \frac{1}{2}\left(((x+x')^2+(y+y')^2)-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\
&= xx'+yy'\\
&= \vec{u}\cdot\vec{v}.
\end{aligned}$$

□

Remarque
Soit A, B et C trois points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et le point D défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



On a :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - BD^2\right)
\end{aligned}$$

Exercices

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 399 - Expression analytique.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$ quelconque, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

Exercice 400 - Propriétés algébriques.
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

1. Montrer que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
2. Soit k un réel. Montrer que $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Expression analytique du produit scalaire

Exercice 401. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$
2. $\vec{s}\cdot\vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+2\\1\end{pmatrix}$
4. $\vec{c}\cdot\overrightarrow{UV}$ avec $\vec{c}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24}+5\,;\,1)$ et $V(5\,;\,\sqrt{2})$
5. $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $A(-1\,;\,2)$ et $B(-3\,;\,6)$
6. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MR}$ avec $C(5\,;\,6)$, $D(-1\,;\,4)$, $M(3\,;\,7)$ et $R(8\,;\,9)$
7. $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{EF}$ avec $E(0\,;\,1)$, $F(3\,;\,0)$, $S(8\,;\,8)$ et $T(5\,;\,5)$

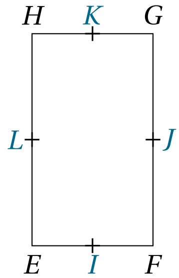
Exercice 402.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Calculer :

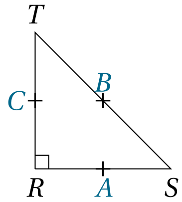
1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$
3. $(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

Exercice 403. On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF=4$ et $EH=7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



1. Reproduire la figure.
2. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :
   (a) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FH}$
   (b) $\overrightarrow{JL}\cdot\overrightarrow{EG}$
   (c) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}$
   (d) $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{EK}$
   (e) $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IG}$
   (f) $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{JK}$

Exercice 404. On considère le triangle isocèle et rectangle RST ci-dessous, tel que $RS=RT=4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1. $\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{RS}$
3. $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{SA}$
4. $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{CB}$

Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 405. On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(-2\,;\,-2)$, $D(13\,;\,-5)$ et $E(4\,;\,3)$.

1. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2. Même question pour :
   (a) (AC) et (BD)
   (b) (BE) et (CD)

Exercice 406. On considère quatre points $J(6\,;\,1)$, $K(2\,;\,4)$, $L(1\,;\,-5)$ et $M\left(-\dfrac{5}{2}\,;\,-2\right)$.

1. Le triangle JKL est-il rectangle en J ?
2. Le triangle JKM est-il rectangle ?

Exercice 407. On considère trois points $A(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3})$ et $C(-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7}+2\sqrt{3})$.
Montrer que ABC est rectangle en B.

Exercice 408. On considère quatre points $Q(2\,;\,-2)$, $R(1\,;\,1)$, $S(4\,;\,2)$ et $T(5\,;\,-1)$.
Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

Exercice 409. On considère trois points $A(5{,}2\,;\,4)$, $B(6\,;\,3{,}1)$ et $C(1\,;\,y)$.
Déterminer y tel que ABC soit rectangle en A.

Exercice 410. On considère quatre points $A(0\,;\,0)$, $B(6\,;\,2)$, $C(-1{,}5\,;\,4{,}5)$ et $D\left(2{,}5\,;\,\dfrac{35}{6}\right)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze rectangle puis calculer son aire.

Exercice 411. On considère deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées, d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

1. Donner un vecteur directeur de chacune des deux droites.
2. En déduire la propriété suivante :
   Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
3. Parmi les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = 2x+3$, $y = -2x+5$ et $y = -\frac{1}{2}x - 6$, lesquelles sont perpendiculaires ?

Propriétés algébriques

Exercice 412. Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

1. $\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(5\vec{u}+4\vec{v}\right)$
2. $\left(5\vec{u}-4\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$
3. $\left(-3\vec{u}+6\vec{v}\right)\cdot\left(-\vec{u}-5\vec{v}\right)$
4. $\left(-\vec{u}-5\vec{v}\right)\cdot\left(3\vec{u}-6\vec{v}\right)$

Exercice 413. Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{r}\cdot\vec{s}$, $\|\vec{r}\|$ et $\|\vec{s}\|$.

1. $\left(\frac{1}{3}\vec{r}+\vec{s}\right)\cdot\left(6\vec{r}-9\vec{s}\right)$
2. $\left(-\sqrt{7}\vec{r}+\sqrt{2}\vec{s}\right)\cdot\left(\sqrt{7}\vec{r}+\sqrt{2}\vec{s}\right)$
3. $\left((1+\sqrt{3})\vec{r}+5\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{r}+\vec{s}\right)$

Exercice 414. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

1. (a) Calculer $\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)$.
   (b) En déduire $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|$.
2. En utilisant la méthode précédente, calculer :
   (a) $\|8\vec{u}+5\vec{v}\|$
   (b) $\|-6\vec{u}-2\vec{v}\|$

Exercice 415. En reprenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice précédent, calculer :

1. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2-\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$
2. $\|2\vec{u}-3\vec{v}\|^2+\|4\vec{u}+5\vec{v}\|^2$

Exercice 416. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

1. Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u}+t\vec{v}\| = 2$? Si oui, le ou les déterminer.
2. Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u}+t\vec{v}\| = 1$? Si oui, le ou les déterminer.
3. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \|\vec{u}+t\vec{v}\|^2$.
   (b) En déduire la plus petite valeur possible de $\|\vec{u}+t\vec{v}\|$.

Exercice 417. On sait que cinq points du plan A, B, C, D et E vérifient :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = -4$

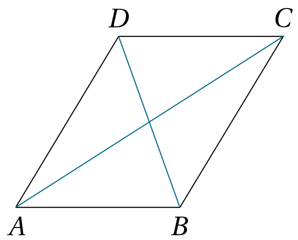
Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Exercice 418. On considère quatre points A, B, C et D du plan.

1. À l'aide d'une identité remarquable, montrer que :
   - $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$
   - $CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right)$
2. En déduire $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
3. (a) En utilisant la propriété précédente, montrer que les cerf-volant ont des diagonales perpendiculaires.
   (b) La réciproque est-elle vraie, autrement dit, un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est-il nécessairement un cerf-volant ?

Exercice 419 - Identité de polarisation.

1. Démontrer l'identité de polarisation :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$
2. On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.



   (a) En utilisant l'identité de polarisation démontrée à la question précédente, justifier que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2-\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right\|^2\right).$$
   (b) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Fiche 3

Produit scalaire
Angles et projection orthogonale

I. Expression du produit scalaire utilisant distance et angle

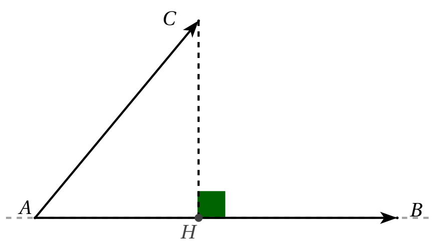
Propriété 42
Soit A, B et C trois points distincts, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

Démonstration : Voir partie exercices. $\square$

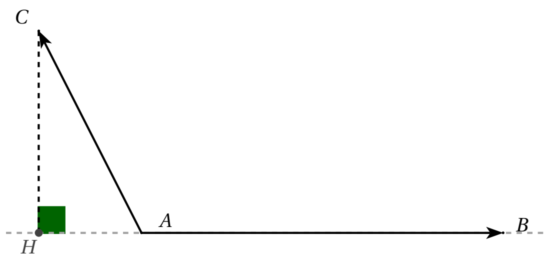
Conséquence
Soit A, B et C trois points alignés :
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

II. Produit scalaire et projetés orthogonaux

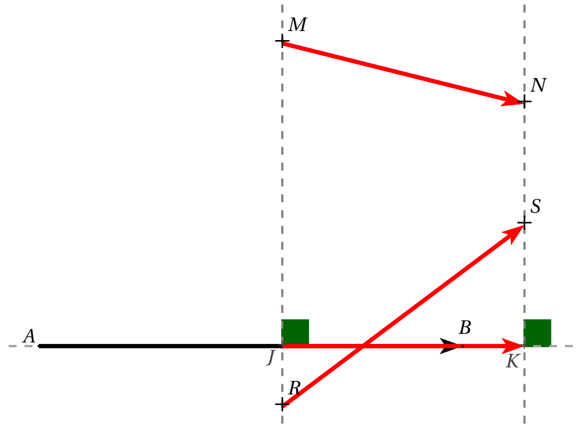
Propriété 43
Soit A et B deux points distincts,
1. Si H est le projeté orthogonal d'un point C sur la droite (AB), alors :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$
2. Si J et K sont les projetés orthogonaux respectifs de deux points M et N sur la droite (AB), alors :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$

Démonstration :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$
   Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$; par suite, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
2. Cette proposition se démontre de la même façon.
   On écrit :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KN})$, puis on utilise l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MJ}$ d'une part, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KN}$ d'autre part.
   Si J et K sont les projetés orthogonaux respectifs de deux points M et N sur la droite (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$$

Exercices

Sauf indication contraire, on travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Démonstration des propriétés du cours

Exercice 420 - Cosinus et projeté orthogonal.
Soit A, B et C trois points distincts du plan tels que $\widehat{BAC}=\alpha$. On se place dans le repère orthonormé direct $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1. Exprimer en fonction de AB, AC et α les coordonnées des points B, C et H.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.
3. Valider les conjectures émises dans l'activité de la fiche 1.

Produit scalaire et angles

Exercice 421. A, B et C étant trois points du plan, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec :

1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=5$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2$ et $\cos\widehat{BAC}=0{,}1$
2. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=23$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=11$ et $\cos\widehat{BAC}=0{,}93$
3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=5$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=8$ et $\widehat{BAC}=30^\circ$
4. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=7$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2$ et $\widehat{BAC}=300^\circ$
5. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=12$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\widehat{BAC}=45^\circ$
6. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=9$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\overrightarrow{AB}=-1{,}5\overrightarrow{AC}$

Exercice 422. A, B et C étant trois points du plan, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec :

1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\dfrac{5}{6}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $\widehat{BAC}=150^\circ$
2. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=6$ et $\widehat{BAC}=45^\circ$
3. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{8}$ et $\widehat{BAC}=180^\circ$
4. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2}+1$ et $\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\overrightarrow{AB}$

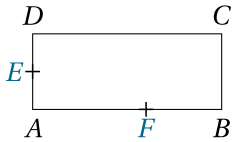
Exercice 423. On considère un triangle ABC avec $AB=5$ et $BC=6$ et $\widehat{ABC}=60^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Exercice 424. On considère trois points $R(-1\,;\,-2)$, $S(5\,;\,-4)$ et $T(3\,;\,6)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$, RS et RT.
   (b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à 0,01 degré près.
2. Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3. En déduire $\widehat{STR}$.

Exercice 425. On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01°près :

a) $\widehat{BAC}$ b) $\widehat{DFB}$ c) $\widehat{DFC}$ d) $\widehat{CEF}$

Exercice 426. On considère un triangle OMN tel que $OM = 5$, $ON = 8$ et $\widehat{MON} = 45°$ radians.
Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

Exercice 427. On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

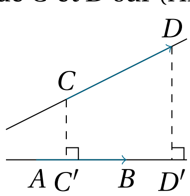
1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI}\cdot\overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à 0,1 près.

Exercice 428. On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à 0,1 près.
2. Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

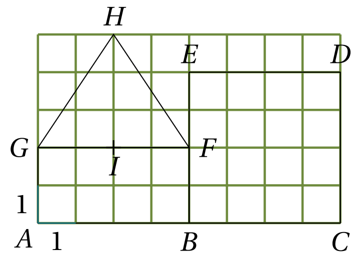
Produit scalaire et projection orthogonale

Exercice 429. Projection de deux points sur une droite Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



1. Montrer l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

Dans les trois exercices suivants, on se réfère à la figure suivante :



Exercice 430. En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants (on reproduira la figure et on pourra introduire de nouveaux points) :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ | c) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}$ | e) $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI}$ | d) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FH}$ | f) $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{FD}$

Exercice 431 - Décomposition de vecteurs.

1. (a) Montrer que :
   $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH} = \left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IH}\right)$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}$.
2. En décomposant les deux vecteurs de la même manière qu'à la question précédente, calculer :
   (a) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}$. (b) $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{EI}$.

Exercice 432. En utilisant le produit scalaire, calculer les mesures des angles suivants, on donnera le résultat en degrés arrondi à 0,1 près.

a) $\widehat{AFB}$ b) $\widehat{IFD}$ c) $\widehat{HFG}$

Exercice 433. On considère trois points $A(-1\,;\,1)$, $B(2\,;\,2)$ et $C(0\,;\,7)$ et B', le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

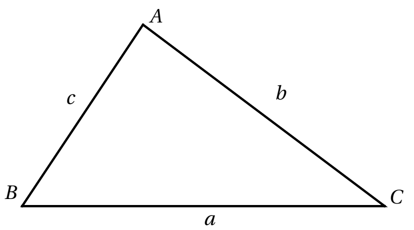
1. Exprimer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.
2. En déduire CB' puis BB'.
3. Calculer l'aire de ABC.

Fiche 4

Produit scalaire
Théorème d'Al-Kashi

Théorème d'Al-Kashi ou Pythagore généralisé

> **Théorème 7**
> Soit ABC un triangle, on a :
> $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$



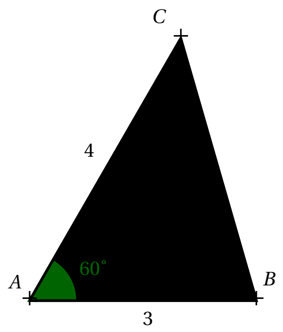
On note généralement $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$.
On a alors :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

Démonstration : Soit ABC un triangle, on a :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= BA^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} + AC^2 \\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.
\end{aligned}$$ □

Remarque
Le théorème de Pythagore est ainsi un cas particulier de ce théorème, le cosinus d'un angle droit étant nul.

Exemple
ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer BC et $\widehat{ABC}$.



D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \\
&= 9 + 16 - 24\cos(60°) \\
&= 25 - 12 \\
&= 13
\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{13}$.

De même, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$.

Donc : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \dfrac{9+13-16}{2\times 3\times\sqrt{13}} = \dfrac{6}{6\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$

Donc : $\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{13}}{13}\right) \approx 74^\circ$ à 1° près.

Exercices

Exercice 434. Calculer si possible les longueurs des autres côtés et des autres angles du triangle ABC.

1. $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 7$
2. $AB = 8$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 75^\circ$
3. $AB = 5$, $BC = 9$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$
4. $AB = 8$, $AC = 6$ et $\widehat{ACB} = 60^\circ$

Exercice 435. Le triangle ABC est tel que $AB = 4$, $BC = 4\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 24$. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$, puis déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 436. ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 7$.

1. Calculer ses trois angles à $0,1^\circ$près.
2. (a) Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de A
   (b) En déduire l'aire de ABC à $0,1$ près.
3. Calculer la longueur de la médiane issue de B à $0,1$ près.

Exercice 437.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1. Calculer $\widehat{AHB}$ à $0,1$ près.
2. Calculer $\widehat{AKG}$ à $0,1$ près.

Résolution de triangle

Exercice 438. En géométrie, résoudre un triangle consiste à en donner les longueurs des côtés et les mesures des angles.

1. On considère un triangle ABC avec $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45^\circ$.
   (a) Déterminer la longueur BC avec le théorème d'Al-Kashi.
   (b) Déterminer les mesures des angles de ABC. On arrondira à $0,1^\circ$près.
2. Résoudre le triangle ABC avec $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 20^\circ$. On arrondira les longueurs à $0,1$ cm et les mesures des angles à $0,1^\circ$près.

Exercice 439. On considère un triangle ABC avec $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

1. Tracer un triangle correspondant à ces conditions.
2. Écrire le théorème d'Al-Kashi faisant intervenir l'angle $\widehat{ABC}$ et remplacer par les valeurs connues.
3. (a) Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 21 = 0$.
   (b) Résoudre le triangle ABC.

Fiche 5

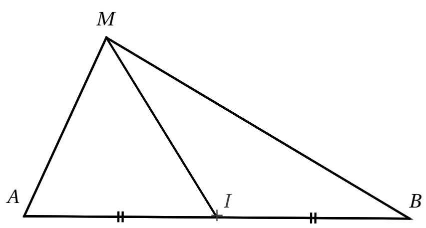
Produit scalaire
Théorème de la médiane

Théorème de la médiane

Théorème 8
Soit A, B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration :



On a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 \end{aligned}$$

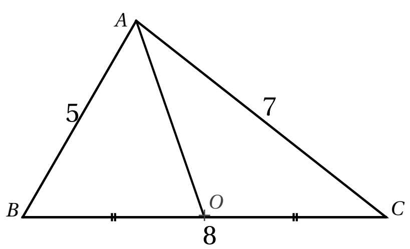
Comme I est le milieu du segment $[AB]$, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
De plus,

$$\overrightarrow{IA}^2 = IA^2 = \frac{AB^2}{4} \text{ et } \overrightarrow{IB}^2 = IB^2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Par conséquent :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Exemple
ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$ et O est le milieu de $[BC]$.
Calculer AO.



D'après le théorème de la médiane,

$$AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Donc $\quad 2AO^2 = 25 + 49 - \frac{64}{2}$

Donc $\quad 2AO^2 = 74 - 32 = 42$

Donc $\quad AO^2 = 21$

Donc $\quad AO = \sqrt{21}$

Exercices

Exercice 440. Un triangle a pour côtés $AB = 8$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Déterminer les longueurs des trois médianes.

Exercice 441. On considère un segment $[AB]$ de longueur 4. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$?

Exercice 442. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 6$ et $BC = 5$. Soit I le milieu de $[AB]$.

1. calculer CI
2. Déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 61$. Vérifier que $C \in \mathscr{L}$.

Exercice 443. $ABCD$ est un rectangle de centre O. Un point M est placé à l'intérieur du rectangle de telle sorte que $MA = 30$ m, $MB = 18$ m et $MC = 6$ m. On souhaite connaître MD.

1. Faire une figure en choisissant une échelle adaptée.
2. Démontrer que $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
3. En déduire MD.

Exercice 444. Soit $[AB]$ un segment de longueur 2 et I le milieu de $[AB]$. On cherche Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 5$.

1. Démontrer, à l'aide de la relation de Chasles que pour tout point M du plan,
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$
2. Démontrer que M appartient à Γ si et seulement si $IM = \sqrt{6}$.
3. En déduire la nature de Γ.

Exercice 445.

1. Soit I, le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que :
$$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2.$$
3. Démontrer le théorème de la médiane :
Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout M du plan,
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$
4. Montrer que $MA^2 + MB^2 = k$ est équivalent à $MI^2 = \dfrac{2k - AB^2}{4}$.
5. (a) En déduire pour quelles valeurs de k il existe des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$.

   (b) Quel est alors l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

Exercice 446. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1. En s'inspirant du travail fait dans l'exercice précédent, déterminer l'ensemble des points M, vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ dans le cas où $A(1~;~2)$ et $B(4~;~-2)$ dans un repère orthonormé.
2. Donner, dans le cas général, l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Fiche 6

Produit scalaire
Exercices et problèmes

Exercice 447. On considère un carré de côté a et l'on désigne par I le milieu du côté $[BC]$. Évaluer l'angle $\widehat{IAC}$ à $0,01^\circ$près.

Exercice 448. $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB = 3$ et $AD = 6$. E et F sont les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD)

1. Calculer de deux façons $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BD puis EF.

Exercice 449. $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB = a$ et $AD = b$. E et F sont les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD)

1. Calculer de deux façons $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BD puis EF.

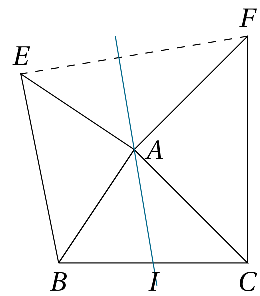
Exercice 450. $ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $AB = 2a$ et $CD = a$ et de hauteur $AD = h$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a et h.
2. Peut-on choisir h de telle sorte que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires.

Exercice 451. Soit $ABCD$ est un rectangle avec $AB = a$ et $AD = b$. On nomme E le milieu de $[AB]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (DE) et (AC) soient perpendiculaires.

Exercice 452. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. On construit les triangles BAE et CAF rectangles isocèles en A à l'extérieur du triangle ABC.
On pose $\theta = \widehat{BAC}$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ en fonction de b, de c et de θ.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Montrer que la médiane (AI) du triangle ABC est la hauteur issue de A dans le triangle AEF



Chapitre 14

Fiche 1

Géométrie plane
Vecteurs directeurs- rappels

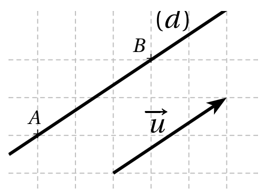
On considère que le plan est muni d'un repère.

I. Équations de droite

I.1. Vecteur directeur

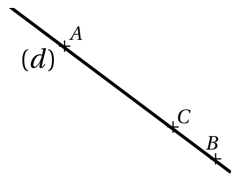
Définition 27

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, (d) une droite. On dit que $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite (d) si et seulement si il existe deux points **distincts** A et B de (d) tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

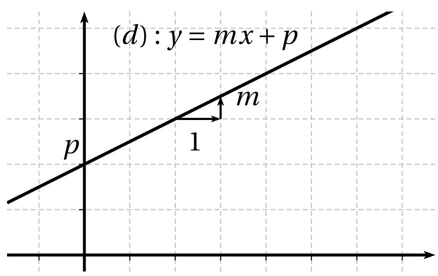


Remarques

1. Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur directeur de droite car il n'a pas de direction.
2. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d), alors, pour tout réel k non nul, $k\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d). Une droite a donc une infinité de vecteurs directeurs.
3. Sur la figure ci-contre, la droite (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $3\overrightarrow{AB}$, $-\overrightarrow{AC}$, etc.

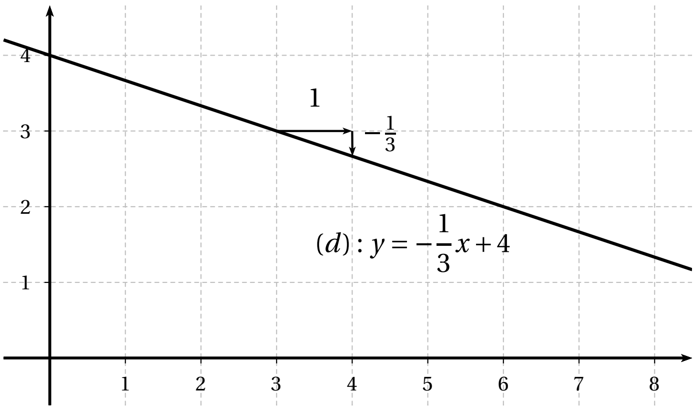


4. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de deux droite (d) et (d'), alors :
$$(d)//(d') \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires.}$$
5. Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$ avec m et p deux réels dans un repère. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).



Exemple
Un vecteur directeur de la droite (d) d'équation $y = -3x + 4$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur non nul dont les coordonnées sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite. Par exemple, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

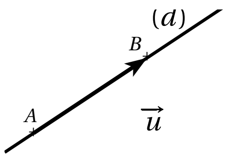


> **Propriété 44**
> Soit (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et A un point de (d).
> Soit M un point. On a :
> $$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$

Démonstration :

Soit B le point de (d) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\iff A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$



□

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ I,\ J)$.

