Thème 1