Exercice 453.
1. Soit $A(2\ ;\ -3)$ et $B(4\ ;\ -5)$. Tracer la droite (AB).
2. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).

Exercice 454.
1. Tracer la droite (d) passant par le point A de coordonnées $(-1\ ;\ 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
2. Le point B de coordonnées $(5\ ;\ -4)$ appartient-il à la droite (d) ?

Exercice 455.
1. La droite (d) a pour équation $y = \frac{5}{7}x + 2$.
   (a) Donner un vecteur directeur de (d). En déduire un vecteur directeur de (d) à coordonnées entières.
   (b) Tracer la droite (d).
2. Reprendre la question 1. avec $(d) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Exercice 456.
1. (a) Tracer la droite (d) passant par $A(0\,;\,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
   (b) Donner l'équation réduite de la droite (d).
2. Reprendre la question 1. avec $A(1\,;\,-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 457. Quel est le coefficient directeur d'une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ avec :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\2\end{pmatrix}$

Fiche 2

Géométrie plane
Équation cartésienne de droite - rappels

I. Équation cartésienne d'une droite

Propriété 45
Soit (d) une droite du plan. Il existe trois réels a, b et c avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tels que (d) admette pour équation

$$ax + by + c = 0.$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de cette droite.

Démonstration : Soit (d) une droite du plan. Soit A un point de (d) et $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d).
Soit M un point du plan. Alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - yA \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x - x_A) \times \beta - \alpha \times (y - y_A) = 0 \\ &\iff \beta x - \alpha y - x_A \beta + \alpha y_A = 0 \\ &\iff \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a = \beta \\ b = -\alpha \\ c = -x_A \beta + \alpha y_A \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de (d), on a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.

On a donc établi qu'il existe trois réels a, b et c avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tels que (d) admette pour équation $ax + by + c = 0$.
De plus, comme $a = \beta$ et $b = -\alpha$, alors $\alpha = -b$ et $\beta = a$, et par conséquent, $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Donc la droite (d) admet bien pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. □

Propriété 46 (réciproque)
Soit a, b et c trois nombres, avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
L'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite qui admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Démonstration : Soit a, b et c trois nombres, avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
Cherchons l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $ax+by+c=0$.

- Si $\boldsymbol{b \neq 0}$
  On a alors $ax+by+c=0 \iff y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.
  Cette équation est de la forme $y=mx+p$ avec m et p deux réels. C'est donc l'équation réduite d'une droite. Elle admet le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{a}{b} \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, et par conséquent, le vecteur $-b\vec{v}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, est également un vecteur directeur de (d).
- Si $\boldsymbol{b = 0}$
  Comme $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on a alors $a \neq 0$. Par conséquent :
  $$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff ax+0y+c=0 \\ &\iff ax+c=0 \\ &\iff x=-\frac{c}{a} \end{aligned}$$
  Cette équation est celle d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. De plus, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ est bien un vecteur directeur de (d). $\square$

Définition 28
Soit (d) une droite. Une équation de (d) de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ est appelée **équation cartésienne** de la droite (d).

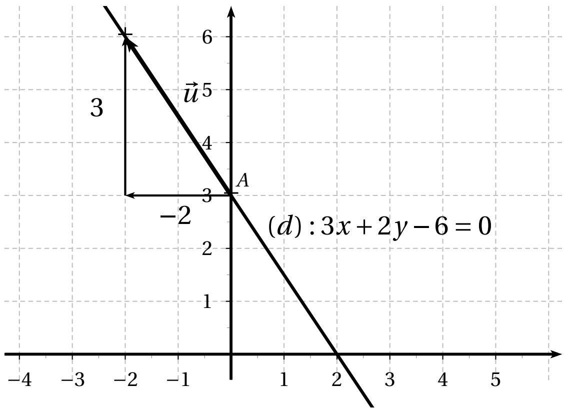
Remarque
Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. En multipliant les deux membres de l'équation par un réel k non nul, on obtient une équation équivalente : $kax+kby+kc=0$, qui est donc une autre équation cartésienne de (d).
Ainsi, toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes. On parle donc d'**une** équation cartésienne d'une droite mais de **l**'équation réduite d'un droite, car celle-ci est unique.

Exemples

1. **Construire une droite d'équation cartésienne donnée.**
   Soit (d) d'équation $3x+2y-6=0$. Construire la droite (d) dans un repère du plan.
   — Déterminons un vecteur directeur de (d) :
   D'après la propriété 2, la droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— Déterminons les coordonnées d'un point de (d) :
Soit A le point de (d) d'abscisse 0. On a $3x_A + 2y_A - 6 = 0$, donc $0 + 2y_A - 6 = 0$, donc $y_A = 3$.
Le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3)$ est donc un point de (d).

— On construit alors la droite :



Remarque
On peut aussi retrouver l'équation réduite de (d) :
Soit x un réel,

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 6 = 0 &\iff 2y = -3x + 6 \\ &\iff y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Ainsi, (d) est la droite de coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine 3.

2. **Déterminer l'équation cartésienne d'une droite.**
Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A de coordonnées $(5\ ;\ 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

— **Méthode 1**
Soit M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ un point du plan. Alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x-5) \times 4 - (y-2) \times (-3) = 0 \\ &\iff 4x - 20 + 3y - 6 = 0 \\ &\iff 4x + 3y - 26 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (d) est $4x + 3y - 26 = 0$.

— **Méthode 2**
On sait que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), donc il existe un réel c tel que (d) admette pour équation cartésienne $4x + 3y + c = 0$.
De plus, le point A de coordonnées $(5\ ;\ 2)$ appartient à (d).
On a donc : $4x_A + 3y_A + c = 0$,
donc : $4 \times 5 + 3 \times 2 + c = 0$,
donc : $20 + 6 + c = 0$,
donc : $c = -26$.
Conclusion : une équation cartésienne de la droite (d) est $4x + 3y - 26 = 0$.

II. Exercices

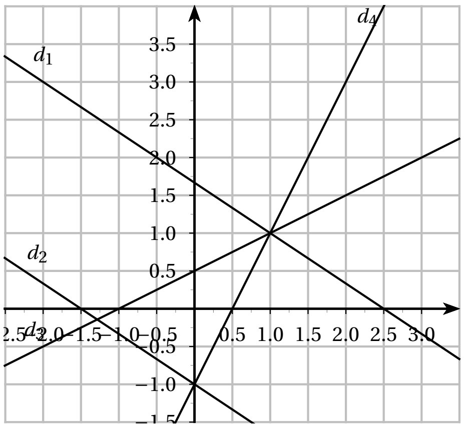
Le plan est muni d'un repère $(O\,;\ I,\ J)$.

Exercice 458. Soit d la droite d'équation : $2x - 3y + 7 = 0$.

1. Le point $A(-2\,;\,1)$ appartient-il à d ?
2. Même question avec $B\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ et $C\left(3\,;\,\dfrac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\dfrac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\dfrac{1}{5}$.

Exercice 459. Associer à chaque droite d_1, d_2, d_3, d_4 une équation cartésienne parmi les équations suivantes :

(1) $x - 2y + 1 = 0$	(2) $2x + 3y - 5 = 0$	(3) $2x - y - 1 = 0$	(4) $2x + 3y + 3 = 0$



Exercice 460. Soit d la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de d et la tracer dans un repère.

1. $A(-3\,;\,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
2. $A(2\,;\,-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
3. $A(0\,;\,-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\35\end{pmatrix}$
4. $A(-2\,;\,2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{5}\end{pmatrix}$

Exercice 461. Donner une équation cartésienne de la droite passant par A et parallèle à la droite d.

1. $A(2\,;\,-3)$ et $d : 2x - y + 2 = 0$
2. $A(0\,;\,-3)$ et $d : -3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 462. Placer les points $A(-2\,;\,4)$,$B(2\,;\,2)$, $C(-5\,;\,0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
   (b) Déterminer les coordonnées de D.
2. (a) Soit $d\ :\ 6x + y - 14 = 0$. Vérifier que B et D appartiennent à d.
   (b) Trouver une équation cartésienne de la droite (AC).
   (c) Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
   (d) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.

3. (a) Calculer les coordonnées de k milieu de $[AB]$ et de L milieu de $[CD]$.
   (b) Démontrer que les points E, K et L sont alignés.
4. Pour aller plus loin.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AD) et (BC), puis les coordonnées de leur point d'intersection F.
   (b) Montrer que E, F, K et L sont alignés.

Exercice 463. Démontrer par le calcul que les trois médianes du triangle ABC où $A(2\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ -6)$ et $C(-2\ ;\ -1)$ sont concourantes et préciser leur point d'intersection.

Fiche 3

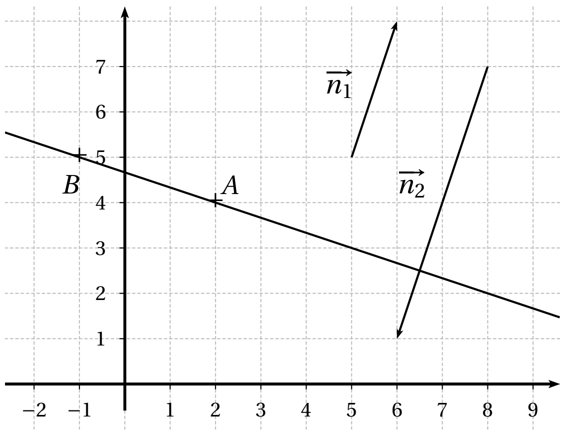
Géométrie plane
Vecteur normal et équation cartésienne

I. Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I,\ J)$.

Définition 29
Soit (d) une droite. On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** (d) lorsque $\vec{u}$ est non nul et est orthogonal à un vecteur directeur de (d).

Exemple
Soit A et B les points de coordonnées $(2\ ;\ 4)$ et $(-1\ ;\ 5)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et il a pour coordonnées $\binom{-3}{1}$.
Soit $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $\binom{1}{3}$ et $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $\binom{-2}{-6}$.



On a $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 + 3 = 0$ et $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 - 6 = 0$.
Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont des vecteurs normaux à la droite (AB).

Propriété 47
Soit (d) une droite. Soit a et b deux réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.
Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) la droite (d) admet le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$ comme vecteur normal ;

(2) il existe un réel c tel que (d) admette pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

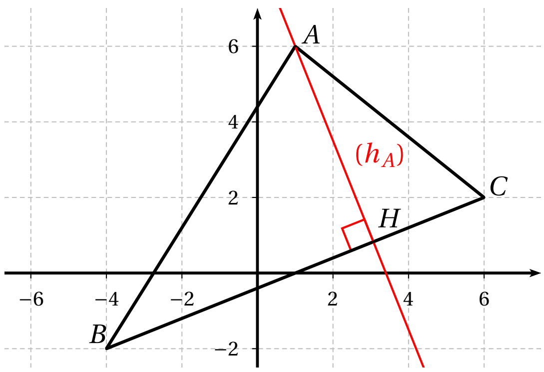
Démonstration : Soit (d) une droite. Soit a et b deux réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

- **Montrons que (1) ⇒ (2).**
  Supposons que $\vec{n}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à la droite (d).
  Soit M un point du plan et A un point de (d).
  On a alors :
  $$\begin{aligned} M \in (d) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \end{aligned}$$
  Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-x_A}{y-y_A}$. Donc :
  $$\begin{aligned} M \in (d) &\iff (x-x_A)\times a + (y-y_A)\times b = 0 \\ &\iff ax - ax_A + by - by_A = 0 \\ &\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\ &\iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ c = -ax_A - by_A \end{cases} \end{aligned}$$
  Ainsi, la droite (d) admet pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, avec $c=-ax_A-by_A$. D'où le résultat.

- **Montrons que (2) ⇒ (1).**
  Soit c un réel tel que la droite (d) a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$.
  Alors la droite (d) admet le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{-b}{a}$ comme vecteur directeur.
  Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\binom{a}{b}$. On a $\vec{n}\cdot\vec{u} = -ab+ba = 0$.
  Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et par conséquent, $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d).
  D'où le résultat. □

Exemples

1. **Déterminer un vecteur normal à une droite.**
   D'après la propriété précédente, la droite (d) d'équation cartésienne $2x+5y-3=0$ admet $\vec{n}\binom{2}{5}$ comme vecteur normal. (Elle admet $\vec{u}\binom{-5}{2}$ comme vecteur directeur.)
2. **Déterminer une équation cartésienne avec un vecteur normal et un point.**
   Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(1\,;\,6)$, $(-4\,;\,-2)$ et $(6\,;\,2)$. On se propose de déterminer une équation de la hauteur (h_A) du triangle ABC issue de A.



   La hauteur issue de A est perpendiculaire à la droite (BC), par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{BC}\binom{10}{4}$ est un vecteur normal à la droite (h_A).
   Il y a ensuite deux façons de procéder :

   — **Méthode 1**
   Soit M un point du plan, on a alors :
   $$\begin{aligned} M \in (h_A) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \end{aligned}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-1}{y-6}$. Donc :

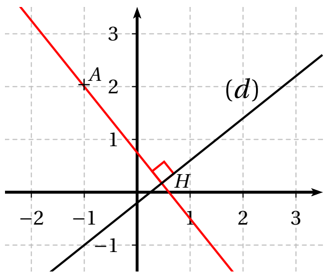
$$\begin{aligned} M \in (h_A) &\iff (x-1)\times 10 + (y-6)\times 4 = 0 \\ &\iff 10x - 10 + 4y - 24 = 0 \\ &\iff 10x + 4y - 34 = 0 \\ &\iff 5x + 2y - 17 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur (h_A) admet pour équation cartésienne $5x + 2y - 17 = 0$.

— **Méthode 2**

Ainsi, d'après la propriété précédente, il existe un réel c tel que la droite (h_A) admette pour équation cartésienne $10x + 4y + c = 0$.
En divisant les deux membres de l'équation par 2, on peut dire qu'il existe donc un réel c' tel que (h_A) admette pour équation cartésienne $5x + 2y + c' = 0$.
De plus, $A \in (h_A)$ donc $5x_A + 2y_A + c' = 0$.
Par suite : $5 \times 1 + 2 \times 6 + c' = 0$, donc $c' = -17$.
Ainsi la droite (h_A) a pour équation : $5x + 2y - 17 = 0$.

3. **Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.**
On considère la droite (d) d'équation $4x - 5y - 1 = 0$ et le point $A(-1\ ;\ 2)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (d).



La droite (d) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{4}{-5}$.
C'est donc un vecteur directeur de la droite (AH).
Il existe donc un réel c tel que (AH) ait pour équation cartésienne $-5x - 4y + c = 0$.
De plus, $A \in (AH)$ donc $-5x_A - 4y_A + c = 0$.
Par suite : $-5 \times (-1) - 4 \times 2 + c = 0$,
donc $5 - 8 + c = 0$, donc $c = 3$.
Ainsi la droite (AH) a pour équation : $-5x - 4y + 3 = 0$.
Le point H est le point d'intersection des deux droites. Ses coordonnées vérifient donc les équations des deux droites.

On a donc : $\begin{cases} 4x_H - 5y_H - 1 = 0 \\ -5x_H - 4y_H + 3 = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 20x_H - 25y_H - 5 = 0 & \ell_1 \leftarrow 5\ell_1 \\ -20x_H - 16y_H + 12 = 0 & \ell_2 \leftarrow 4\ell_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} -41y_H + 7 = 0 & \ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_2 \\ -20x_H - 16y_H + 12 = 0 & \ell_2 \leftarrow 4\ell_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y_H = \dfrac{7}{41} \\ -20x_H = 16 \times \dfrac{7}{41} - 12 = -\dfrac{380}{41} \end{cases}$

donc $\begin{cases} y_H = \dfrac{7}{41} \\ x_H = \dfrac{19}{41} \end{cases}$ Ainsi, H a pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{41}\ ;\ \dfrac{7}{41}\right)$.

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 464. $ABCD$ est un carré de centre K. Donner :

a) un vecteur normal à la droite (AB) ;

b) deux vecteurs normaux à la droite (BD).

Exercice 465. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes d'équation :

a) $2x-3y+4=0$; | b) $y=-7x+3$; | c) $x=-5$; | d) $y=2$.

Exercice 466. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et qui admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

a) $A(1\,;\,-2)$ et $\vec{n}\binom{1}{-1}$; | b) $A(-3\,;\,4)$ et $\vec{n}\binom{2}{-3}$; | c) $A(2\,;\,3)$ et $\vec{n}\binom{-2}{1}$.

Exercice 467. On considère la droite (d) d'équation $3x+y+5=0$ et le point $A(1\,;\,2)$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (d). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 468. Soit $A(-1\,;\,1)$, $B(5\,;\,6)$ et $C(8\,;\,-3)$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 469. Soit $A(-1\,;\,2)$, $B(0\,;\,-3)$ et $C(3\,;\,1)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice (d') du segment $[AC]$.
3. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

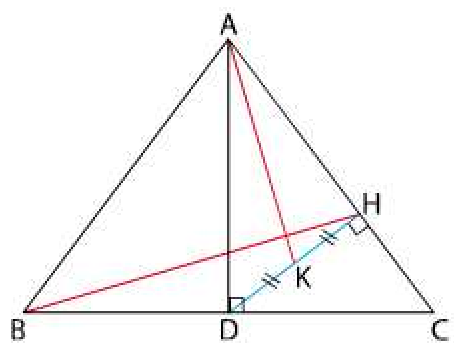
Exercice 470. On considère trois points $F(2\,;\,5)$, $G(4\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.

1. Déterminer une équation de la hauteur (h_F) issue de F dans le triangle FGH.
2. Déterminer une équation de la hauteur (h_H) issue de H dans le triangle FGH.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

Exercice 471. On considère les points $A(0\,;\,4)$, $B(-3\,;\,0)$ et $C(2\,;\,0)$. Soit (d) et (d') les droites perpendiculaires à (BC) respectivement en B et en C. La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (d) en P et la perpendiculaire à (AC) passant par O coupe (d') en Q.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $H\left(0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées des points P et Q.
4. Étudier l'alignement des points P, Q et H.

Exercice 472. ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB=5$ et $BC=6$. On nome D le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADC et K le milieu de $[DH]$.



Soit U le point de $[DC]$ tel que $DU = 1$ et V le point de $[DA]$ tel que $DV = 1$.

1. Justifier que $(D\,;\,U,\,V)$ est un repère orthonormé.
2. Déterminer une équation de la droite (DH).
3. Déterminer les coordonnées des points H et K.
4. Démontrer que (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

Fiche 4

Géométrie plane
Équations de cercles

I. Équation de cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

I.1. Propriétés

Propriété 48 (cercle défini par son centre et son rayon)
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ et de rayon R. Soit $M(x\,;\,y)$ un point. Alors

$$M \in \mathscr{C} \iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2.$$

On dit que cette équation est une **équation cartésienne du cercle** $\mathscr{C}$.

Démonstration : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ et de rayon R.
Soit $M(x\,;\,y)$ un point.

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff M\Omega = R\\ &\iff M\Omega^2=R^2\\ &\iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2 \end{aligned}$$

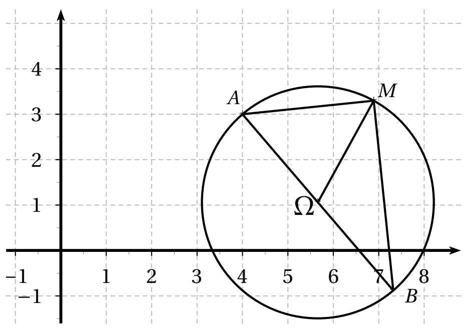
D'où le résultat. □

Propriété 49 (cercle défini par son diamètre)
Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point. Alors :

$$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

Démonstration :
Géométrique Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point.

- Si $M=A$ ou $M=B$,
  alors M appartient au cercle $\mathscr{C}$;
  de plus, $\overrightarrow{MA}$ ou $\overrightarrow{MB}$ est nul
  et par conséquent $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
- Si $M\neq A$ et $M\neq B$,
  $$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff MAB \text{ est un triangle rectangle en } M,\\ &\iff (MA)\perp(MB)\\ &\iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0. \end{aligned}$$
  □



Démonstration :
Analytique. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit A et B deux points. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0\\
&\iff x^2-(x_A+x_B)x+y^2-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+x_Ax_B+y_Ay_B=0\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-x_Ax_B-y_Ay_B\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{x_A^2+x_B^2+2x_Ax_B+y_A^2+y_B^2+2y_Ay_B-4x_Ax_B-4y_Ay_B}{4}\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{x_A^2+x_B^2-2x_Ax_B+y_A^2+y_B^2-2y_Ay_B}{4}\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\
&\iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

I.2. Exemples

I.2.a. Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;\,-3)$.
Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 3.

D'après la première propriété, le cercle $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne :
$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=3^2$$
soit
$$(x-1)^2+(y+3)^2=9$$
ou encore
$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=9$$
C'est-à-dire
$$x^2+y^2-2x+6y+1=0$$

I.2.b. Déterminer une équation de cercle défini par son diamètre

Dans un repère orthonormé, on considère les points $E(4\,;\,-2)$ et $F(-1\,;\,1)$.
Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[EF]$.
Soit $M(x;y)$ un point. D'après la deuxième propriété, on a : $M\in\mathscr{C}\iff\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$.
Or $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées $\binom{4-x}{-2-y}$ et $\overrightarrow{MF}$ a pour coordonnées $\binom{-1-x}{1-y}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C} &\iff (4-x)(-1-x)+(-2-y)(1-y)=0\\
&\iff -4-4x+x+x^2-2+2y-y+y^2=0\\
&\iff x^2-3x+y^2+y-6=0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne : $x^2-3x+y^2+y-6=0$.

I.2.c. Identifier un cercle d'après une équation

- Un cercle étant toujours entièrement déterminé par son centre et son rayon, dans un repère orthonormé, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ et de rayon R ($R>0$) a pour équation :
$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$
Après développement, on obtient une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ , avec } a, b, c \text{ réels.}$$

- La question se pose alors naturellement de savoir si, réciproquement, toute relation de la forme :
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ , avec } a, b, c \text{ réels.}$$
est une équation d'un cercle. On se propose d'étudier cette réciproque sur deux exemples.

Exemple 1
Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des points$M(x\,;\,y)$ vérifiant : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.
On peut écrire successivement :
$M \in \mathscr{E}_1 \iff (x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 5 = 0$
$\iff (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 5 = 0$
$\iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = 18$.
Soit Ω le point de coordonnées $(2\,;\,-3)$; on a : $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2$.
Ainsi : $M \in \mathscr{E}_1 \iff \Omega M^2 = 18$
ou encore : $M \in \mathscr{E}_1 \iff \Omega M = 3\sqrt{2}$.
Par conséquent, $\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

Exemple 2
Soit $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant : $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 13 = 0$.
En procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve :
$$M(x\,;\,y) \in \mathscr{E}_2 \iff (x-1)^2 + (y+2,5)^2 = -5,75$$
Comme la somme de deux carrés est un réel positif, aucun point M ne vérifie la condition ci-dessus.
Par conséquent, $\mathscr{E}_2$ est l'ensemble vide.

Il résulte de ce qui précède que :

- Tout cercle a une équation de la forme :$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, avec a, b, c réels.
- L'énoncé réciproque est faux : l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, avec a, b, c réels n'est pas toujours un cercle.

II. Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 473. 1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(2\,;\,-4)$ et de rayon $R = 2$.
2. Déterminer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Exercice 474. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$
a) de centre $\Omega(-3\,;\,4)$ et de rayon 5 ;
b) de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et passant par $A(4\,;\,-4)$;
c) de diamètre $[AB]$ avec $A(4\,;\,-4)$ et $B(8\,;\,1)$.

Exercice 475. On considère les points $A(10\,;\,7)$ et $B(4\,;\,-1)$.
1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B.

Exercice 476. Les équations suivantes sont des équations de cercle.
Donner le centre et le rayon de chaque cercle.

a) $(x-3)^2+(y-5)^2=12$

b) $(x+2)^2+y^2=4$

c) $x^2+y^2-4x+y-5=0$

d) $y^2=4-x^2$

Exercice 477. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que :

a) $x^2+y^2-3y=0$

b) $x^2+y^2-4x+8=0$

Exercice 478. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que :

a) $2x-5y+3=0$

b) $x^2-y+3x-4=0$

c) $2x^2+4y-1=0$

d) $x^2+y^2-6y-4=0$

Exercice 479. Soit $A(2\,;\,0)$, $B(-3\,;\,1)$ et Γ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $MA^2+MB^2=63$.

1. Vérifier que le point $C\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right)$ appartient à Γ.
2. Déterminer une équation de Γ puis identifier Γ.

Fiche 5

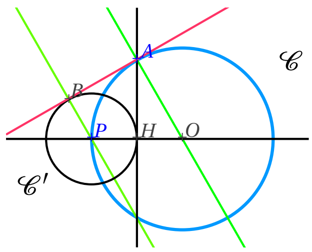
Géométrie plane
Problèmes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 480. 1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $(x-6)^2+(y-3)^2 = 20$ et l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $x^2+y^2=5$.

2. (a) Vérifier que le point $E(2\,;\,5)$ appartient à $\mathscr{C}$ et que le point $F(1\,;\,-2)$ appartient à $\mathscr{C}'$. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire sur ces cercles ?
3. (a) Montrer que si un point $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, alors $2x+y-5=0$.
   (b) Exprimer y en fonction de x et en déduire l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   (c) Qu'est la droite d'équation $2x+y-5=0$ pour ces deux cercles ? Le démontrer.

Exercice 481. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, et les points $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et $P(-1\,;\,0)$. Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OP), le cercle $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre P passant par H. La parallèle à (OA) passant par P coupe $\mathscr{C}'$ en B et B', B étant situé du même côté que A par rapport à (OP).



1. Émettre une conjecture sur la droite (AB).
2. Vérifier que P et A appartiennent à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation de la droite d parallèle à (OA) et passant par P.
4. Donner les coordonnées de H puis une équation du cercle $\mathscr{C}'$.
5. En déduire les coordonnées de B.
6. Démontrer la conjecture émise sur la droite (AB).

Exercice 482. 1. **Un exemple**.
On considère la droite d d'équation cartésienne $2x-y+1=0$ et le point $M(1\,;\,2)$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d passant par M.
   (b) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite d et calculer la longueur HM.
2. **Une formule**.
La droite d passe par A et $\vec{n}$ est un vecteur normal à d. H projeté orthogonal de M sur d.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \overrightarrow{HM}.\vec{n}$.

(b) En déduire que $HM = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$

(c) Retrouver, en appliquant cette formule, la distance HM obtenue à la question la question 1.

(d) Démontrer que la distance de $M_0(x_0; y_0)$ à la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, est égale à

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice 483. $ABCD$ et $BEFG$ sont deux carré avec A, B, G alignés.
On prend comme unité de longueur BG et on se place dans le repère orthonormé $(B\ ;\ \overrightarrow{BG},\ \overrightarrow{BJ})$ tel que $C(0\ ;\ c)$, avec $c > O$.
Lorsque ces deux droites sont sécantes, H est le point d'intersection de (DG) et (CF).

1. Faire une figure traduisant les données et placer le point J.
2. Donner les coordonnées de A, B, C, D, E, F et G.
3. Déterminer une équation cartésienne de (FC).
4. Déterminer une équation de (DG).
5. Lorsque ces deux droites sont sécantes, en déduire les coordonnées de H et étudier en fonction de c l'orthogonalité des droites (BH) et (CG).

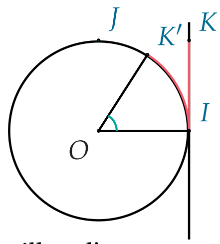
Chapitre 15

Fiche 1

Trigonométrie
Enroulement du cercle et radian

I. Enroulement de la droite numérique

Définition 30
Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct**, qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Avec ce choix, on dit que le **plan est orienté**.



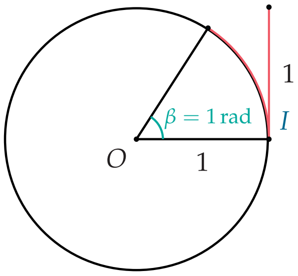
Les points I et J sont situés sur le cercle trigonométrique. Soit K le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans le repère $(O; I\ ,\ J)$. La droite (IK) a pour équation $x = 1$. C'est une droite numérique pour laquelle on considère le repère $(I\ ; K)$ dont l'origine est I et tel que $IK = 1$.

On enroule la demi-droite $[IK)$ autour du cercle C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Ainsi, à tout nombre réel x positif correspond un unique point-image M sur le cercle C.
Sur la figure, on voit K' le point-image de K sur le cercle trigonométrique.
En enroulant la demi-droite correspondant aux nombres réels négatifs dans le sens des aiguilles d'une montre, on fait également correspondre à tout nombre réel x négatif un point M sur le cercle C.
Dans chacun de ces deux cas, on dit que x a pour point-image M sur le cercle C. Si x' est un nombre obtenu à partir de x en ajoutant ou en enlevant un nombre de tours $(k \times 2\pi, k \in Z)$, alors x et x' ont le même point-image sur C. Ainsi, un point du cercle est l'image d'une infinité de réels (positifs et négatifs).

Propriété 50
Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle C. S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle C.

II. Le radian

Définition 31
La mesure en **radian** d'un angle est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il



intercepte.

Exemple
Un angle plat (180°) mesure exactement π radians, soit environ 3,14 radians.

notation Le radian est noté rad. Cette notation est omise en général, contrairement à celle du degré. **notation**

Propriété 51
Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

Méthode[Convertir entre degrés et radians]
Calculer les nombres x, y et z dans le tableau suivant de conversion entre degrés et radians.

Mesure en degré	0	30	y	150	180
Mesure en radian	0	x	$\frac{\pi}{2}$	z	π

$\frac{180}{30} = 6$ donc $x = \frac{\pi}{6}$ rad.
$\frac{\pi}{2}$ rad est la moitié de π rad, donc y est la moitié de 180 degrés, c'est-à-dire $y = 90°$ et $z = \frac{150 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

III. Exercices

Exercice 484. Préciser la mesure de l'angle géométrique correspondant en degré.

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (degré)						

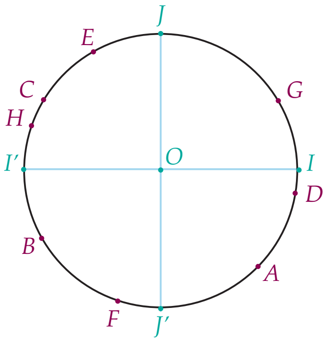
Exercice 485. Donner une mesure en radian des angles géométriques suivants.

x (degré)	30	45	75	90	135	150
x (rad)						

Exercice 486 - Vrai ou Faux. Ces nombres ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1. $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$
2. $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{21\pi}{5}$
3. $-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{5}$
4. $-\frac{3\pi}{5}$ et $-\frac{18\pi}{5}$

Exercice 487. Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



1. À l'aide d'un rapporteur, associer à chaque point (de A à F) le nombre réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ dont il est le point-image :
$$\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{6\pi}{10} \text{ et } \frac{9\pi}{10}.$$
2. Donner les nombres réels dont les points-images sont les points précédents (de A à F), cette fois, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

Exercice 488. Donner plusieurs nombres réels qui ont même point-image que :

1. $\dfrac{2\pi}{3}$
2. $-\dfrac{\pi}{5}$
3. $-\dfrac{27\pi}{4}$
4. $\dfrac{3\pi}{10}$

Exercice 489 - Conversion.

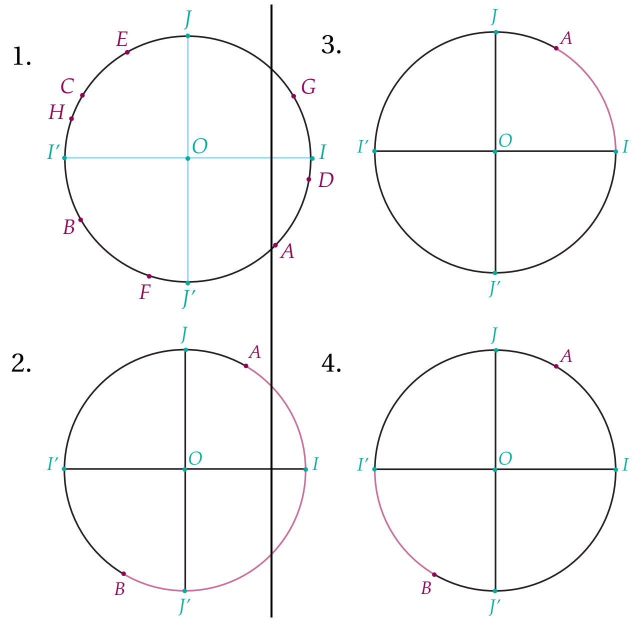
1. Convertir en degré les mesures des angles suivants données en radian :
$$\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{2\pi}{3}.$$
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

Exercice 490 - Conversion.

1. Convertir en degré les mesures des angles suivants données en radian :
$$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{4}.$$
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

Exercice 491. Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants :
$$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{17\pi}{6}.$$

Exercice 492. Soit A le point-image de $\dfrac{\pi}{3}$ et B le point-image de $-\dfrac{2\pi}{3}$. Déterminer l'ensemble des nombres réels compris dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ dont les points-images forment l'arc rouge (extrémités comprises).



Exercice 493 - Intervalles. Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct, l'arc de cercle correspondant aux points-images des nombres réels compris dans :

1. $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ 0\right]$
2. $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right]$
3. $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}\ ;\ 2\pi\right]$
4. $\left[-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ -\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

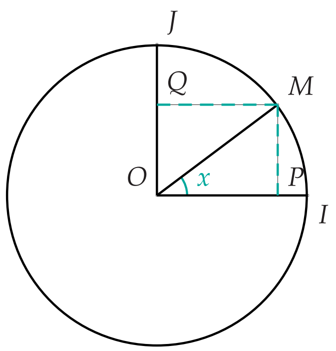
Fiche 2

Trigonométrie
Repérrage à l'aide et du sinus

I. Repérage à l'aide du cosinus et du sinus

Théorème 9
Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.
Soit x un nombre réel et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique C.
Le point M a pour coordonnées $(\cos x\,;\,\sin x)$.

Démonstration :



Soit M le point-image d'un réel x tel que $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
On note respectivement P et Q les projetés orthogonaux de M sur (OI) et (OJ).
Dans le triangle OPM rectangle en P :
$\cos x = \dfrac{OP}{OM}$. Or $OM = 1$ donc $OP = \cos x$.
Par conséquent, le point M a pour abscisse $\cos x$.
On montre de même que $\sin x = \dfrac{PM}{OM}$.
Or $PM = OQ$ et $OM = 1$, on en déduit que $OQ = \sin x$ et, par conséquent, M a pour ordonnée $\sin x$.
Si $x \notin \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut démontrer le théorème en utilisant des symétries. □

Exemples

— Le nombre réel 0 a pour point-image $I(1\,;\,0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

— Le nombre réel $\dfrac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0\,;\,1)$ donc $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

Propriété 52
Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

1. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
2. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
3. $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

Démonstration : Soit M le point-image du nombre réel x.

1. Ses coordonnées sont $(\cos x\,;\,\sin x)$ et $M \in C$ donc $OM = 1$, ce qui se traduit par $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1$, d'où la conclusion.
2. L'égalité **1)** entraîne immédiatement $(\cos x)^2 \leqslant 1$ et $(\sin x)^2 \leqslant 1$ car les deux expressions $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ sont positives ou nulles. Or quel que soit un réel, $x^2 \leqslant 1$ est équivalent à $-1 \leqslant x \leqslant 1$, d'où le résultat.
3. Soit M' le point-image du nombre réel $x + k \times 2\pi$. Les points M et M' sont confondus. Ils ont donc même abscisse et même ordonnée. $\square$

méthode : Calculer $\sin x$ quand on connaît $\cos x$

1. On utilise l'égalité $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour calculer $(\sin x)^2$.
2. On détermine le signe de $\sin x$ en utilisant l'intervalle auquel appartient x :
   — si l'une des mesures de x appartient à $]0\,;\,\pi[$, alors $\sin x > 0$;
   — sinon $\sin x < 0$.
3. On conclut sur la valeur exacte de $\sin x$.

Calculer $\sin\frac{\pi}{3}$ sachant que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

correction

$\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$ est équivalent à $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2$

soit $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $\frac{\pi}{3} \in\,]0\,;\,\pi[$ donc $\sin\frac{\pi}{3} > 0$. En conclusion, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

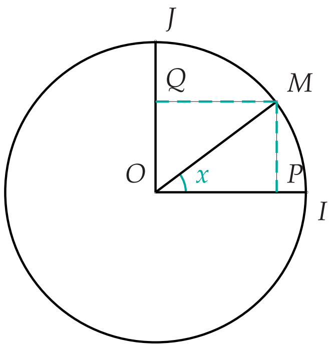
Remarque

On calcule la valeur exacte de $\sin x$ quand on connaît $\cos x$ de la même façon. Si l'une des mesures de $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x \geq 0$ sinon $\cos x < 0$.

Notations On note souvent $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$.

valeurs particuières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



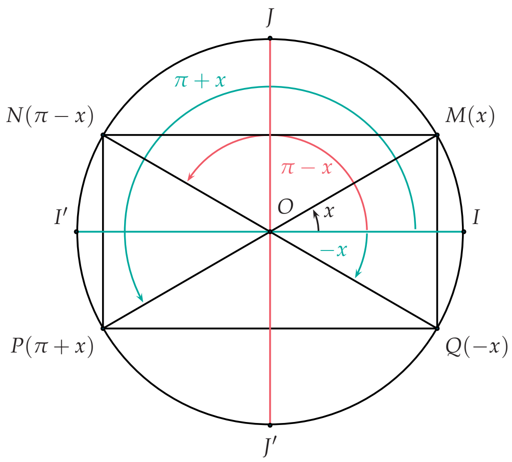
Remarque

On note la symétrie du tableau. Elle est liée à la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$ qui passe par le point-image de $\dfrac{\pi}{4}$.
Pour mémoriser ce tableau, il suffit donc de se rappeler des trois valeurs suivantes : $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II. Angles associés

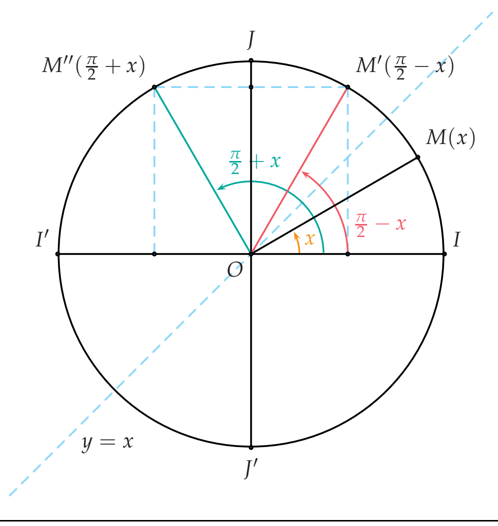
Propriété 53

Pour tout nombre réel x : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$



Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



Remarque
Les points I' et J' sont symétriques respectivement de I et de J par rapport au point O. Ce sont les points-images de π et $-\dfrac{\pi}{2}$: $\begin{cases} \cos\pi = -1 \\ \sin\pi = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$.

Méthode Calculer une mesure des angles associés
On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. En déduire $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\dfrac{4\pi}{3}$.
Correction
En appliquant directement la formule $\cos(-x) = \cos x$, il vient $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
De même, on peut remarquer également que $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ et donc :
$\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ car $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

III. exercices

Exercice 494. Compléter le tableau.

x en radian	$\dfrac{\pi}{3}$	...	$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{7\pi}{6}$	...
$\cos x$	...	$-\dfrac{1}{2}$	...	0	...	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	...	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	...	-1	...	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

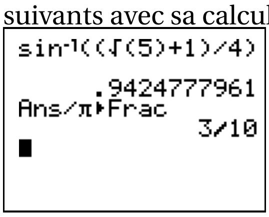
Exercice 495. Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{13\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

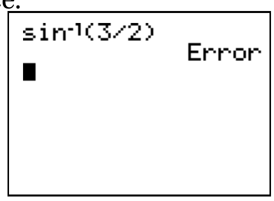
Exercice 496. Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 497. Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \dfrac{1}{4}$ et
$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$. Calculer $\sin x$.

Exercice 498. Soit x un nombre réel tel que $\sin x = \dfrac{1}{5}$ et
$x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. Calculer $\cos x$.

Exercice 499. Un élève a obtenu les deux écrans suivants avec sa calculatrice.





1. (a) Quelle équation a-t-il résolue dans l'écran de gauche ? Quelle solution de cette équation est donnée par la calculatrice ?
   (b) L'équation précédente a-t-elle d'autres solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$?
2. Pourquoi a-t-il obtenu une erreur dans l'écran de droite ?

Exercice 500. Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1. $\sin x = -0,8$ et $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$
2. $\sin x = 1,2$ et $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 501. Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1. $\cos x = 2,1$ et $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 502. Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(x+\pi) - \cos(-x)$
2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$
3. $\sin(2\pi - x) + \sin(\pi + x)$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(4\pi + x)$
5. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

Exercice 503. Donner la symétrie qui transforme le point-image du nombre réel x en le point-image du nombre réel y.

1. $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{7\pi}{6}$
2. $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = -\frac{\pi}{4}$
3. $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = -\frac{\pi}{3}$
4. $x = -\frac{3\pi}{8}$ et $y = -\frac{5\pi}{8}$

Exercice 504.

1. Calculer $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\frac{5\pi}{6}$.
2. On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 505. En utilisant les angles associés, calculer la valeur exacte des coordonnées du point-image M des nombres réels suivants :

1. $\frac{3\pi}{4}$
2. $-\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{13\pi}{4}$
4. $-\frac{2\pi}{3}$

Exercice 506. On sait que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
En déduire :

1. $\cos\frac{11\pi}{12}$
2. $\sin\frac{5\pi}{12}$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
4. $\cos\frac{13\pi}{12}$

Fiche 3

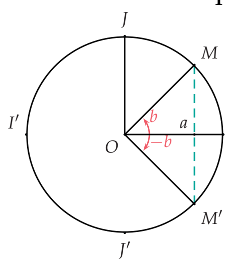
Trigonométrie
Equations trigonométriques

I. Équations et inéquations trigonométriques

Équations $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 507. Résoudre $\cos x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$ Cela revient à chercher les points-images sur le cercle dont l'abscisse est égale à a.

1. Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.



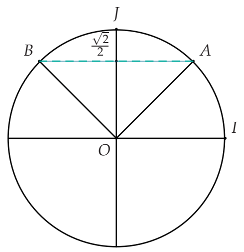
2. Dans le cas général, $a \in\ ]-1\,;\,1[$.
   Il existe un unique nombre b dans $]0\,;\,\pi[$ tel que $a = \cos b$. Les solutions de $\cos x = \cos b$ sont par conséquent b et $-b$.
   Une valeur approchée de b peut être obtenue à l'aide de la calculatrice après avoir sélectionné le mode radians.
3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k\times 2\pi$ et $-b + k\times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice
Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.
Correction
On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. L'équation $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$: $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.
Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π. Les solutions sont $\dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 508. Résoudre $\sin x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$ Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

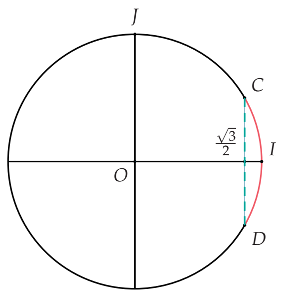
1. Dans le cas général $a \in\ ]-1\,;\,1[$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin b$.
   L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k\times 2\pi$ et $\pi - b + k\times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice
Résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.
correction
On remarque que l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$
Les solutions de cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :
$\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



Inéquation du type $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ avec $a \in I$, I intervalle donné

Exercice 509. Résoudre une inéquation trigonométriqueRésoudre l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
Correction
L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est équivalente à
$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ dont les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$. Les nombres dont le point-image sur le cercle a une abscisse supérieure strictement à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont compris strictement entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique.
L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle : $S = \left]-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right[$.



Remarques

1. Des cas particuliers peuvent se présenter, il faut faire attention à traduire $\cos x \geq a$ (resp. $\sin x \geq a$) par : on cherche les nombres réels dont le point-image sur le cercle a une abscisse (resp. ordonnée) supérieure ou égale à a.
2. L'intervalle de résolution I n'est pas toujours $]-\pi\,;\,\pi]$. L'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ est un autre intervalle possible pour décrire le cercle trigonométrique. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$ est $S = \left[0\,;\,\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}\,;\,2\pi\right[$.

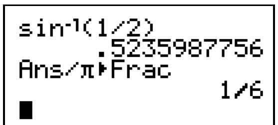
II. Exercices

Equation

Exercice 510. On considère l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 511. L'écran suivant obtenu avec la calculatrice correspond à la résolution d'une équation.



1. (a) De quelle équation s'agit-il ?
   (b) Quelle est la solution obtenue ?
2. Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 512.

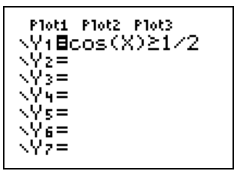
1. Résoudre l'équation $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0\,;\,4\pi]$

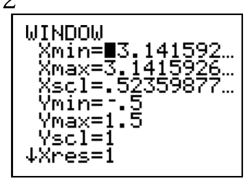
Exercice 513. Montrer que l'équation $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

Inéquation

Exercice 514. On considère l'inéquation $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
3. Vérifier le résultat obtenu en définissant comme fonction le booléen $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ qui vaut 1 en x si $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ et 0 sinon.





où 3.141592... correspond à π et .52359877... correspond à $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 515. On considère l'inéquation $\cos x > 0$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 516. On considère l'inéquation $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 517. On considère l'inéquation $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

II.1. Calculs avec cos et sin

Exercice 518. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1. (a) $\sin(3\pi + x)$
   (b) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$
   (c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
   (d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$
2. (a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
   (b) $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$

Exercice 519. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(x - \pi)$
2. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Fiche 4

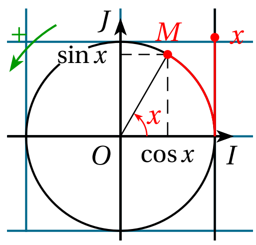
Trigonométrie
Fonctions cosinus et sinus

I. Fonctions cosinus et sinus

I.1. Définition et rappels

Soit $(O\,;\,I\,,\,J)$ un repère orthonormé direct. Le point M, image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O, a pour coordonnées $(\cos x\,;\,\sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0



Définition 32
Fonctions cosinus et sinus

— La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.

— La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Définition 33
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.
f est **périodique** de période T ou est T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Définition 34
Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

— Une fonction f est **paire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

— Une fonction f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 54

— Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.

— La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Démonstration : Pour tout réel x, on a en effet :

2

— $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

— $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. □

Remarque

— Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.

— Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

III. Dérivabilité et variations

Propriété 55
Dérivées des fonctions **cos** et **sin**
Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

— $\cos' = -\sin$

— $\sin' = \cos$

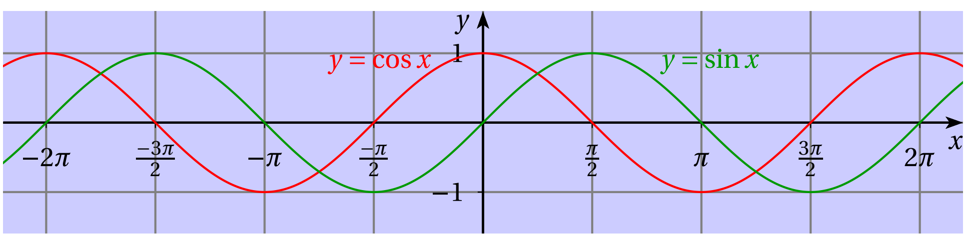
Propriété 56

— Les variations des fonctions cos et sin sur $[0\,;\,\pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1 ↘	0

— Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des **sinusoïdes**.



Démonstration : — $\cos' = -\sin$. Or, $0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0$ c'est-à-dire $-\sin x < 0$.
De plus, la fonction sin ne s'annule qu'en 0 et π.
Donc, cos est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$.

— $\sin' = \cos$. Or, $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$.
De plus, la fonction cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$.
Donc, sin est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$. □

Exercice 520. Dériver une fonction formée de cos ou sin
En général, ce type de fonction définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on établira d'abord les ensembles de définition et de dérivabilité Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
2. $f(x) = \cos^2 x$
3. $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)$

correction

1. f est de la forme $u(ax+b)$ avec $u(x) = \sin x$, $a = 3$ et $b = \frac{\pi}{4}$.
   On a $u'(x) = \cos x$ d'où $f'(x) = au'(ax+b) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. f est de la forme u^2 avec $u(x) = \cos(x)$.
   On a $u'(x) = -\sin x$ d'où $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$.
3. f est de la forme uv dont la dérivée est $(u'v + uv')$ avec $u(x) = sin(x)$ et $v(x) = 1 + cos(x)$.
   $f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$.
   Or, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$. D'où $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.
   Posons $X = \cos x$. Alors, $f'(x) = 2X^2 + X - 1 = (2X-1)(X+1)$ après calcul des racines.
   Ainsi, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

Exercice 521. Étudier une fonction trigonométrique. Il arrive fréquemment qu'une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d'abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l'étudier sur un ensemble plus grand.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0\,;\,\pi]$. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,\pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[0\,;\,\pi]$ puis sur $[-4\pi\,;\,4\pi]$.

Correction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $2+\cos x \neq 0$.
   $$f'(x) = \frac{3\cos x(2+\cos x) - 3\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{(2+\cos x)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,\pi]$. Or :

— sur $\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $\cos x > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} > 0$;

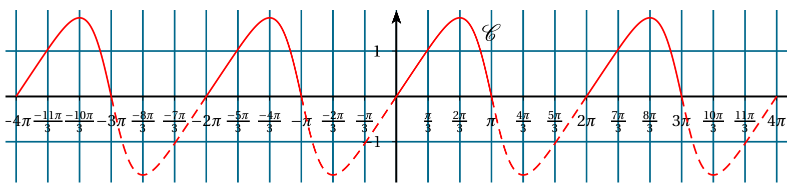
— sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $\cos x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} < 0$.

Et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\dfrac{2\pi}{3}$.

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

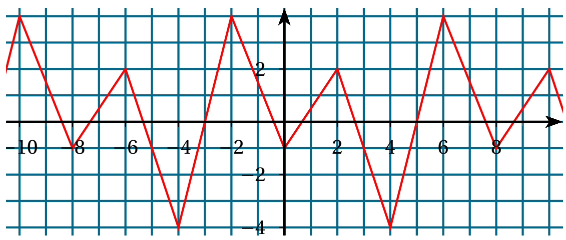
2. $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-3\sin x}{2+\cos x} = -\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.
   On peut donc limiter l'étude de f à $[0\,;\,\pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi\,;-2\dfrac{\pi}{3}]$ et sur $[2\dfrac{\pi}{3}\,;\pi]$ et croissante sur $[-\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}]$.
3. $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.
4. On trace $\mathscr{C}$ sur $[0\,;\,\pi]$ puis sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.
   Enfin, comme f est 2π-périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.



IV. Exercices

Périodicité

Exercice 522. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T représentée dans le repère suivant.



1. (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ telles que $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}$.
   (b) Déterminer la valeur de T.
2. Donner l'image par f des entiers : 14, -16, 56 et 58.

Exercice 523. Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(6x-3)$ $\qquad T = \dfrac{\pi}{3}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad T = \pi$
3. $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad T = \pi$
4. $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x - 3\right)\cos x$ $\qquad T = \dfrac{2\pi}{3}$

Parité

On rappelle que, sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0, une fonction est :

— paire si, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$;

— impaire si, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 524. Étudier la parité des fonctions suivantes.

— $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$

— $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

— $f_3 : x \mapsto \dfrac{1+x^2+x^4}{x(x^2+x^4)}$

— $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$

— $f_5 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

— $f_6 : x \mapsto |x|$

— $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$

— $f_8 : x \mapsto \cos(x+\pi)$

Exercice 525. On considère les types de fonctions suivantes :

1. affine $x \mapsto ax+b$
2. polynôme du second degré $x \mapsto ax^2+bx+c$
3. homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
4. polynôme du troisième degré $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$

Pour chaque type, à quelle condition a-t-on :

— une fonction paire ?

— une fonction impaire ?

(In)équations avec cos et sin

Exercice 526. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{4}$
2. $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
3. $\cos 2x = \cos \dfrac{\pi}{4}$
4. $\cos x = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $2\cos 2x = 1$
6. $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos 2x = \cos x$
8. $\sin 3x = \cos x$

Exercice 527. 1. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

(c) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos x = -\sin x$

Exercice 528. 1. Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

(a) $\cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

(b) $\sin x$ sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{7\pi}{3}\right]$

2. À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$:

(a) $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

(c) $\cos x < 0$

Exercice 529. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$
2. $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x$
4. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$

Exercice 530. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$
2. $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$
3. $\cos^2 x - \left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 0$

Exercice 531. Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations :

1. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{2}$.
2. $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Étude de fonctions

Exercice 532 - Vrai ou faux ?. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$
et représentée par $\mathscr{C}_f$ dans un repère d'origine O.
Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. f est 2π-périodique.
2. $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à O.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - xf'(x) = x^2 \sin x$.
4. La tangente $\mathscr{C}_f$ en O a pour équation $y = x$.

Exercice 533. Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 2x + \sin 2x.$$

1. Étudier la parité de f. Interpréter graphiquement.
2. (a) Démontrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$:
   $$f'(x) = 2(1 + \cos 2x).$$
   (b) Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. À l'aide de la parité, dresser le tableau de variation de f.

Exercice 534. Étudier sur $[-\pi\,;\,\pi]$ les variations de la fonction :

$$f : \theta \mapsto \sin(2\theta + \pi/6) - \theta.$$

Exercice 535. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est périodique.
3. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
4. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 536. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}.$$

1. (a) Dériver deux fois f et en déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
   (b) Dériver quatre fois g et en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.
   (c) En déduire un encadrement de $\cos x$.
2. (a) Déterminer la précision $\varepsilon(x)$ de l'encadrement.
   (b) Étudier la fonction ε.
   En déduire à quelle condition sur x il est pertinent d'utiliser cet encadrement.
3. Application : encadrer $\cos\frac{\pi}{5}$ et estimer sa précision.

Exercice 537. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$f(x) = \cos x(1 + \sin x)$$

et représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1. Vérifier que f est 2π-périodique et que f n'est ni paire ni impaire.
2. Justifier que f est dérivable et montrer que :
   $$f'(x) = (1 + \sin x)(1 - 2\sin x).$$
3. (a) Résoudre sur $[0\,;\,\pi]$ l'inéquation $2\sin x \leqslant 1$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Vérifier que pour tout réel x :
   $$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$
   Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
7. Tracer $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.

Exercice 538. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \cos^2 x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Étudier la périodicité de la fonction f.
3. Démontrer que f est :
   — strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$;
   — strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.
4. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0, $\frac{2\pi}{3}$, π et $\frac{4\pi}{3}$.
5. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$								

6. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 539. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par :

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

1. Démontrer que $f'(x) = -\sin x(1+2\cos x)$.
2. Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$.
   (b) En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$.

Fiche 5

Rappels

Rappels - Probabilités

Expérience aléatoire, issues, univers

Définition 1

— Une **expérience aléatoire** produit un résultat dont on peut dire deux choses :
  - on connait tous les résultats possibles,
  - on ne peut savoir quel résultat va être produit avant de réaliser l'expérience.

— Un résultat possible s'appelle une **issue** ou **éventualité**.

— L'ensemble des issues possibles s'appelle l'**univers de l'expérience aléatoire** ou **univers des possibles**. On le note souvent E ou Ω.

Événements asociés à une expérience aléatoire

Définition 2
On appelle **événement** toute partie de l'univers des possibles.
Un événement réduit à une seule issue est appelé **événement élémentaire**.

Règles de base
Le tableau qui suit résume les définitions, formulations et notations essentielles relatives à la notion d'événement.

Langage des ensembles	**Langage des événements**	**Notation**
A est une partie de Ω	A est un événement	$A \subset \Omega$
A est vide	l'**événement** A est **impossible**	$A = \emptyset$
A est égal à Ω	l'**événement** A est **certain**	$A = \Omega$
C est la réunion de A et B	C est l'événement (A ou B)	$C = A \cup B$
C est l'intersection de A et B	C est l'événement (A et B)	$C = A \cap B$
A et B sont disjoints	A et B sont des **événements incompatibles**	$A \cap B = \emptyset$
A et B sont complémentaires	A et B sont des **événements contraires**	$B = \overline{A}$

Loi de probabilité

Définition 3
Lorsqu'une expérience aléatoire comporte un nombre fini d'issues, on définit sur l'ensemble $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ des issues une **loi de probabilité** en se donnant une suite de nombres $(p_1, \dots, p_r)$ vérifiant :

- pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$: $p_i \geqslant 0$,
- $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Définition 4
Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou que la loi est **équirépartie** sur Ω ou **uniforme**. Dans ce cas, si l'univers des issues Ω a r éléments, quelle que soit l'issue ω_i :

$$P(\omega_i) = p_i = \frac{1}{r}.$$

Probabilité d'un événement

Définition 5
La **probabilité d'un événement** A est la somme de toutes les probabilités des issues appartenant à A. On pose $P(\emptyset) = 0$.

Propriété 1
Lorsque toutes les issues sont équiprobables, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} \quad \text{noté} \quad \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{\text{nombre d'issues favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre d'issues possibles}} \end{aligned}$$

Propriétés des probabilités

Ces propriétés, étudiées en classe de seconde, sont rassemblées dans le tableau suivant :

Parties de Ω	**Langage des événements**	**Propriété**
A	A est un événement	$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
$\emptyset$	événement impossible	$P(\emptyset) = 0$
Ω	événement certain	$P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement contraire de A	$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
A ; B	A et B des événements quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Fiche 6

Corrigé des exercices

Chapitre 1 - Fiche 1
Probabilités Conditionnelles - Activité d'introduction - Corrigé des exercices

Objectifs :

— Introduire la notion de probabilité conditionnelle et notamment la formule $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

— Faire le lien entre la formule précédente et l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés.

Exercice 1.

1. Complétons le tableau (arrondir à l'entier le plus proche) :

	Cantine	Extérieur	Total
Seconde	237	122	359
Première	208	133	341
Terminale	206	148	354
Total	651	403	1 054

2. (a) Calculons $P(S)$ et $P(C \cap S)$.
L'univers de l'expérience aléatoire est l'ensemble des élèves du lycée.
Le tirage est fait au hasard, il y a donc équiprobabilité (loi uniforme ou équirépartie). On a donc :
$$P(S) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } S}{\text{nombre total d'issues}}$$
$$= \frac{\text{nombre d'élèves de seconde}}{\text{nombre total d'élèves}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } S}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)}$$
$$= \boxed{\frac{359}{1\,054}}$$
et, de même :
$$P(C \cap S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(\Omega)} = \boxed{\frac{237}{1\,054}}.$$

(b) Décrire $P_S(C)$ par une phrase puis la calculer.
$P_S(C)$ est la probabilité que l'élève tiré au sort mange à la cantine sachant qu'il est en seconde. On a donc :
$$P_S(C) = \frac{\text{nombre d'élèves de seconde mangeant à la cantine}}{\text{nombre d'élèves de seconde}} = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(S)} = \boxed{\frac{237}{359}}.$$

(c) Quel est l'univers associé à P_S, c'est-à-dire dans quel ensemble tire-t-on au sort quand on considère une probabilité sachant S ?
L'univers associé à P_S est $\boxed{\text{l'ensemble des élèves de seconde}}$.

(d) Déterminons un lien entre $P(S)$ et $P(C \cap S)$ et $P_S(C)$.
On a :

- $P(C \cap S) = \dfrac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{237}{1\,054}$
- $P(S) = \dfrac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{359}{1\,054}$
- $P_S(C) = \dfrac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(S)} = \dfrac{237}{359}$.

Ainsi, on a :

$$P(C\cap S)=\frac{\text{Card}(C\cap S)}{\text{Card}(\Omega)}$$
$$=\frac{\text{Card}(C\cap S)}{\cancel{\text{Card}(S)}}\times\frac{\cancel{\text{Card}(S)}}{\text{Card}(\Omega)}$$
$$=P_S(C)\times P(S)$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$P_S(C)=\frac{P(C\cap S)}{P(S)}$$

(e) D'une manière générale, quel lien peut-on alors conjecturer entre $P(B)$, $P(A\cap B)$ et $P_B(A)$?
En reprenant le raisonnement précédent, on peut conjecturer que :

$\boxed{P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)=P_B(A)\times P(B)}$ c'est-à-dire que $\boxed{P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$.

3. Testons la conjecture précédente avec $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(PR)$.

- D'après la conjecture précédente, on devrait avoir $P_C(T)=\dfrac{P(T\cap C)}{P(C)}$ or d'après le tableau, $P_C(T)=\dfrac{206}{651}$, $P(T\cap C)=\dfrac{206}{1\,054}$ et $P(C)=\dfrac{651}{1\,054}$.

  On en déduit que $\dfrac{P(T\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{206}{1\,054}}{\frac{651}{1\,054}}=\dfrac{206}{1\,054}\times\dfrac{1\,054}{651}=\dfrac{206}{651}=P_C(T)$

  La conjecture est bien vérifiée dans ce cas.

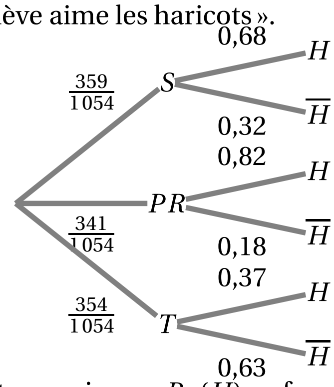
- De même, d'après le tableau on a $P_{\overline{C}}(PR)=\dfrac{133}{403}$, $P(PR\cap\overline{C})=\dfrac{133}{1\,054}$ et $P(\overline{C})=\dfrac{403}{1\,054}$.

  On en déduit que $\dfrac{P(PR\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{\frac{133}{1\,054}}{\frac{403}{1\,054}}=\dfrac{133}{1\,054}\times\dfrac{1\,054}{403}=\dfrac{133}{403}=P_{\overline{C}}(PR)$.

  La conjecture est donc également vérifiée dans ce cas.

Exercice 2 - Avec un arbre pondéré.

On a dressé l'arbre pondéré ci-contre où H désigne l'évènement « l'élève aime les haricots ».



1. Certaines des pondérations présentes sur cet arbre sont des probabilités conditionnelles. Dire lesquelles et les exprimer avec la notation vue à l'exercice 1.
   Sur l'arbre, on a :

• $P_S(H)=0{,}68$	• $P_{PR}(H)=0{,}82$	• $P_T(H)=0{,}37$
• $P_S(\overline{H})=0{,}32$	• $P_{PR}(\overline{H})=0{,}18$	• $P_T(\overline{H})=0{,}63$

2. (a) En admettant la formule conjecturée dans la partie précédente, exprimons $P_T(H)$ en fonction de $P(T)$ et $P(H\cap T)$:

   $\boxed{P_T(H)=\dfrac{P(H\cap T)}{P(T)}}$.

   (b) En déduire $P(H\cap T)$ en fonction de $P_T(H)$ et $P(T)$ puis calculer $P(H\cap T)$.
   On obtient :

   $\boxed{P(H\cap T)=P_T(H)\times P(T)}$
   $$=0{,}37\times\frac{354}{1\,054}$$

$$= \frac{13\,098}{105\,400}$$
$$= \boxed{\frac{6\,549}{52\,700}}.$$

(c) Quelle règle bien connue sur les arbres pondérés retrouve-t-on ?
On retrouve la règle qui dit que, sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement correspondant à un chemin s'obtient en multipliant entre-elles les probabilités figurant sur les branches constituant ce chemin.

Chapitre 2 - Fiche 6
Généralités sur les suites - Suites numériques et algorithmique - Corrigé des exercices

Exercice 82.

1. Quelle valeur est affichée en sortie pour $N = 6$?
$3 \times 6 - 5 = 18 - 5 = 13$. Par conséquent, l'algorithme affiche 13.
2. Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 5$.

Exercice 83. 1. Calculer u_4, v_4 et w_4.
$u_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 4 + 1 = 5$
$v_4 = u_4^2 = 5^2 = 25$
$w_4 = v_4 - u_4 = 25 - 5 = 20$.

2. Compléter l'algorithme ci-dessus afin qu'il affiche la valeur des termes u_p, v_p et w_p lorsque l'on saisit la valeur de p.

Variables	u, v et w sont des réels
	p est un entier naturel
Entrée	Saisir p
Traitement	Affecter à u la valeur $p^2 - 3p + 1$
	Affecter à v la valeur u^2
	Affecter à w la valeur $v - u$
Sortie	Afficher u, v et w

Exercice 84. 1. On a calculé u_3 et trouvé $u_3 = 6$. Calculer u_4 et v_4.
$u_4 = u_3 + 2 = 6 + 2 = 8$
$v_4 = 2u_3 = 2 \times 6 = 12$.

(a) Qu'affiche cet algorithme quand on entre la valeur de u_3, soit 6 ?
L'algorithme affiche 8 pour u et 16 pour v.

(b) Ces résultats sont-ils ceux que l'on attend ?
$16 \neq 12$, ce ne sont donc pas les résultats attendus.

(c) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
Une possibilité est de permuter les deux lignes du traitement.

Exercice 85. 1. Calculer U_0 et U_1.
$U_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$
$U_1 = 3 \times 1 - 5 = -2$.

(a) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I	0	1	2	3	4	5
Valeur de U	-5	-2	1	4	7	10

(b) Quelle valeur affiche l'algorithme en Sortie ? À quoi correspond-elle ?
L'algorithme affiche 10. C'est la valeur de U_5.

Exercice 86. 1. Calculer U_1 et U_2.
$U_1 = 2U_0 - 1 = 4 - 1 = 3$
$U_2 = 2U_1 - 1 = 6 - 1 = 5$

(a) Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 4$ en complétant le tableau ci-dessous.

Valeur de I		1	2	3	4
Valeur de U	2	3	5	9	17

(b) Quelle(s) valeurs(s) affiche l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N=4$?
L'algorithme affiche 17. Il s'agit de la valeur de U_4.

2. On modifie la phase de traitement de l'algorithme en déplaçant l'instruction « Afficher U » comme ci-contre. Quelle(s) valeurs(s) affiche alors l'algorithme en Sortie lorsque l'on entre $N = 4$?
L'algorithme affiche maintenant 3 ; 5 ; 9 puis 17.
3. (a) Dans la question 2, l'algorithme affiche : la valeur de U_N
(b) Dans la question 3, l'algorithme affiche : toutes les valeurs de U_1 à U_N

Exercice 87. 1. Compléter le tableau ci-dessous. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de U	200	212	222	231	238
Valeur de N	0	1	2	3	4
Condition $n < 4$	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

2. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?
   On obtient le nombre 238.

3. Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.
   La valeur obtenue est le nombre de vélos de la commune au 1er janvier de l'année $2015+4$, c'est-à-dire 2019.

Exercice 88. 1. (a) Calculer les termes u_1 à u_8 de la suite (u_n).

$u_1 = 5\times 3+1 = 15+1 = 16.$

$u_2 = \frac{16}{2} = 8$

$u_3 = \frac{8}{2} = 4$

$u_4 = \frac{4}{2} = 2$

$u_5 = \frac{2}{2} = 1$

$u_6 = 3\times 1+1 = 3+1 = 4$

$u_7 = \frac{4}{2} = 2$

$u_8 = \frac{2}{2} = 1.$

(b) Quels seront les termes suivants de la suite (u_n) ?
Les termes seront 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 etc.

Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche, lorsque l'on entre la valeur de u_0, la plus petite valeur de k pour laquelle $u_k = 1$.

Variables	k est un entier naturel et U est un nombre réel
Entrée	Saisir U
Initialisation	k prend la valeur 0
Traitement	**Tant que** $U \neq 1$ **faire**
	Si U est pair
	Alors U prend la valeur $\frac{U}{2}$
	Sinon U prend la valeur $3U+1$
	Fin Si
	k prend la valeur $k+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher k

Chapitre 11 - Fiche 1
La fonction exponentielle - Définition et premières propriétés - Corrigé des exercices

Calculs algébriques

Exercice 339. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\exp(3) \times \exp(4) = \exp(3+4) = \exp(7)$

b) $\exp(4) \times \exp(-4) = \exp(4-4) = \exp(0) = 1$

Exercice 340. Simplifier les expressions suivantes :

a)
$$\begin{aligned} A &= (\exp(5)-\exp(4))^2 - (\exp(5)+\exp(4))^2 \\ &= (\exp(5)-\exp(4)+\exp(5)+\exp(4))(\exp(5)-\exp(4)-\exp(5)-\exp(4)) \\ &= 2\exp(5)\times(-2)\exp(4) \\ &= -4\exp(5+4) \\ &= -4\exp(9) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= (\exp(2)+\exp(-2))(\exp(2)-(\exp(-2)) \\ &= (\exp(2))^2 - (\exp(-2))^2 \\ &= \exp(2\times 2) - \exp(2\times(-2)) \\ &= \exp(4)-\exp(-4) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} C &= \big(\exp(3)\big)^2 \\ &= \exp(2\times 3) \\ &= \exp(6) \end{aligned}$$

d) **Méthode 1**
$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\exp(3)}{\exp(4)}\right)^2 \\ &= \frac{(\exp(3))^2}{(\exp(4))^2} \\ &= \frac{\exp(2\times 3)}{\exp(2\times 4)} \\ &= \frac{\exp(6)}{\exp(8)} \\ &= \exp(6-8) \\ &= \exp(-2) \end{aligned}$$

Méthode 2
$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\exp(3)}{\exp(4)}\right)^2 \\ &= \big(\exp(3-4)\big)^2 \\ &= \big(\exp(-1)\big)^2 \\ &= \exp(2\times(-1)) \\ &= \exp(-2) \end{aligned}$$

Exercice 341. Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a)
$$\begin{aligned} A &= \exp(x)\times\exp(-x+1) \\ &= \exp(x-x+1) \quad = \exp(1) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= \exp(1)\times\exp(-x) \\ &= \exp(1-x) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} C &= \frac{\exp(-1)\exp(-2)}{(\exp(2))^{-2}\exp(-x)} \\ &= \frac{\exp(-1-2)}{\exp(-2\times 2)\exp(-x)} \\ &= \frac{\exp(-3)}{\exp(-4)\exp(-x)} \\ &= \frac{\exp(-3)}{\exp(-4-x)} \\ &= \exp(-3)-(-4-x)) \\ &= \exp(-3+4+x)) \\ &= \exp(1+x) \end{aligned}$$

Exercice 342. Soit x un réel.
Simplifier les expressions suivantes :

a) $$\begin{aligned} A &= \left(\exp(x)+\exp(-x)\right)^2-\left(\exp(x)-\exp(-x)\right)^2 \\ &= (\exp(x)+\exp(-x)+\exp(x)-\exp(-x))(\exp(x)+\exp(-x)-\exp(x)+\exp(-x)) \\ &= 2\exp(x)\times 2\exp(-x) \\ &= 4\exp(x-x) \\ &= 4\exp(0) \\ &= 4\times 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} B &= \left(\exp(x)-\exp(-x)\right)^2-\exp(-x)\left(\exp(3x)-\exp(-x)\right) \\ &= (\exp(x))^2-2\exp(x)\exp(-x)+(\exp(-x))^2-\exp(-x)\exp(3x)+\exp(-x)\exp(-x) \\ &= \exp(2x)-2\exp(x-x)+\exp(-2x)-\exp(-x+3x)+\exp(-x-x) \\ &= \exp(2x)-2\exp(0)+\exp(-2x)-\exp(2x)+\exp(-2x) \\ &= -2+2\exp(-2x) \end{aligned}$$

Étude de fonctions

Exercice 343. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel,
   $f'(x) = 1\times\exp(x)+(x+2)\times\exp'(x)$
   $= \exp(x)+(x+2)\times\exp(x)$
   Donc, après factorisation par $\exp(x)$,
   $= \exp(x)\times(1+x+2)$
   $= \exp(x)\times(x+3)$
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Pour étudier le sens de variation de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   Or quel que soit le réel x, le nombre $\exp(x)$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x+3$.
   Ainsi, f' est négative sur $]-\infty;-3]$ donc f est décroissante sur $]-\infty;-3]$ et f' est positive sur $[-3;+\infty[$ donc f est croissante sur $[-3;+\infty[$. On peut résumer l'étude par le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-\exp(-3)$	$\nearrow$	

Exercice 344. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{\exp(x)}$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times\exp(x)-(x+2)\times\exp'(x)}{(\exp(x))^2} \\ &= \frac{\exp(x)-(x+2)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2} \end{aligned}$$

Donc, après factorisation au numérateur par $\exp(x)$,

$$= \frac{\exp(x) \times (1 - x - 2)}{(\exp(x))^2}$$

$$= \frac{\exp(x) \times (-x - 1)}{(\exp(x))^2}$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Pour étudier le sens de variation de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   Or quel que soit le réel x, le nombre $\exp(x)$, et par conséquent $(\exp(x))^2$, sont strictement positifs donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-x-1$.
   Ainsi, f' est positive sur $]-\infty;-1]$ donc f est croissante sur $]-\infty;-1]$ et f' est négative sur $[-1;+\infty[$ donc f est décroissante sur $[-1;+\infty[$. On peut résumer l'étude par le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\exp(1)$	$\searrow$	

Exercice 345. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   La fonction f est le quotient de deux fonctions :
   - la fonction $x \longmapsto \exp(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   - la fonction $x \longmapsto x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule si et seulement si $x = 0$

   Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Soit x un réel non nul ,

$$f'(x) = \frac{\exp'(x) \times x - \exp(x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{\exp(x) \times x - \exp(x)}{x^2}$$

Donc, après factorisation au numérateur par $\exp(x)$,

$$= \frac{\exp(x) \times (x-1))}{x^2}$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour étudier le sens de variation de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}^*$.
   Or quel que soit le réel x non nul, le nombre $\exp(x)$ ainsi que x^2 sont strictement positifs donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x-1$.
   On en déduit le signe de f' et les variations de f résumées dans le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\exp(1)$	$\nearrow$	

Exercice 346. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)\exp(x)$.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)\times\exp(x) + (x^2-x-1)\times\exp(x) \\ &= \exp(x)\times(2x-1+x^2-x-1) \\ &= \exp(x)\times(x^2+x-2) \end{aligned}$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Pour étudier le sens de variation de f, il suffit d'étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   Or quel que soit le réel x, le nombre $\exp(x)$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x^2 + x - 2$.
   1 est une racine évidente du trinôme, l'autre racine est donc -2. De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif. On en déduit le signe du trinôme et celui de f' :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$5\exp(-2)$	$\searrow$	$-\exp(1)$	$\nearrow$	

Chapitre 11 - Fiche 2
La fonction exponentielle - Notation exponentielle - Corrigé des exercices

Exercice 347. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$

b) $\left(e^4\right)^3 e^4$

c) $\left(e^3\right)^{-2} e^5$

d) $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

Solution :

a) $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}} = e^{5+(-3)-(-2)} = e^4$

b) $\left(e^4\right)^3 e^4 = e^{4\times3+4} = e^{16}$

c) $\left(e^3\right)^{-2} e^5 = e^{-6+5} = e^{-1}$

d) $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} = \dfrac{\sqrt{e}(\sqrt{e}-1)}{\sqrt{e}-1} = \sqrt{e}$

Exercice 348. Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^{-x})^2$

b) $\sqrt{(e^2+1)^2-(e^2-1)^2}$

c) ee^{2x+1}

d) $e^{3-2x}e^{x+5}$

e) $\left(e^{5x}\right)^2$

f) $e^{9x}-2\left(e^{3x}\right)^3$

Solution :

a) $(e^{-x})^2 = e^{2\times(-x)} = e^{-2x}$

b) $\begin{aligned} B &= \sqrt{(e^2+1)^2-(e^2-1)^2} \\ &= \sqrt{(e^2+1+e^2-1)(e^2+1-e^2+1)} \\ &= \sqrt{2e^2\times 2} \\ &= 2e \end{aligned}$

c) $ee^{2x+1} = e^{1+2x+1}e^{2x+2}$

d) $e^{3-2x}e^{x+5} = e^{3-2x+x+5} = e^{8-x}$

e) $\left(e^{5x}\right)^2 = e^{2\times5x} = e^{10x}$

f) $\begin{aligned} e^{9x}-2\left(e^{3x}\right)^3 &= e^{9x}-2e^{3\times3x} \\ &= e^{9x}-2e^{9x} \\ &= -e^{9x} \end{aligned}$

Exercice 349. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$

b) $e^x\left(e^x+e^{-x}\right)$

c) $(e^x)^5\left(e^{-2x}\right)^2$

d) $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$

e) $\sqrt{e^{-2x}}$

f) $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

Solution :

a) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}} = e^{2x-2+x} = e^{3x-2}$

b) $e^x\left(e^x+e^{-x}\right) = e^{2x}+e^0 = e^{2x}+1$

c) $(e^x)^5\left(e^{-2x}\right)^2 = e^{5x}e^{-4x} = e^x$

d) $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x$

e) $\sqrt{e^{-2x}} = e^{-2x\times\frac{1}{2}} = e^{-x}$

f) $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2} = e^{-4x+1+2x} = e^{-2x+1}$

Exercice 350. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^x+1\right)$

b) $\left(e^{3x}\right)^2+\left(e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2$

c) $\left(e^{3x}\right)^2-e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2}\right)^2$

Solution :

a) $\begin{aligned} A &= \left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^x+1\right) \\ &= e^{3x}+e^{2x}+e^x-e^x-e^0-e^{-x} \\ &= e^{3x}+e^{2x}-e^{-x}-1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} B &= \left(e^{3x}\right)^2+\left(e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2 \\ &= e^{6x}+e^{-6x}-\left(e^{6x}-2e^{3x-3x}+e^{-6x}\right) \\ &= e^{6x}+e^{-6x}-e^{6x}+2e^0-e^{-6x} \\ &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} C &= \left(e^{3x}\right)^2-e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2}\right)^2 \\ &= e^{6x}-e^{2x}\left(e^{4x}+2e^{4x-2}+e^{2x-4}\right) \\ &= e^{6x}-e^{6x}-2e^{4x-2}-e^{2x-4} \\ &= -2e^{4x-2}-e^{2x-4} \end{aligned}$

Exercice 351. Factoriser les expressions suivantes :

a) xe^x-e^x

b) $(x+3)e^{-2x}-2e^{-2x}$

c) $e^{3x}-e^{2x}$

d) $e^{2x}+2e^x+1$

e) $e^{2x}-4x^2$

f) $e^{2x}+2+e^{-2x}$

Solution :

a) $xe^x - e^x = e^x(x-1)$

b) $(x+3)e^{-2x}-2e^{-2x} = e^{-2x}(x+3-2) = e^{-2x}(x+1)$

c) $e^{3x}-e^{2x} = e^{2x}(e^x-1)$

d) $e^{2x}+2e^x+1 = (e^x+1)^2$

e) $e^{2x}-4x^2 = (e^x)^2-(2x)^2 = (e^x+2x)(e^x-2x)$

f) $e^{2x}+2+e^{-2x} = (e^x+e^{-x})^2$

Exercice 352. Démontrer que pour tout réel x, on a :

a) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

b) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}} = e^{2x}+1$

c) $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$

d) $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \dfrac{4}{1+3e^{-2x}}$

f) $1-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Solution :

a) $$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^x(e^x+e^{-x})}{e^x(e^x-e^{-x})} = \frac{e^{2x}+e^0}{e^{2x}-e^0} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

b) $$\frac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}} = (e^x+e^{-x})\times e^x = e^{2x}+e^0 = e^{2x}+1$$

c) $$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x}e^x}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^0}{e^{-x}+e^0} = \frac{1}{e^{-x}+1}$$

d) $$\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x-e^0}{e^x+e^0} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

e) $$\frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \frac{4e^{2x}e^{-2x}}{(e^{2x}+3)e^{-2x}} = \frac{4e^0}{(e^0+3)e^{-2x}} = \frac{4}{1+3e^{-2x}}$$

f) $$1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Chapitre 11 - Fiche 3
La fonction exponentielle - Exponentielle et suites - Corrigé des exercices

Exercice 353. Donner la nature et la raison des suites.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^n$.
   Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} = e^{n+1} = e^n \times e^1 = u_n \times e^1 = u_n \times e$.
   Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite **géométrique** de raison e.
   Son premier terme est u_0 avec $u_0 = e^{0+1} = e$.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-6n}$.
   Soit n un entier naturel, on a :
   $u_{n+1} = e^{-6(n+1)} = e^{-6n-6} = e^{-6n} \times e^{-6}$
   $= u_n \times e^{-6}$.
   Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite **géométrique** de raison e^{-6}.
   Son premier terme est u_0 avec $u_0 = e^{-6\times 0} = 1$.
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{3n}$.
   Soit n un entier naturel, on a : $u_{n+1} = e^{3(n+1)} = e^{3n+3} = e^{3n} \times e^3$
   $= u_n \times e^3$.
   Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite **géométrique** de raison e^3.
   Son premier terme est u_0 avec $u_0 = e^{3\times 0} = 1$.
4. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^2 n$.
   Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} = e^2(n+1) = e^2 n + e^2 = u_n + e^2$.
   Ainsi, par définition, la suite (u_n) est une suite **arithmétique** de raison e^2.
   Son premier terme est u_0 avec $u_0 = e^2 \times 0 = 0$.

Exercice 354. Déterminer le sens de variation des suites de l'exercice précédent.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^n$.
   Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - e^n = e^n \times e^1 - e^n$
   $= e^n \times (e-1)$.
   $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-6n}$.
   Soit n un entier naturel, on a :
   $u_{n+1} - u_n = e^{-6(n+1)} - e^{-6n}$
   $= e^{-6n} \times e^{-6} - e^{-6n}$
   $= e^{-6n} \times (e^{-6} - 1)$.
   Or $e^{-6n} \times (e^{-6} - 1) \leqslant 0$, donc (u_n) est décroissante.
3. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{3n}$.
   Soit n un entier naturel, on a :
   $u_{n+1} - u_n = e^{3(n+1)} - e^{3n} = e^{3n} \times e^3 - e^{3n}$
   $= e^{3n} \times (e^3 - 1)$.
   Or $e^{3n} \times (e^3 - 1) \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.
4. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^2 n$.
   Soit n un entier naturel, on a :
   $u_{n+1} - u_n = e^2(n+1) - e^2 n$
   $= e^2 n + e^2 - e^2 n = e^2$.
   Or $e^2 \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.

Exercice 355. Étudier le sens de variations des suites suivantes.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{5n}$.
   Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} - u_n = e^{5(n+1)} - e^{5n} = e^{5n} \times e^5 - e^{5n}$
   $= e^{5n} \times (e^5 - 1)$.
   Or $e^{5n} \times (e^5 - 1) \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-n}$.
   Soit n un entier naturel,
   On a : $u_{n+1} - u_n = e^{-(n+1)} - e^{-n}$
   $= e^{-n} \times e^{-1} - e^{-n}$
   $= e^{-n} \times (e^{-1} - 1)$.
   Or $e^{-n} \times (e^{-1} - 1) \leqslant 0$, donc (u_n) est décroissante.
3. (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = e^{0,5} u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Soit n un entier naturel,
   La suite (u_n) est géométrique de raison $e^{0,5}$ de premier terme $u_0 = 2$ donc, pour tout n entier naturel $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(e^{0,5}\right)^n = 2 \times e^{0,5n}$.
   $u_{n+1} - u_n = 2 \times e^{0,5(n+1)} - 2 \times e^{0,5n}$
   $= 2 \times e^{0,5n} \times (e^{0,5} - 1)$.
   Or $2 \times e^{0,5n} \times (e^{0,5} - 1) \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.
4. (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Soit n un entier naturel,
   $u_{n+1} - u_n = e^{-2}$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

Exercice 356. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^k = 1 + e + e^2 + \cdots + e^n$$

1. Démontrer que S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
   S_n est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e et de premier terme 1.

2. Déterminer S en fonction de n.
   $S_n = \dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}$
3. Pour quelle valeur de n la somme S va-t-elle dépasser un milliard ?
   Réponse par un programme en PYTHON :

```
from math import*
def S(n):
    S=1
    for k in range(1,n+1):
        S=S+exp(k)
    return S
def rang(P):
    n=0
    while S(n)<P :
        n=n+1
    return n

print(rang(1000000000))
```

   Valeur retournée : 21.

Exercice 357. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression des sommes suivantes en fonction de n :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{2k}$
   $= 1 + e^2 + e^4 + e^6 + \cdots + e^{2n}$
   $= 1 + (e^2) + (e^2)^2 + (e^2)^3 + \cdots + (e^2)^n$
   $= \dfrac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2}$
   $= \dfrac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$
2. $S = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{0,5k}$
   $= 1 + e^{0,5} + (e^{0,5})^2 + (e^{0,5})^3 + \cdots + (e^{0,5})^n$
   $= \dfrac{1-(e^{0,5})^{n+1}}{1-e^{0,5}}$
   $= \dfrac{1-e^{0,5n+0,5}}{1-e^{0,5}}$

Exercice 358. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des sommes suivantes :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{5} e^{k}$
   $= 1 + e + e^2 + \cdots + e^5$
   $= \dfrac{1-e^6}{1-e} \approx 234,20$
2. $S = \sum\limits_{k=0}^{10} e^{0,01k}$
   $= 1 + e^{0,01} + (e^{0,01})^2 + \cdots + (e^{0,01})^{10}$
   $= \dfrac{1-e^{0,11}}{1-e^{0,01}} \approx 11,57$

Chapitre 11 - Fiche 4
La fonction exponentielle - Équations - Inéquations - Corrigé des exercices

Exercice 359. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x = e \iff e^x = e^1 \iff x = 1$
L'équation a une unique solution : 1.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = e^0 \iff -x = 0$
L'équation a une unique solution : 0.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x-1} = e \iff e^{2x-1} = e^1 \iff 2x - 1 = 1 \iff x = 1$$
L'équation a une unique solution : 1.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{x^2+x} = 1 \iff e^{x^2+x} = e^0 \iff x^2 + x = 0 \iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1$$
L'équation a deux solutions : 0 et -1.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$$
L'équation a une unique solution : 0.

f) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{x^2+5} = \left(e^{x+2}\right)^2 \iff e^{x^2+5} = e^{2(x+2)} \iff x^2 + 5 = 2x + 4 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$$
L'équation a une unique solution : 1.

g) Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc l'équation $e^x + e^{-x} = 0$ n'a aucune solution.

h) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{3x+1} = e^{-2x+3} \iff 3x + 1 = -2x + 3 \iff 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$$
L'équation a une unique solution : $\frac{2}{5}$.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = e^0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$
L'équation a une unique solution : 0.

j) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$xe^{2x} - 2e^{2x} = 0 \iff e^{2x}(x-2) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$$
L'équation a une unique solution : 2.

Exercice 360. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x < e \iff e^x < e^1 \iff x < 1$
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,1[$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$e^{-x} \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant e^0 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,0]$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x-1} > e^x \iff 2x - 1 > x \iff x > 1$$
L'ensemble des solutions est $]1\,;\,+\infty[$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x + e^{-x} < 2 \iff e^x + e^{-x} - 2 < 0 \iff e^{2\frac{x}{2}} - 2 \times e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} + e^{2\left(-\frac{x}{2}\right)} < 0 \iff \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 < 0$$
Donc l'inéquation n'a pas de solution.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0$
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,0[$.

f) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-x} > 0$ est $\mathbb{R}$.

g) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$e^{-x} > 1 \iff e^{-x} > e^0 \iff -x > 0 \iff x < 0$
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,0[$.

h) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0$$
L'ensemble des solutions est $]0\,;\,+\infty[$.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{2x} \geqslant e^0 \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$$
L'ensemble des solutions est $[0\,;\,+\infty[$.

j) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$xe^{-x} - 3e^{-x} < 0 \iff e^{-x}(x-3) < 0 \iff x - 3 < 0 \iff x < 3$$
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,3[$.

Exercice 361.

1. Déterminer les racines du polynôme :
$$P(X) = X^2 + 4X - 5.$$
Le polynôme admet 1 pour racine évidente. Son autre racine est donc $\frac{-5}{1}$ c'est-à-dire -5.

2. En déduire les solutions de l'équation
$$e^{2x} + 4e^x = 5.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x} + 4e^x = 5 \iff e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \iff (e^x)^2 + 4\,(e^x) - 5 = 0$$

$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 4X - 5 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \text{ ou } X = -5 \end{cases}$$
$$\iff e^x = 1$$
$$\iff e^x = e^0$$

L'équation a une unique solution : 0.

3. Résoudre les équations suivantes :

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + (e^x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + X - 2 = 0 \end{cases}$$
Le polynôme admet 1 pour racine évidente. Son autre racine est donc $\dfrac{-2}{1}$ c'est-à-dire -2.
Par conséquent :
$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \text{ ou } X = -2 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$
L'équation a une unique solution : 0.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0 \Leftrightarrow e(e^{2x} + e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
Ainsi d'après la question précédente, l'équation a une unique solution : 0.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x - 2e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2e^{-x} + 1) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
Ainsi d'après la question précédente, l'équation a une unique solution : 0.

Exercice 362. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x + 3 > 0$. Par conséquent,
$$\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$
L'ensemble des solutions est donc $]0\,;\,+\infty[$.

b) Pour tout réel x,
$$-e^{2x} - e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + X - 2 < 0 \end{cases}$$
D'après l'étude réalisée dans l'exercice précédent, le polynôme $X^2 + X - 2$ admet 1 et -2 pour racines. De plus le coefficient de son terme de degré 2 est positif. Le polynôme est donc de signe positif à l'extérieur des racines et de signe négatif entre les racines.
Par conséquent :
$$-e^{2x} - e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ -2 < X < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < e^x < 1 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty\,;\,0[$.

c) Pour tout réel x,
$$e^{2x} + 2e^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 2X - 3 \geqslant 0 \end{cases}$$
Le polynôme $X^2 + 2X - 3$ admet 1 pour racine évidente. L'autre racine est donc $\dfrac{-3}{1}$ soit -3. De plus le coefficient de son terme de degré 2 est positif. Le polynôme est donc de signe positif à l'extérieur des racines et de signe négatif entre les racines.
Par conséquent :
$$e^{2x} + 2e^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X \leqslant -3 \text{ ou } X \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow e^x \leqslant -3 \text{ ou } e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $[0\,;\,+\infty[$.

d) On a vu à la question b. que :
$-e^{2x} - e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 < 0$
On déduit donc des résultats de la question b. que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,0[$.

Exercice 363. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$e^{x^2+2} = \frac{e^{2x}}{e} \Leftrightarrow e(e^{x^2+2}) = e^{2x} \Leftrightarrow e^{x^2+3} = e^{2x} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$$
Le trinôme $x^2 - 2x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 3$, qui est strictement négatif.

Par conséquent, l'équation n'a aucune solution.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$2e^{2x}+5e^x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ 2X^2+5X+3 \geqslant 0 \end{cases}$

Le polynôme $2X^2+5X+3$ admet -1 pour racine évidente. L'autre racine est donc $-\dfrac{3}{2}$.

Par conséquent :

$$2e^{2x}+5e^x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = -\dfrac{3}{2} \text{ ou } X = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^x = -\dfrac{3}{2} \text{ ou } e^x = -1$$

L'équation n'a donc aucune solution.

c) Notons (E) l'inéquation $e^x + e^{-x} > \sqrt{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$(E) \Leftrightarrow e^x + e^{-x} > e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow e^x(e^x + e^{-x}) > e^x(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}})$
$\Leftrightarrow e^{2x} + e^0 > e^x(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}})$
$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - e^x(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}) > 0$
$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 - e^x(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}) > 0$
$\Leftrightarrow \left(e^x - e^{\frac{1}{2}}\right)\left(e^x - e^{-\frac{1}{2}}\right)$

On étudie le signe de chacun des facteurs.

$e^x - e^{\frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

D'autre part :

$e^x - e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$e^x - e^{\frac{1}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - e^{-\frac{1}{2}}$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2} + 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow e^{x^2} \leqslant 1$
$\Leftrightarrow e^{x^2} \leqslant e^0$
$\Leftrightarrow x^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

L'inéquation a donc une seule solution : 0.

Chapitre 11 - Fiche 5
La fonction exponentielle - Exponentielle d'une fonction affine - Corrigé des exercices

Calcul de dérivées - Corrigé

Exercice 364. Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+2}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -5\mathrm{e}^{-5x+2}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}$

Exercice 365. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

b) $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto \frac{x}{2}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
On a $f = uv$; donc $f' = u'v + uv'$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+1}$

d) $f(x) = x\mathrm{e}^{x+1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1}$.
On a $f = uv$; donc $f' = u'v + uv'$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{x+1} + x\mathrm{e}^{x+1} \\ &= \mathrm{e}^{x+1}(1 + x) \end{aligned}$$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1}$

f) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+1}$.
On a $f = uv$; donc $f' = u'v + uv'$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \mathrm{e}^{3x+1} + (x^2 + 1) \times 3\mathrm{e}^3x + 1 \\ &= \mathrm{e}^{3x+1}(x^2 + 2x + 1) \\ &= \mathrm{e}^{3x+1}(x + 1)^2 \end{aligned}$$

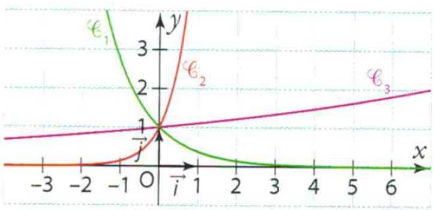
g) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
On a $f = \dfrac{u}{v}$; donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^x - (1 - \mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= (3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= 3\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

h) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x}$ et $v : x \longmapsto 1 + \mathrm{e}^{2x}$.
On a $f = \dfrac{u}{v}$; donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{-2x} \times (1 + \mathrm{e}^{2x}) - (1 - \mathrm{e}^{-2x}) \times 2\mathrm{e}^{2x}}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^0 - 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^0}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{2x} + 4}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2} \\ &= \frac{2(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2)}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2} \end{aligned}$$

Étude de variations- Corrigé

Exercice 366. On considère les fonctions f, g et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\qquad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$

1. Associer à chaque fonction sa courbe parmi les suivantes.



Soit x un réel, $f(x)$ s'écrit e^{kx} avec $k<0$, par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est représentée par $\mathscr{C}_1$.

Soit x un réel, $g(x)$ s'écrit e^{kx} avec $k>0$, par conséquent, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g'(0)=k=2$ donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est 2.

De même, soit x un réel, $h(x)$ s'écrit e^{kx} avec $k>0$, par conséquent, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h'(0)=k=\dfrac{1}{10}$ donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0 est $\dfrac{1}{10}$.
Or $\dfrac{1}{10}<2$. On en déduit que g est représentée par $\mathscr{C}_2$ et que h est représentée par $\mathscr{C}_3$.

2. En s'appuyant sur la question précédente, conjecturer les limites en $+\infty$ des suites ci-dessous :
   (a) (u_n) définie par $u_n=e^{-n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
   (b) (v_n) définie par $v_n=e^{2n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
   (c) (w_n) définie par $w_n=e^{0,1n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

   Pour tout entier naturel n, $u_n=e^{-n}=f(n)$.
   D'après la question précédente, f est représentée par $\mathscr{C}_1$ et on conjecture graphiquement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
   De même, Pour tout entier naturel n, $v_n=e^{2n}=g(n)$ et $w_n=e^{0,1n}=h(n)$.
   D'après la question précédente, g et h sont représentées respectivement par $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ et on conjecture graphiquement que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$.

Exercice 367. Déterminer les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=e^{-x}(1+x)$

• Dérivabilité et dérivée
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$,
$u:x\longmapsto e^{-x}$ et $v:x\longmapsto 1+x$.
On a $f=uv$; donc $f'=u'v+uv'$.
Donc :

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{-x}(1+x)+e^{-x}\times 1\\ &=e^{-x}(-1-x+1)\\ &=-xe^{-x}\end{aligned}$$

• Signe de la dérivée et variations
Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc f' est du signe de $-x$, d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$f(0)=e^0(1+0)=1\times1=1$.

Exercice 368. Soit f la fonction définie par :
$f(x)=2(x^2-x+1)e^x$.

1. Déterminer les variations de f.
   • Dérivabilité et dérivée
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x\in\mathbb{R}$,
   $u:x\longmapsto x^2-x+1$ et $v:x\longmapsto e^x$.
   On a $f=2uv$; donc $f'=2(u'v+uv')$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} f'(x)&=2((2x-1)e^x+(x^2-x+1)e^x\\ &=2e^x(2x-1+x^2-x+1)\\ &=2e^x(x^2+x)\\ &=2e^x x(x+1)\end{aligned}$$
   • Signe de la dérivée et variations
   Pour tout réel x, $2e^x>0$, donc f' est du signe de $x(x+1)$. C'est un trinôme qui admet 2 racines, 0 et -1. Le signe du coefficient du terme de degré 2 est positif, donc il est positif à l'extérieur des racines, négatif entre les racines, d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$6e^{-1}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

   $f(0)=2(0-0+1)e^0=2$.
   $f(1)=2(1+1+1)e^{-1}=6e^{-1}$.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
La tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
On a : $f(1) = 2(1-1+1)e^1 = 2e^1$
et $f'(1) = 2e^1 \times 1(1+1) = 2e \times 2 = 4e$
Donc La tangente (T) a pour équation :
$$y = 4e(x-1) + 2e$$
soit $$y = 4ex - 4e + 2e$$
soit $$y = 4ex - 2e$$

Exercice 369. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2e^{-x} + 2x - e^{-1}$.

1. Déterminer les variations de f.
• Dérivabilité et dérivée
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
• Signe de la dérivée et variations
Soit $x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 2 \times (-1) \times e^{-x} + 2$
$\quad = -2e^{-x} + 2$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-x} + 2 = 0$
$\Leftrightarrow -2e^{-x} = -2$
$\Leftrightarrow e^{-x} = 1$
$\Leftrightarrow e^{-x} = e^0$
$\Leftrightarrow -x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$
De plus,
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^{-x} + 2 > 0$
$\Leftrightarrow -2e^{-x} > -2$
$\Leftrightarrow e^{-x} < 1$
$\Leftrightarrow e^{-x} < e^0$
$\Leftrightarrow -x < 0$
$\Leftrightarrow x > 0$
On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		$2-e^{-1}$		↗

$f(0) = 2e^0 + 2\times 0 - e^{-1} = 2\times 1 + 0 - e^{-1} = 2 - e^{-1}$.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
La tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
On a : $f(0) = 2 - e^{-1}$
et $f'(0) = 0$
Donc la tangente (T) a pour équation :
$$y = 2 - e^{-1}$$
C'est une tangente horizontale.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
La tangente (T') à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
On a : $f(1) = 2e^{-1} + 2\times 1 - e^{-1} = e^{-1} + 2$
et $f'(1) = -2e^{-1} + 2$
Donc la tangente (T') a pour équation :
$$y = (-2e^{-1} + 2)(x-1) + e^{-1} + 2$$
soit $$y = (-2e^{-1} + 2)x + 2e^{-1} - 2 + e^{-1} + 2$$
soit $$y = 2(1 - e^{-1})x + 3e^{-1}$$

Exercice 370. Étudier le sens de variations des suites suivantes.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{5n}$.
Soit $f : x \longmapsto e^{5x}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.
De plus, $f(x)$ s'écrit e^{kx} avec $k > 0$, par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$,
on a $n < n+1$,
et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
donc : $f(n) < f(n+1)$
c'est-à-dire : $u_n < u_{n+1}$.
On a donc montré que la suite (u_n) est croissante.

2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-n}$. Soit $f : x \longmapsto e^{-x}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.
De plus, $f(x)$ s'écrit e^{kx} avec $k < 0$, par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$,
on a $n < n+1$,
et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
donc : $f(n) > f(n+1)$
c'est-à-dire : $u_n > u_{n+1}$.
On a donc montré que la suite (u_n) est décroissante.

Chapitre 11 - Fiche 6
La fonction exponentielle - Exercices de synthèse - Corrigé des exercices

Exercice 371. Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

1. Déterminons a et b en justifiant.
   Le point B de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ appartient à la courbe.
   Par conséquent, $f(0) = 2$,
   Donc $(a \times 0 + b)\mathrm{e}^0 = 2$,
   Donc $b \times 1 = 2$
   Donc $b = 2$.
   De même, le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ appartient à la courbe.
   Par conséquent, $f(-2) = 0$,
   Donc $(a \times (-2) + b)\mathrm{e}^2 = 0$, et on sait que $\mathrm{e}^2 > 0$
   Donc $-2a + 2 = 0$,
   Donc $a = 1$.
   Conclusion : $\boxed{f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}}$
2. En déduire le tableau de variation de f.
   • Dérivabilité et dérivée
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $u : x \longmapsto x+2$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   On a $f = uv$; donc $f' = u'v + uv'$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1 - x - 2) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-1 - x) \end{aligned}$$
   • Signe de la dérivée et variations
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc f' est du signe de $-1-x$, d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^1	$\searrow$	

   $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^1$.

Exercice 372. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 1$$

telle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\ ;\ 4)$ et $B(-1{,}5\ ;\ 1)$ dans un repère du plan.

1. Déterminer une expression de $f(x)$. Le point A de coordonnées $(0\ ;\ 4)$ appartient à la courbe.
   Par conséquent, $f(0) = 4$,

Donc $(a \times 0 + b)e^0 + 1 = 4$,
Donc $b \times 1 + 1 = 4$
Donc $b = 3$.
De même, le point B de coordonnées $(-1,5\ ;\ 1)$ appartient à la courbe.
Par conséquent, $f(-1,5) = 1$,
Donc $(a \times (-1,5) + 3)e^{-1,5} + 1 = 1$,
Donc $(-1,5a + 3)e^{-1,5} = 0$,et on sait que $e^2 > 0$
Donc $-1,5a + 3 = 0$,
Donc $a = 2$.
Conclusion : $\boxed{f(x) = (2x+3)e^{-x} + 1}$

2. Démontrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (-2x-1)e^{-x}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto 2x+3$ et $v : x \longmapsto e^{-x}$.
On a $f = uv + 1$; donc $f' = u'v + uv'$.
Donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times e^{-x} + (2x+3) \times (-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2-2x-3) \\ &= e^{-x}(-2x-1) \end{aligned}$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variation de f.
Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, donc f' est du signe de $-2x-1$, d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}} + 1$	$\searrow$	

$f(-\frac{1}{2}) = (2 \times \frac{-1}{2} + 3)e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2e^{\frac{1}{2}} + 1$.

4. Déterminons une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
$\mathscr{T}$ admet pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$
On a :
• $f(0) = y_A = 4$
• $f'(0) = (-2 \times 0 - 1)e^0 = -1 \times 1 = -1$ Donc $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -1(x-0) + 4$
Soit $y = -x + 4$.

Exercice 373.

1. **Partie A - Résultats préliminaires**
   (a) Déterminons une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle $f : x \longmapsto e^x$ au point d'abscisse 0.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle même.
L'équation de sa tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$,
c'est-à-dire $y = \mathrm{e}^0(x-0) + \mathrm{e}^0$
soit $y = x+1$.

(b) Soit $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$.

i. Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$.
• **Dérivabilité et dérivée**
Soit x un réel,
$g(x) = \mathrm{e}^x - (x+1) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel,
$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
• **Signe de la dérivée et variations**
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$
$\Leftrightarrow x > 0$.

On en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$.

ii. D'après le tableau de variations précédent, le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 0.
Donc, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$,
C'est-à-dire, $\mathrm{e}^x - (x+1) \geqslant 0$.
Soit, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

iii. On vient de montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x+1$ et $y = x+1$ est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de cette tangente.

2. **Partie B - Étude d'une fonction**
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

(a) i. Justifions que la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.
• On a montré dans la partie A que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$ et on sait que $x+1 > x$
Par conséquent $e^x - x > 0$ et la fonction h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

ii. Calculons la dérivée de h.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x$.
On a $h = \dfrac{u}{v}$; u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1 > x$ donc v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc :

$$h'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

iii. Étudions le sens de variation de h.
Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$, donc h' est du signe de $1 - x$, d'où le tableau de signe de h' et le tableau de variations de h.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^1 - 1}$	$\searrow$	

(b) i. Déterminons une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
$\mathcal{T}$ admet pour équation $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$
On a :
- $h(0) = 0$
- $h'(0) = \dfrac{e^0(1 - 0)}{(e^0 - 0)^2} = 1.$

Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 1(x - 0) + 0$
Soit $y = x$.

ii. Montrons que $h(x) - x = \dfrac{x(1 + x - e^x)}{e^x - x}$.
Soit x un réel,

$$h(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{x(1 - e^x + x}{e^x - x} = \frac{x(1 + x - e^x)}{e^x - x}$$

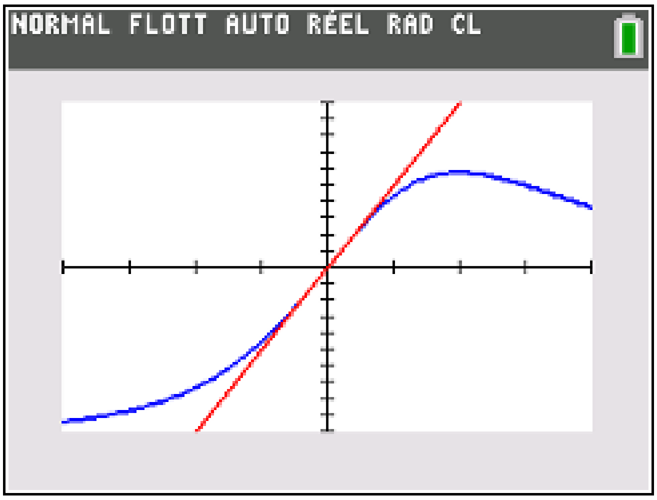
iii. Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $(\mathcal{T})$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1 > x$

Donc $e^x - x > 0$ et $\begin{cases} 1 + x - e^x < 0 \text{ pour tout } x \neq 0 \\ 1 + x - e^x = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \end{cases}$
Donc $h(x) - x$ est du signe contraire de celui de x.
On en déduit le tableau de signe de $h(x) - x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x) - x$		$+$	0	$-$	

Ainsi :
- $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente si et seulement si $x \in]-\infty\,;\,0[$
- $\mathcal{C}$ est située au-dessous de sa tangente si et seulement si $x \in]0\,;\,+\infty[$.

3. En prenant comme fenêtre $x_{min} = -2$; $x_{max} = 2$; $y_{min} = -1$ et $y_{max} = 1$, on obtient l'affichage suivant à la calculatrice.



La position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente est cohérente avec les les résultats précédents.

Exercice 374 - Taux d'alcoolémie.
Soit la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,4]$ par :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-1,25t}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur I.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur I comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons que $f'(t) = 3(1-1,25t)\mathrm{e}^{-1,25t}$.
   Soit $t \in I$,
   $u : t \longmapsto 3t$ et $v : t \longmapsto -1,25t$.
   On a $f = uw$ avec $w = \mathrm{e}^v$; donc $f' = u'w + uw'$ avec $w' = -1,25\mathrm{e}^v$.
   Donc :
   $f'(t) = 3\mathrm{e}^{-1,25t} + 3t \times (-1,25\mathrm{e}^{-1,25t})$
   $\quad = \mathrm{e}^{-1,25t}(3 + 3t \times (1,25))$
   $\quad = \mathrm{e}^{-1,25t} \times 3(1-1,25t)$
   -

   D'où le résultat.

3. Déterminons le tableau de variation de f sur I.
   Pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-1,25t} > 0$, donc f' est du signe de $1-1,25t$.
   Et $1-1,25t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{1,25} = 0,8$.
   d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f.

t	$-\infty$		$0,8$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$2,4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	

$f(0,8) = 3 \times 0,8\mathrm{e}^{-1,25\times 0,8} = 2,4\mathrm{e}^{-1}$.

4. Avec la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant de $f(t)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25 :

NORMAL FIXE2 AUTO RÉEL RAD CL
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
0.00	0.00
0.25	0.55
0.50	0.80
0.75	0.88
1.00	0.86
1.25	0.79
1.50	0.69
1.75	0.59
2.00	0.49
2.25	0.41
2.50	0.33

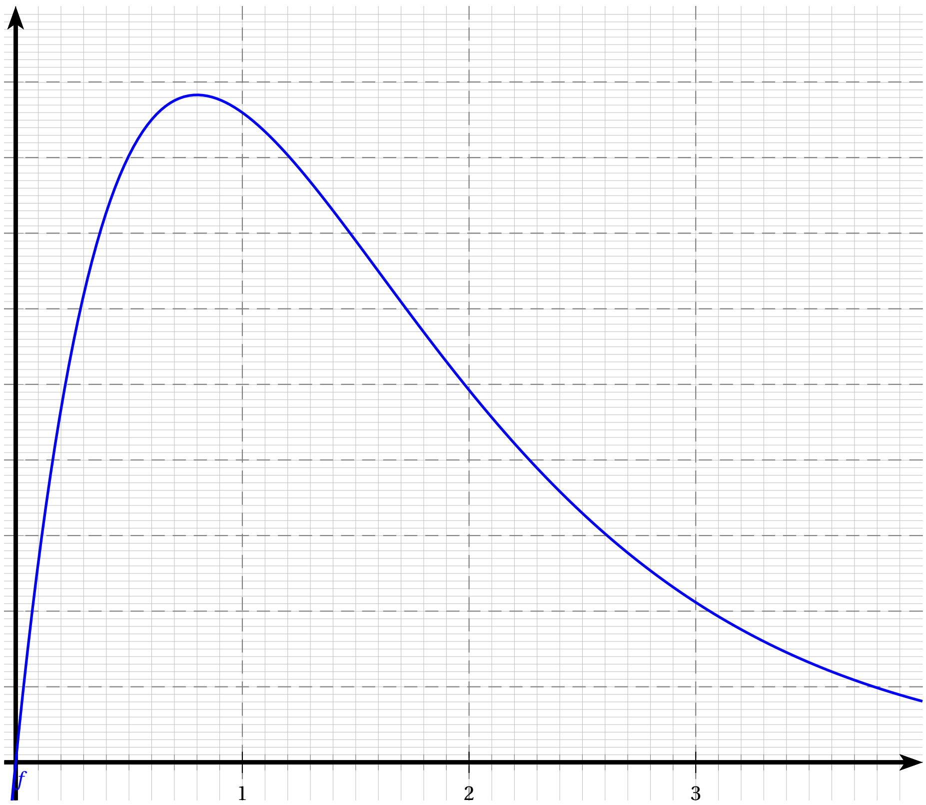
X=0

NORMAL FIXE2 AUTO RÉEL RAD CL
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
2.50	0.33
2.75	0.27
3.00	0.21
3.25	0.17
3.50	0.13
3.75	0.10
4.00	0.08
4.25	0.06
4.50	0.05
4.75	0.04
5.00	0.03

X=5

5. Représenter f dans un repère orthogonal (prendre l'unité à 3 cm en abscisses et à 10 cm en ordonnées).

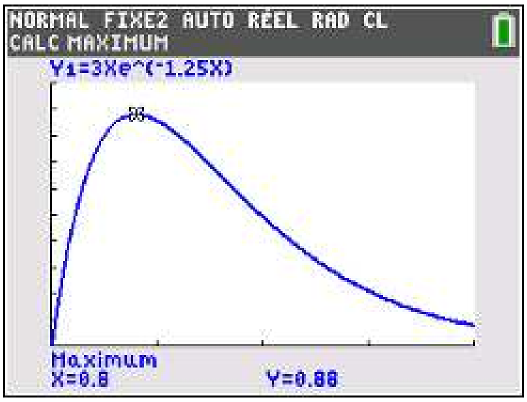


6. On admet que $f(t)$ modélise le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) en fonction du temps t (en heures) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $t = 0$.

   Le taux maximum toléré est 0,5 g/L.

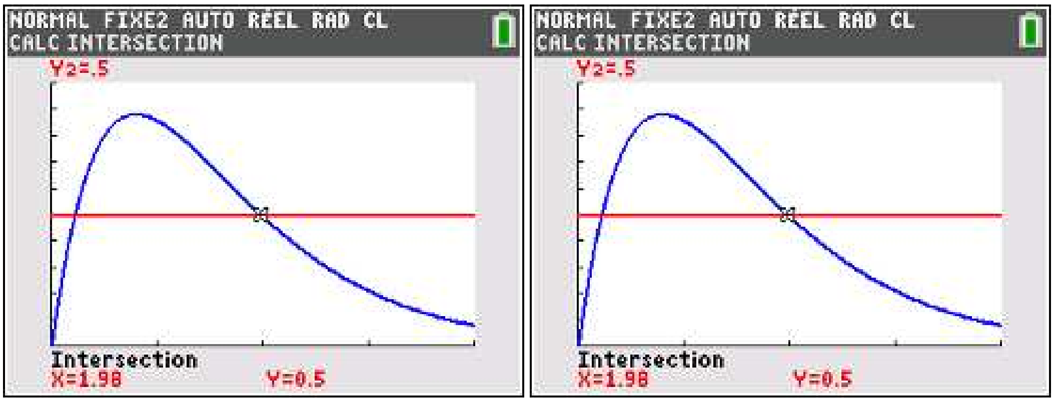
   (a) Cet homme est-il en infraction avec la loi s'il conduit un véhicule juste après l'absorption ? On a $f(0) = 0$ et $0 < 0,5$, donc il n'est pas en infraction juste après l'absorption.

   (b) Déterminer graphiquement son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu.



On lit sur le graphique précédent ou à l'aide de la calculatrice que le taux d'alcoolémie maximum est d'environ $0,88\text{g/L}$, atteint à $t \approx 0,8h$ soit après environ 48 minutes.

(c) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.



Il ne doit pas conduire lorsque sont taux est supérieur à $0,5\text{g/L}$. On lit sur le graphique précédent ou à l'aide de la calculatrice que le taux d'alcoolémie est supérieur à $0,5\text{g/L}$ sur l'intervalle $[t_1 \ ; \ t_2]$ avec $t_1 \approx 0,22$ et $t_2 \approx 1,98$. C'est donc entre 13 minutes et 2 heures environ après absorption que l'automobiliste ne peut pas conduire.

Exercice 375 - Croissance de von Bertalanffy.

$W(t) = 2\,600\left(1-0,51\mathrm{e}^{-0,075t}\right)^3$.

1. Évaluons la masse d'un nouveau-né.
   La masse d'un nouveau né est :
   $W(0) = 2\,600\left(1-0,51\mathrm{e}^{-0,075\times 0}\right)^3$
   $= 2600 \times 0,49^3$
   ≈ 306, arrondi à l'unité.
   La masse d'un éléphant nouveau né est donc d'environ 306 kilogrammes.

2. Évaluons le taux de croissance d'un nouveau-né.
   La fonction W est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$,
   posons $u : t \longmapsto 1-0,51\mathrm{e}^{-0,075t}$.
   On a $u'(t) = -0,51 \times (-0,075)\mathrm{e}^{-0,075t} = 0,03825\mathrm{e}^{-0,075t}$.
   Posons $v : t \longmapsto (1-0,51\mathrm{e}^{-0,075t})^2$.
   On a $v = u \times u$ Donc $v' = u'u + uu' = 2uu'$.
   On a $W = 2600u^3 = 2600u \times v$; donc :
   $W' = 2600(u'v + uv')$

$= 2600(u' \times u^2 + u \times 2uu')$
$= 2600(u' \times u^2 + 2u' \times u^2)$
$= 2600(3u' \times u^2)$
$= 7800u' \times u^2.$

Donc :
$W'(t) = 7800 \times 0,03825\mathrm{e}^{-0,075t} \times (1 - 0,51\mathrm{e}^{-0,075t})^2$
$= 298,35\mathrm{e}^{-0,075t} \times (1 - 0,51\mathrm{e}^{-0,075t})^2.$

Par conséquent, le taux de croissance d'un nouveau-né est : $W'(0) = 298,35\mathrm{e}^0 \times (1 - 0,51\mathrm{e}^0)^2$
$= 298,35(1 - 0,51)^2$
≈ 72 arrondi à l'unité.

La taux de croissance d'un éléphant nouveau né est donc d'environ 72 kilogrammes par an.

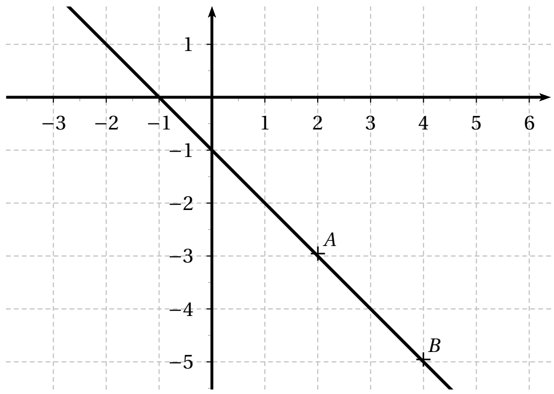
Chapitre 12 - Fiche 1
variables aléatoires - Activité d'introduction - Corrigé des exercices

Fiche 1

Géométrie plane
Vecteurs directeurs- rappels

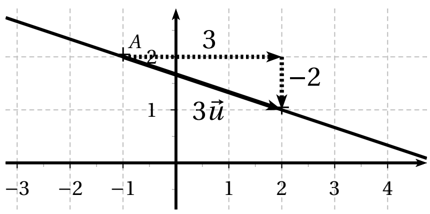
On considère que le plan est muni d'un repère. Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 453. 1. Figure :



2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le vecteur $\overrightarrow{BA}$, le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

Exercice 454. 1. Figure :
On place le point A. On place ensuite un autre point de (d) en utilisant un vecteur directeur de (d). Le vecteur $\vec{u}$ n'ayant pas des coordonnées entières, on considère le vecteur $3\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



2. $B(5\,;\,-4)$ appartient-il à (d) ?

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5+1 \\ -4-2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ainsi :
$x_{\overrightarrow{AB}}y_{\vec{u}} - y_{\overrightarrow{AB}}x_{\vec{u}} = 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 6 \times 1 = -4 + 6 = 2 \neq 0$

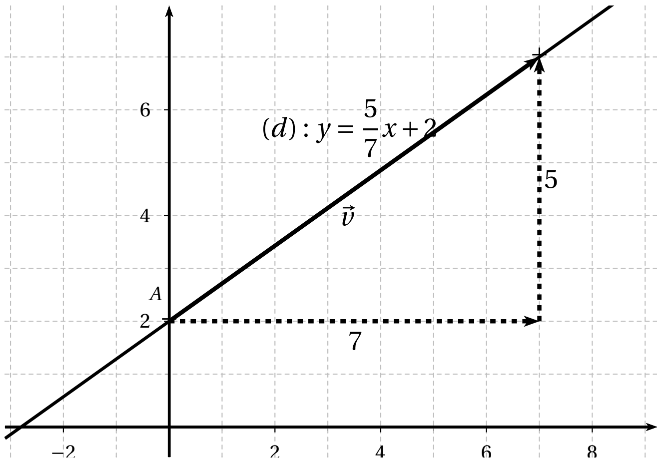
Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent, que B n'appartient pas à (d).

Exercice 455. 1. $(d) : y = \frac{5}{7}x + 2$.

(a) (d) a pour équation $y = \frac{5}{7}x + 2$, elle admet donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

On en déduit que le vecteur $7\vec{u}$, de coordonnées entières $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (d).

(b) (d) a pour ordonnée à l'origine 2. On place donc le point A de coordonnées $(0 ; 2)$. On place ensuite un autre point de (d) en utilisant le vecteur directeur de (d) à coordonnées entières déterminé à la question précédente.

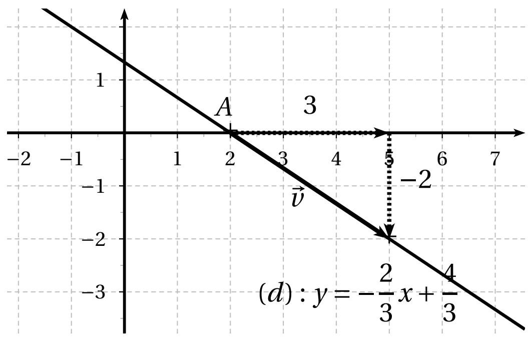


2. Reprendre la question 1. avec $(d) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

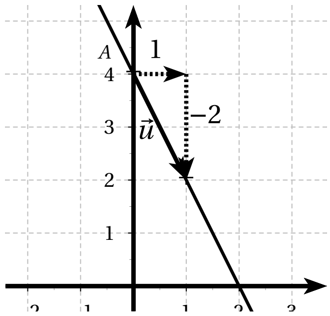
(a) (d) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. Elle admet donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

On en déduit que le vecteur $3\vec{u}$, de coordonnées entières $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (d).

(b) On détermine les coordonnées d'un point de (d) à coordonnées entières. Soit A le point de (d) d'abscisse 2, on a $y_A = -\frac{2}{3}x_A + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$, donc A a pour coordonnées $(2 ; 0)$. On place ensuite un autre point de (d) en utilisant le vecteur directeur de (d) à coordonnées entières déterminé à la question précédente.



Exercice 456. 1. (a) On place le point $A(0\ ;\ 4)$ On place ensuite un autre point de (d) en utilisant le vecteur directeur de (d).



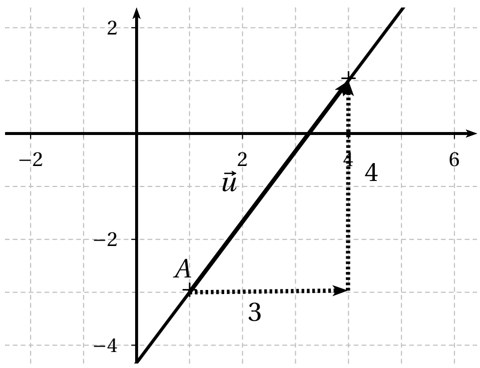
(b) (d) passe par $A(0\ ;\ 4)$ donc son ordonnée à l'origine est 4.

Elle admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, donc son coefficient directeur est -2.

Par conséquent, (d) a pour équation réduite $y = -2x + 4$.

2. Reprendre la question 1. avec $A(1\ ;\ -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(a) On place le point $A(1\ ;\ -3)$ On place ensuite un autre point de (d) en utilisant le vecteur directeur de (d).



3. (d) admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, par conséquent $\frac{1}{3}\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de (d) et elle admet donc pour coefficient directeur $\frac{4}{3}$.

Il existe donc un réel p tel que (d) a pour équation réduite $y = \frac{4}{3}x + p$.

De plus, (d) passe par $A(1;\ -3)$,

donc $y_A = \frac{4}{3}x_A + p$,
donc $-3 = \frac{4}{3} \times 1 + p$,
donc $p = -3 - \frac{4}{3} = \frac{-13}{3}$.
Par conséquent, (d) a pour équation réduite $y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$.

Exercice 457. a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), elle a donc pour coefficient directeur -3.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), le vecteur $\frac{1}{-2}\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est donc un autre vecteur directeur de (d) ; elle a donc pour coefficient directeur -2.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), le vecteur $\frac{1}{5}\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ est donc un autre vecteur directeur de (d) ; elle a donc pour coefficient directeur $-\frac{2}{5}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), le vecteur $4\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ est donc un autre vecteur directeur de (d) ; elle a donc pour coefficient directeur 8.

Fiche 2

Géométrie plane
Équation cartésienne de droite - rappels

I. Exercices

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,I,\,J)$.

Exercice 458. d a pour équation cartésienne : $2x-3y+7=0$.

1. $2x_A-3y_A+7=2\times(-2)-3\times 1+7=-4-3+7=0$ donc le couple des coordonnées de A est un couple solution de l'équation cartésienne de d donc A appartient à d.
2. $2x_B-3y_B+7=2\times\dfrac{1}{3}-3\times\dfrac{5}{2}+7=\dfrac{2}{3}-\dfrac{15}{2}+7=\dfrac{4-45+42}{6}=\dfrac{1}{6}\neq 0$ donc le couple des coordonnées de B n'est pas un couple solution de l'équation cartésienne de d donc B n'appartient pas à d.
   $2x_C-3y_C+7=2\times 3-3\times\dfrac{13}{3}+7=6-13+7=0$ donc le couple des coordonnées de C est un couple solution de l'équation cartésienne de d donc C appartient à d.

3. Le point E appartient à d donc le couple des coordonnées de E est un couple solution de l'équation cartésienne de d donc $2x_E-3y_E+7=0$. Or l'abscisse de E est connue et vaut $-\dfrac{2}{7}$ donc $2\times\dfrac{-2}{7}-3y_E+7=0$ donc, $\dfrac{-4}{7}-3y_E+7=0$. En réduisant on obtient $\dfrac{45}{7}-3y_E=0$ d'où $y_E=\dfrac{15}{7}$.
4. Le point F appartient à d donc le couple des coordonnées de F est un couple solution de l'équation cartésienne de d donc $2x_F-3y_F+7=0$. Or l'ordonnée de F est connue et vaut $\dfrac{1}{5}$ donc $2\times x_F-3\times\dfrac{1}{5}+7=0$ donc, $2x_F-\dfrac{3}{5}+7=0$. En réduisant on obtient $2x_F+\dfrac{32}{5}=0$ d'où $x_F=-\dfrac{16}{5}$.

Exercice 459. Les équations proposées sont des équations cartésiennes de droites de vecteurs directeurs ayant pour coordonnées respectives : $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; : $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; : $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et : $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. On en déduit donc, par lecture graphique, que :
(1) est une équation de d_3, (3) est une équation de d_4.
De plus, le point d'abscisse 0 de la droite d'équation (2) a pour ordonnée y vérifiant $3y-5=0$ soit $y=\dfrac{5}{3}$. On en déduit que (2) est une équation de d_1 et (4) est une équation de d_2.

Exercice 460. 1. Soit M un point du plan et $(x\,;\,y)$ ses coordonnées,

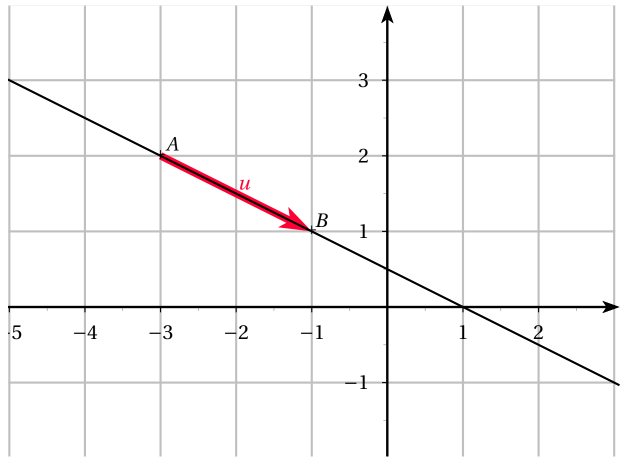
$$\begin{aligned}M\in d &\iff \overrightarrow{AM}\text{ et }\vec{u}\text{ sont colinéaires}\\ &\iff x_{\overrightarrow{AM}}y_{\vec{u}}-y_{\overrightarrow{AM}}x_{\vec{u}}=0\\ &\iff (x+3)\times(-1)-(y-2)\times 2=0\\ &\iff -x-3-2y+4=0\\ &\iff -x-2y+1=0\end{aligned}$$

Donc, $-x-2y+1=0$ est une équation cartésienne de d.

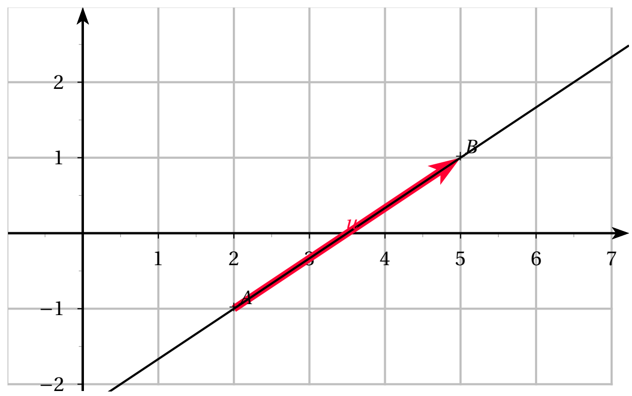
<u>Autre méthode</u> :
$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc il existe un nombre réel c tel que la droite d a pour équation équation cartésienne :

$$-x-2y+c=0$$

De plus $A(-3\ ;\ 2)$ appartient à d.
Donc $3-2\times2+c=0$ donc $c=1$.
Donc, $-x-2y+1=0$ est une équation cartésienne de d.



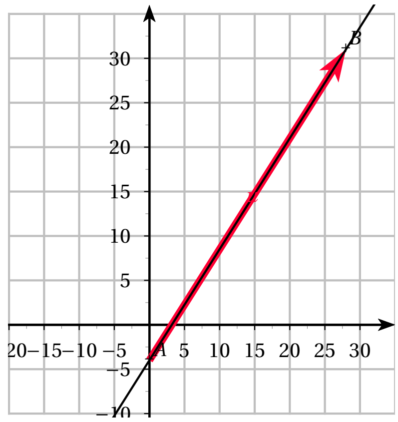
2. Soit M un point du plan et $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées,
$$\begin{aligned} M\in d &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff x_{\overrightarrow{AM}}y_{\vec{u}}-y_{\overrightarrow{AM}}x_{\vec{u}}=0\\ &\iff (x-2)\times(2)-(y+1)\times3=0\\ &\iff 2x-4-3y-3=0\\ &\iff 2x-3y-7=0\end{aligned}$$
Donc, $2x-3y-7=0$ est une équation cartésienne de d.



3. Soit M un point du plan et $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées,
$$\begin{aligned} M\in d &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff x_{\overrightarrow{AM}}y_{\vec{u}}-y_{\overrightarrow{AM}}x_{\vec{u}}=0\end{aligned}$$

$\iff (x) \times (35) - (y+4) \times 28 = 0$
$\iff 5x - 4y - 16 = 0$

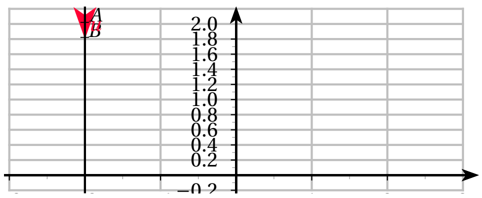
Donc, $5x - 4y - 16 = 0$ est une équation cartésienne de d.



4. Soit M un point du plan et $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées,

$M \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
$\iff x_{\overrightarrow{AM}} y_{\vec{u}} - y_{\overrightarrow{AM}} x_{\vec{u}} = 0$
$\iff (x+2) \times (-\frac{1}{5}) - (y-2) \times 0 = 0$
$\iff (x+2) \times (-\frac{1}{5}) = 0$
$\iff x + 2 = 0$

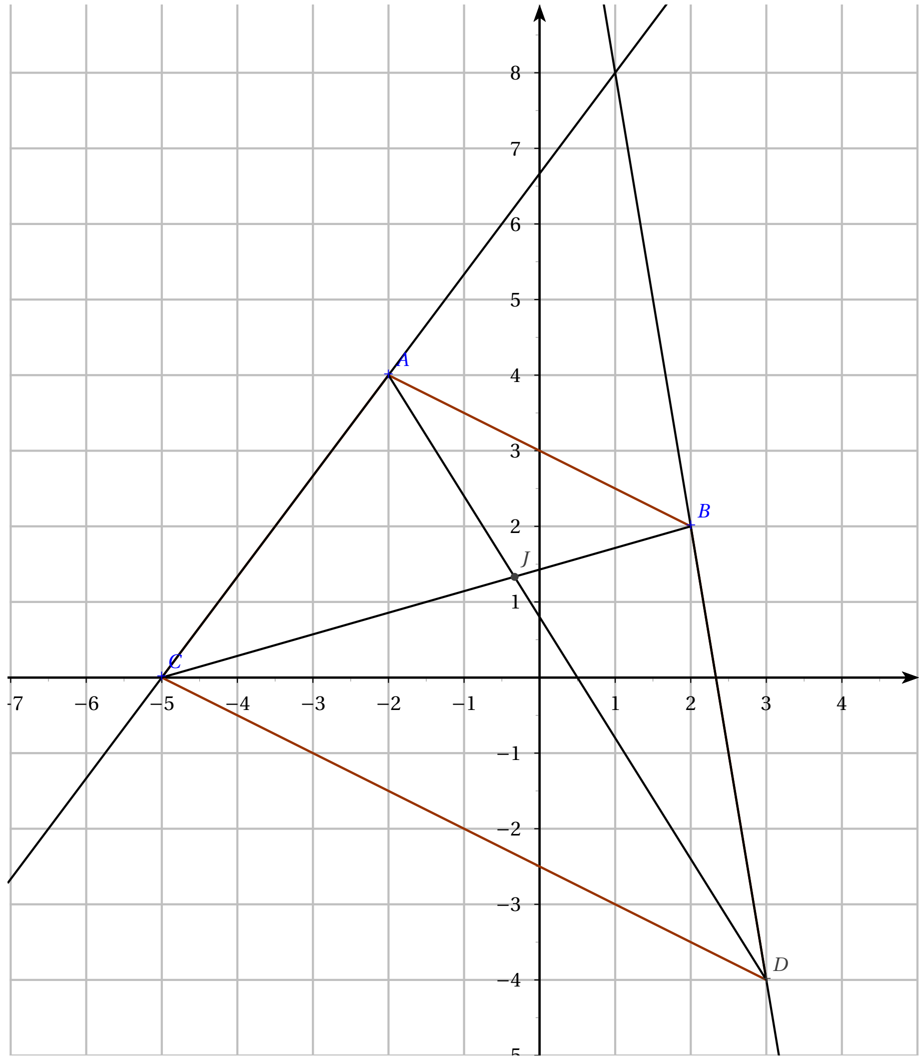
Donc, $x + 2 = 0$ est une équation cartésienne de d.



Exercice 461. Nommons d' la droite parallèle à d passant par A.

1. L'équation cartésienne de d donnée dans l'énoncé permet de trouver le vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{2}$. Comme d' et d sont parallèles, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d', ainsi il existe un réel c tel que une équation cartésienne de d' est :
$$2x - y + c = 0.$$
De plus, $A \in d'$, donc $2 \times 2 - (-3) + c = 0$ donc $c = -7$. Ainsi d' a pour équation $2x - y - 7 = 0$

2. L'équation cartésienne de d donnée dans l'énoncé permet de trouver le vecteur directeur $\vec{u}\binom{-4}{-3}$. Comme d' et d sont parallèles, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d', ainsi il existe un réel c tel que une équation cartésienne de d' est :
$$-3x + 4y + c = 0.$$
De plus, $A \in d'$, donc $-3 \times 0 + 4 \times (-3) + c = 0$ donc $c = 12$. Ainsi d' a pour équation $-3x + 4y + 12 = 0$



Exercice 462.

1. (a) On sait que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc, par définition, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Par conséquent le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.

   (b) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc, $x_D - x_C = 2(x_B - x_A)$ et $y_D - y_C = 2(y_B - y_A)$
   , donc, $x_D + 5 = 2(2+2)$ et $y_D - 0 = 2(2-4)$
   , donc, $x_D = 3$ et $y_D = -4$
   Conclusion : $D(3\ ;\ -4)$.

2. (a) — $6 \times x_B + y_B - 14 = 6 \times 2 + 2 - 14 = 0$ donc $B \in d$
   — $6 \times x_D + y_D - 14 = 6 \times 3 + (-4) - 14 = 0$ donc $D \in d$
   d est donc la droite d.

   (b) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point.
   $M \in (AC) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5+2 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
   $$\text{donc } M \in (AC) \iff (x+2)\times(-4) - (y-4)\times(-3) = 0$$
   $$\iff -4x - 8 + 3y - 12 = 0$$
   $$\iff -4x + 3y - 20 = 0$$
   Donc (AC) a pour équation cartésienne $-4x + 3y - 20 = 0$.

   (c) On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -4-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{BD}}y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{BD}}x_{\overrightarrow{AC}} = 1\times(-4)-(-6)\times(-3) = -4-18 \neq 0$.

Donc, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, (BD) et (AC) sont donc sécantes.

(d) Le couple des coordonnées du point E est un couple solution du système :

$(S)\begin{cases}6x+y-14=0\\-4x+3y-20=0\end{cases}$

Résolvons (S) :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases}6x+y-14=0\\-4x+3y-20=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-18x-3y+42=0 & L_1\leftarrow -3L_1\\-4x+3y-20=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-22x+22=0 & L_1\leftarrow L_1+L_2\\-4x+3y-20=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=1\\-4+3y-20=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion : $E(1\ ;\ 8)$

3. (a) <u>Coordonnées de k milieu de $[AB]$:</u>

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0 \text{ et } y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3$$

Conclusion : $K(0\ ;\ 3)$

<u>Coordonnées de L milieu de $[CD]$:</u>

$$x_L=\frac{x_C+x_D}{2}=\frac{-5+3}{2}=-1 \text{ et } y_L=\frac{y_C+y_D}{2}=\frac{0-4}{2}=-2$$

Conclusion : $L(-1\ ;\ -2)$

(b) On a : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}0-1\\3-8\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}-1-1\\-2-8\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{EL}=2\overrightarrow{EK}$, donc $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires, et par conséquent les points E, K, L sont alignés.

4. Pour aller plus loin.

(a) — Équation cartésienne de (AD) :

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point,

$$\begin{aligned}M\in(AD) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff x_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{AD}} - y_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{AD}} = 0\\ &\iff (x+2)(-4-4)-(y-4)(3+2)=0\\ &\iff -8x-16-5y+20=0\\ &\iff -8x-5y+4=0\end{aligned}$$

Donc (AD) admet pour équation cartésienne $-8x-5y+4=0$.

— Équation cartésienne de (BC) :

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point,

$$\begin{aligned} M \in (BC) &\iff \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff x_{\overrightarrow{BM}}y_{\overrightarrow{BC}} - y_{\overrightarrow{BM}}x_{\overrightarrow{BC}} = 0 \\ &\iff (x-2)(0-2)-(y-2)(-5-2) = 0 \\ &\iff -2x+4+7y-14 = 0 \\ &\iff -2x+7y-10 = 0 \end{aligned}$$

Donc (BC) admet pour équation cartésienne $-2x+7y-10=0$.

— Coordonnées de F, point d'intersection de (AD) et (BC) :
Le couple des coordonnées du point F est un couple solution du système :

$$(S)\begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ -2x+7y-10=0 \end{cases}$$

Résolvons (S) :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ -2x+7y-10=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ 8x-28y+40=0 \quad L_2 \leftarrow -4L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ -33y+44=0 \qquad L_2 \leftarrow L_1+L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ y=\dfrac{44}{33} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-5y+4=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-5\times\dfrac{4}{3}+4=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -8x-\dfrac{20}{3}+4=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $F(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{4}{3})$

(b) On sait, d'après 3b, que E, K, L sont alignés. Montrons que $F \in (EK)$ i.e. que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix}$.

$x_{\overrightarrow{EK}}y_{\overrightarrow{EF}} - y_{\overrightarrow{EK}}x_{\overrightarrow{EF}} = -1\times\dfrac{-20}{3}+\dfrac{4}{3}\times(-5) = \dfrac{20}{3}-\dfrac{20}{3} = 0$, donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires, et donc $F \in (EK)$ d'où le résultat.

Exercice 463. — Nommons A', B', C' les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. En utilisant la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segement, on obtient $A'\left(1\,;\,-\frac{7}{2}\right)$, $B'\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $C'(3\,;\,-3)$

— équation cartésienne de la droite (BB') : Soit $M(x\,;\,y)$ un point,
$M \in (BB') \iff \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires

$\iff x_{\overrightarrow{BM}}y_{\overrightarrow{BB'}} - y_{\overrightarrow{BM}}x_{\overrightarrow{BB'}} = 0$
$\iff (x-4)\times(-\frac{11}{2}+6)-(y+6)\times(-4)=0$
$\iff \frac{11}{2}x+4y-22+24=0$
$\iff \frac{11}{2}x+4y+2=0$

Donc (BB') admet pour équation cartésienne $11x+8y+4=0$.

— équation cartésienne de la droite (CC') : Soit $M(x\,;\,y)$ un point,

$M\in(CC') \iff \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont colinéaires
$\iff x_{\overrightarrow{CM}}y_{\overrightarrow{CC'}} - y_{\overrightarrow{CM}}x_{\overrightarrow{CC'}} = 0$
$\iff (x+2)(-3+1)-(y+1)(3+2)=0$
$\iff -2x-5y-9=0$
$\iff 2x+5y+9=0$

Donc (CC') admet pour équation cartésienne $2x+5y+9=0$.

— Déterminons alors les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. Le couple des coordonnées du point G est un couple solution du système :

$$(S)\begin{cases}11x+8y+4=0\\2x+5y+9=0\end{cases}$$

Résolvons (S) :

$$(S)\iff\begin{cases}11x+8y+4=0\\2x+5y+9=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}22x+16y+8=0\\22x+55y+99=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}39y+91=0\\11x+8y+4=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=-\frac{91}{39}\\11x+8y+4=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=-\frac{7}{3}\\11x+8\times\frac{-7}{3}+4=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=-\frac{7}{3}\\11x=-4+\frac{56}{3}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=-\frac{7}{3}\\11x=\frac{44}{3}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=-\frac{7}{3}\\x=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Conclusion : $G(\frac{4}{3}\,;\,-\frac{7}{3})$

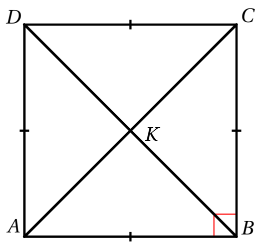
— Montrons que (AA') passe par G

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$, ainsi $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, donc A, G et A' sont alignés et G appartient à (AA'). Conclusion les médianes de ABC sont concourantes en G de coordonnées $(\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{7}{3})$.

Fiche 3

Géométrie plane
Vecteur normal et équation cartésienne

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ I,\ J)$.



Exercice 464.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $-3\overrightarrow{BC}$, etc sont des vecteurs normaux à la droite (AB).

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{CA}$, $2\overrightarrow{AC}$, $-5\overrightarrow{CK}$, etc sont des vecteurs normaux à la droite (BD).

Exercice 465. a) La droite d'équation $2x-3y+4=0$ admet le vecteur $\vec{n}\binom{2}{-3}$ comme vecteur normal et le vecteur $\vec{u}\binom{3}{2}$ comme vecteur directeur. ;

b) La droite d'équation $y=-7x+3$ admet le vecteur $\vec{u}\binom{1}{-7}$ comme vecteur directeur ; un vecteur normal est donc le vecteur $\vec{n}\binom{7}{1}$ car $\vec{u}\cdot\vec{n}=7-7=0$.

c) La droite d'équation $x=-5$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc comme vecteur directeur tout vecteur de coordonnées $\binom{0}{k}$ avec k réel non nul et comme vecteur normal tout vecteur de coordonnées $\binom{k}{0}$ avec k réel non nul.

d) La droite d'équation $y=2$ est parallèle à l'axe des abscisses. Elle admet donc comme vecteur directeur tout vecteur de coordonnées $\binom{k}{0}$ avec k réel non nul et comme vecteur normal tout vecteur de coordonnées $\binom{0}{k}$ avec k réel non nul.

Exercice 466. a) $A(1\,;\,-2)$ et $\vec{n}\binom{1}{-1}$;

— **Méthode 1**

Soit M un point du plan, on a alors :

$$\begin{aligned} M\in(d) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}\\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \end{aligned}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-1}{y+2}$. Donc :

$$\begin{aligned} M\in(d) &\iff (x-1)\times 1+(y+2)\times(-1)=0\\ &\iff x-1-(y+2)=0\\ &\iff x-1-y-2=0\\ &\iff x-y-3=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la droite (d) admet pour équation cartésienne $x-y-3=0$.

— **Méthode 2**

(d) admet le vecteur $\vec{n}\binom{1}{-1}$ comme vecteur normal.

Ainsi, d'après la propriété du cours, il existe un réel c tel que la droite (d) admette pour équation cartésienne $x - y + c = 0$.
De plus, $A \in (d)$,
donc $x_A - y_A + c = 0$.
Par suite : $1 + 2 + c = 0$,
donc $c = -3$.
Ainsi la droite (d) a pour équation : $x - y - 3 = 0$.

b) $A(-3\,;\,4)$ et $\vec{n}\binom{2}{-3}$.

— **Méthode 1**
Soit M un point du plan, on a alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
$\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x+3}{y-4}$. Donc :
$M \in (d) \iff (x+3) \times 2 + (y-4) \times (-3) = 0$
$\iff 2x + 6 - 3y + 12 = 0$
$\iff 2x - 3y + 18 = 0$
Ainsi, la droite (d) admet pour équation cartésienne $2x - 3y + 18 = 0$.

— **Méthode 2**
(d) admet le vecteur $\vec{n}\binom{2}{-3}$ comme vecteur normal.
Ainsi, d'après la propriété du cours, il existe un réel c tel que la droite (d) admette pour équation cartésienne $2x - 3y + c = 0$.
De plus, $A \in (d)$,
donc $2x_A - 3y_A + c = 0$.
Par suite : $2 \times (-3) - 3 \times 4 + c = 0$,
donc $-6 - 12 + c = 0$
donc $c = 18$.
Ainsi la droite (d) a pour équation : $2x - 3y + 18 = 0$.

c) $A(2\,;\,3)$ et $\vec{n}\binom{-2}{1}$.

— **Méthode 1**
Soit M un point du plan, on a alors :
$M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
$\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
Or le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\binom{x-2}{y-3}$. Donc :
$M \in (d) \iff (x-2) \times (-2) + (y-3) \times 1 = 0$
$\iff -2x + 4 + y - 3 = 0$
$\iff -2x + y + 1 = 0$
Ainsi, la droite (d) admet pour équation cartésienne $-2x + y + 1 = 0$.

— **Méthode 2**
(d) admet le vecteur $\vec{n}\binom{-2}{1}$ comme vecteur normal.
Ainsi, d'après la propriété du cours, il existe un réel c tel que la droite (d) admette pour équation cartésienne $-2x + y + c = 0$.
De plus, $A \in (d)$,
donc $-2x_A + y_A + c = 0$.
Par suite : $-2 \times 2 + 3 + c = 0$,
donc $-4 + 3 + c = 0$
donc $c = 1$.
Ainsi la droite (d) a pour équation : $-2x + y + 1 = 0$.

Exercice 467. La droite (d) a pour équation cartésienne $3x + y + 5 = 0$; elle admet donc pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{3}{1}$.

C'est donc un vecteur directeur de la droite (AH).
Il existe donc un réel c tel que (AH) ait pour équation cartésienne $x-3y+c=0$.
De plus, $A\in(AH)$ donc $x_A-3y_A+c=0$.
Par suite : $1-3\times 2+c=0$,
donc $1-6+c=0$, donc $c=5$.
Ainsi la droite (AH) a pour équation : $x-3y+5=0$.
Le point H est le point d'intersection des droites (d) et (AH). Ses coordonnées vérifient donc les équations des deux droites.

On a donc : $\begin{cases}3x_H+y_H+5=0\\ x_H-3y_H+5=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=-5-3x_H\\ x_H-3(-5-3x_H)+5=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=-5-3x_H\\ x_H+15+9x_H+5=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=-5-3x_H\\ 10x_H+20=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=-5-3x_H\\ x_H=-\dfrac{20}{10}=-2\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=-5-3\times(-2)=-5+6=1\\ x_H=-2\end{cases}$

Ainsi, H a pour coordonnées $(-2\,;\,1)$.

Exercice 468. Déterminons une équation de (BC).
Elle admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $\binom{3}{-9}$.
Soit M un point du plan, on a alors :

$$\begin{aligned}M\in(BC) &\iff \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff x_{\overrightarrow{BM}}y_{\overrightarrow{BC}}-y_{\overrightarrow{BM}}x_{\overrightarrow{BC}}=0\end{aligned}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\binom{x-5}{y-6}$. Donc :

$$\begin{aligned}M\in(BC) &\iff (x-5)\times(-9)-(y-6)\times 3=0\\ &\iff -9x+45-3y+18=0\\ &\iff -9x-3y+63=0\\ &\iff 3x+y-21=0\end{aligned}$$

Ainsi, la droite (BC) admet pour équation cartésienne $3x+y-21=0$.

Déterminons une équation de (AH).
La droite (BC) a pour équation cartésienne $3x+y-21=0$; elle admet donc pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{3}{1}$.
C'est donc un vecteur directeur de la droite (AH).
Il existe donc un réel c tel que (AH) ait pour équation cartésienne $x-3y+c=0$.
De plus, $A\in(AH)$ donc $x_A-3y_A+c=0$.
Par suite : $-1-3\times 1+c=0$,
donc $-1-3+c=0$, donc $c=4$.
Ainsi la droite (AH) a pour équation : $x-3y+4=0$.
Le point H est le point d'intersection des droites (BC) et (AH). Ses coordonnées vérifient donc les équations des deux droites.

On a donc : $\begin{cases}3x_H+y_H-21=0\\ x_H-3y_H+4=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=21-3x_H\\ x_H-3(21-3x_H)+4=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=21-3x_H\\ x_H-63+9x_H+4=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=21-3x_H\\ 10x_H-59=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=21-3x_H\\ x_H=\dfrac{59}{10}\end{cases}$

donc $\begin{cases}y_H=21-3\times\dfrac{59}{10}=\dfrac{33}{10}\\ x_H=\dfrac{59}{10}\end{cases}$

Ainsi, H a pour coordonnées $\left(\dfrac{59}{10}\,;\,\dfrac{33}{10}\right)$.

Exercice 469. 1. Déterminons une équation de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.
La droite (d) est perpendiculaire à la droite (AB). Elle admet donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\binom{1}{-5}$ comme vecteur normal. De plus, elle passe par le milieu C' du segment $[AB]$ qui a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1+0}{2}\ ;\ \dfrac{2-3}{2}\right)$, soit $\left(\dfrac{-1}{2}\ ;\ \dfrac{-1}{2}\right)$.

- **Méthode 1**
  Soit M un point du plan, on a alors :
  $$\begin{aligned} M\in(d) &\iff \overrightarrow{C'M} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux}\\ &\iff \overrightarrow{C'M}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{aligned}$$
  Or le vecteur $\overrightarrow{C'M}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}\\ y+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Donc :
  $$\begin{aligned} M\in(d) &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)\times 1+\left(y+\frac{1}{2}\right)\times(-5)=0\\ &\iff x+\frac{1}{2}-5y-\frac{5}{2}=0\\ &\iff x-5y-\frac{4}{2}=0\\ &\iff x-5y-2=0 \end{aligned}$$
  Ainsi, la hauteur (d) admet pour équation cartésienne $x-5y-2=0$.
- **Méthode 2**
  (d) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{1}{-5}$ comme vecteur normal, il existe donc un réel c tel que (d) ait pour équation cartésienne $1x-5y+c=0$.
  De plus, $C'\in(d)$ donc $x_{C'}-5y_{C'}+c=0$.
  Par suite : $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}+c=0$,
  donc $2+c=0$, donc $c=-2$.
  Ainsi la droite (d) a pour équation : $x-5y-2=0$.

2. Déterminons une équation de la médiatrice (d') du segment $[AC]$.
La droite (d') est perpendiculaire à la droite (AC). Elle admet donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $\binom{4}{-1}$ comme vecteur normal. De plus, elle passe par le milieu B' du segment $[AC]$ qui a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1+3}{2}\ ;\ \dfrac{2+1}{2}\right)$, soit $\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

- **Méthode 1**
  Soit M un point du plan, on a alors :
  $$\begin{aligned} M\in(d') &\iff \overrightarrow{B'M} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux}\\ &\iff \overrightarrow{B'M}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{aligned}$$
  Or le vecteur $\overrightarrow{B'M}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-1\\ y-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Donc :
  $$\begin{aligned} M\in(d') &\iff (x-1)\times 4+\left(y-\frac{3}{2}\right)\times(-1)=0\\ &\iff 4x-4-y+\frac{3}{2}=0\\ &\iff 4x-y-\frac{5}{2}=0\\ &\iff 8x-2y-5=0 \end{aligned}$$
  Ainsi, la hauteur (d') admet pour équation cartésienne $8x-2y-5=0$.
- **Méthode 2**
  (d') admet le vecteur $\overrightarrow{AC}\binom{4}{-1}$ comme vecteur normal, il existe donc un réel c tel que (d) ait

pour équation cartésienne $4x - y + c = 0$.
De plus, $B' \in (d')$ donc $4x_{B'} - y_{B'} + c = 0$.
Par suite : $4 \times 1 - 1 \times \dfrac{3}{2} + c = 0$,
donc $\dfrac{5}{2} + c = 0$, donc $c = -\dfrac{5}{2}$.
Ainsi la droite (d') a pour équation : $4x - y - \dfrac{5}{2} = 0$, qui est équivalente à $8x - 2y - 5 = 0$.

3. Déterminons les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Ω est donc le point d'intersection des droites (d) et (d'). Ses coordonnées sont donc le couple solution du système :
   $$(S)\begin{cases} x - 5y - 2 = 0 \\ 8x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$
   Résolvons le système.
   $$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} x - 5y - 2 = 0 \\ 8x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 8(5y+2) - 2y - 5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 40y + 16 - 2y - 5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 38y + 11 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 5y + 2 \\ y = -\dfrac{11}{38} \end{cases}\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} x = 5 \times \dfrac{-11}{38} + 2 \\ y = -\dfrac{11}{38} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{-55 + 76}{38} \\ y = -\dfrac{11}{38} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{21}{38} \\ y = -\dfrac{11}{38} \end{cases}\end{aligned}$$
   Par conséquent, Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{21}{38}\ ;\ -\dfrac{11}{38}\right)$

Exercice 470.

1. Déterminons une équation de la hauteur issue de F dans le triangle FGH.
   (h_F) est la droite passant par F et de vecteur normal $\overrightarrow{GH}$, de coordonnées $\binom{-5}{4}$.

   Soit M un point du plan, on a alors :
   $$\begin{aligned} M \in (h_F) &\iff \overrightarrow{FM} \text{ et } \overrightarrow{GH} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{GH} = 0 \end{aligned}$$
   Or le vecteur $\overrightarrow{FM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$. Donc :
   $$\begin{aligned} M \in (h_F) &\iff (x-2) \times (-5) + (y-5) \times 4 = 0 \\ &\iff -5x + 10 + 4y - 20 = 0 \\ &\iff -5x + 4y - 10 = 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, la hauteur (h_F) admet pour équation cartésienne $-5x + 4y - 10 = 0$.
2. Déterminons une équation de la hauteur issue de H dans le triangle FGH.
   (h_H) est la droite passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{FG}$, de coordonnées $\binom{2}{-6}$.

   Soit M un point du plan, on a alors :
   $$\begin{aligned} M \in (h_H) &\iff \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{FG} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FG} = 0 \end{aligned}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{HM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} M \in (h_H) &\iff (x+1)\times 2+(y-3)\times(-6)=0 \\ &\iff 2x+2-6y+18=0 \\ &\iff 2x-6y+20=0 \\ &\iff x-3y+10=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur (h_H) admet pour équation cartésienne $x-3y+10$.

3. Déterminons les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

   Soit Ω l'orthocentre de FGH. Ω est donc le point d'intersection des hauteurs (h_F) et (h_H). Ses coordonnées sont donc le couple solution du système :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y-10=0 \\ x-3y+10=0 \end{cases}$$

   Résolvons le système.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} -5x+4y-10=0 \\ x-3y+10=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5x+4y-10=0 \\ x=3y-10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5(3y-10)+4y-10=0 \\ x=3y-10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -15y+50+4y-10=0 \\ x=3y-10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -11y+40=0 \\ x=3y-10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} y=\dfrac{40}{11} \\ x=3\times\dfrac{40}{11}-10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=\dfrac{40}{11} \\ x=\dfrac{120}{11}-\dfrac{110}{11} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=\dfrac{40}{11} \\ x=\dfrac{10}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

   Par conséquent, Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{10}{11}\,;\,-\dfrac{40}{11}\right)$

Exercice 471. 1. Figure :

2. Démontrons que $H\left(0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

   La hauteur issue de C est perpendiculaire à (AB) et a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, une équation cartésienne de cette hauteur est : $3x+4y+c=0$.
   De plus, C appartient à la hauteur issue de C, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la hauteur.
   Donc $3x_C+4y_C+c=0$,
   donc $3\times 2+4\times 0+c=0$,
   donc $6+c=0$,
   donc $c=-6$. La hauteur issue de C a donc pour équation $3x+4y-6=0$.
   Les coordonnées de H sont telles que :
   $3x_H+4y_H-6=3\times 0+4\times\dfrac{3}{2}-6=0+6-6=0$, donc H appartient à la hauteur issue de C.

   Déterminons la hauteur deABC issue de A.
   Les points B et C ont pour ordonnée 0, ils appartiennent donc à l'axe des abscisses et A appartient à l'axe des ordonnées, donc la hauteur issue de A est l'axe des ordonnées. Ainsi, comme H

a pour abscisse 0, H appartient à la hauteur de ABC issue de A.

On a montré que H appartient à deux hauteurs du triangle ABC, c'est donc l'orthocentre du triangle ABC.

3. Déterminons les coordonnées des points P et Q.

   — Déterminons les coordonnées de P.
   La perpendiculaire (OP) à (AB) passant par O a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\binom{-3}{-4}$. Il existe donc un réel c tel que (OP) ait pour équation cartésienne $-3x-4y+c=0$. Comme elle passe par O, on obtient $c=0$. Une équation cartésienne de (OP) est donc : $3x+4y=0$.

   Le point P appartient à (OP) et a pour abscisse -3. On a donc :
   $3\times(-3)+4y_P=0$,
   donc $-9+4y_P=0$, donc $y_P=\dfrac{9}{7}$.
   Conclusion : le point P a pour coordonnées $\left(-3\ ;\ \dfrac{9}{4}\right)$.

   — Déterminons les coordonnées de Q.
   La perpendiculaire (OQ) à (AC) passant par O a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $\binom{2}{-4}$. Il existe donc un réel c tel que (OQ) ait pour équation cartésienne $2x-4y+c=0$. Comme elle passe par O, on obtient $c=0$. Une équation cartésienne de (OQ) est donc : $2x-4y=0$ soit $x-2y=0$.

   Le point Q appartient à (OQ) et a pour abscisse 2. On a donc :
   $2-2y_Q=0$,
   donc $2y_Q=2$, donc $y_Q=1$.
   Conclusion : le point Q a pour coordonnées $(2\ ;\ 1)$.

4. Étudions l'alignement des points P, Q et H.
   Le vecteur $\overrightarrow{PH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-\dfrac{3}{4}\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}5\\-\dfrac{5}{4}\end{pmatrix}$.
   $x_{\overrightarrow{PH}}y_{\overrightarrow{PQ}}-x_{\overrightarrow{PQ}}y_{\overrightarrow{PH}}=3\times\dfrac{-5}{4}-\dfrac{-3}{4}\times 5=0$
   Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{PH}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, donc les points P, Q et H sont alignés.

Exercice 472.

1. Justifions que $(D\ ;\ U,\ V)$ est un repère orthonormé.
   Comme $(DU)\perp(DV)$ et $DU=DV=1$, le repère $(D\ ;\ U,\ V)$ est un repère orthonormé.
2. Déterminons une équation de la droite (DH).
   Dans le repère $(D\ ;\ U,\ V)$, le point C a pour coordonnées $(0\ ;\ 3)$, le point B a pour coordonnées $(-3\ ;\ 0)$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on a $AD^2=AC^2-DC^2=25-9=16$, donc $AD=4$ et le point A a donc pour coordonnées $(0\ ;\ 4)$.
   La droite (DH) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $\binom{3}{-4}$.
   Il existe donc un réel c tel que (DH) ait pour équation $3x-4y+c=0$.
   De plus, D de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ appartient à (DH),
   donc $c=0$ et une équation cartésienne de (DH) est donc $3x-4y=0$.
3. Déterminons les coordonnées des points H et K.
   Déterminons une équation de (AC).

$\overrightarrow{AC}$, vecteur directeur de (AC) a pour coordonnées $\binom{3}{-4}$.
Il existe donc un réel c tel que (AC) ait pour équation $-4x-3y+c=0$.
De plus, C de coordonnées $(3\ ;\ 0)$ appartient à (AC),
donc $-4\times 3+0+c=0$, donc $c=12$
et une équation cartésienne de (AC) est donc $-4x-3y+12=0$, soit $4x+3y-12=0$.

Déterminons les coordonnées de *H*.

H est le point d'intersection de (AC) et de (DH).
Ses coordonnées sont donc le couple solution du système :

$$(S)\begin{cases}4x+3y-12=0\\3x-4y=0\end{cases}$$

Résolvons le système.

$$(S)\iff\begin{cases}12x+9y-36=0 & \ell_1\leftarrow 3\ell_1\\12x-16y=0 & \ell_2\leftarrow 4\ell_2\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}0x+25y-36=0 & \ell_1\leftarrow \ell_1-\ell_2\\12x-16y=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=\dfrac{36}{25}\\12x-16y=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=\dfrac{36}{25}\\12x-16\times\dfrac{36}{25}=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=\dfrac{36}{25}\\12x=\dfrac{16\times 36}{25}\end{cases}$$
$$(S)\iff\begin{cases}y=\dfrac{36}{25}\\x=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{16\times 36}{25}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=\dfrac{36}{25}\\x=\dfrac{48}{25}\end{cases}$$

Par conséquent, H a pour coordonnées $\left(\dfrac{48}{25}\ ;\ \dfrac{36}{25}\right)$.

Déterminons les coordonnées de *K*.

Le point K est le milieu de $[DH]$. Il a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{24}{25}\ ;\ \dfrac{18}{25}\right)$.

4. Démontrons que (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

   Le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{24}{25}\\ \dfrac{-82}{25}\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{123}{25}\\ \dfrac{36}{25}\end{pmatrix}$.

   Par conséquent, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BH}=\dfrac{24}{25}\times\dfrac{123}{25}+\dfrac{-82}{25}\times\dfrac{36}{25}=\dfrac{2952}{25}-\dfrac{2952}{25}=0$

   Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux et par conséquent, (AK) et (BH) sont perpendiculaires.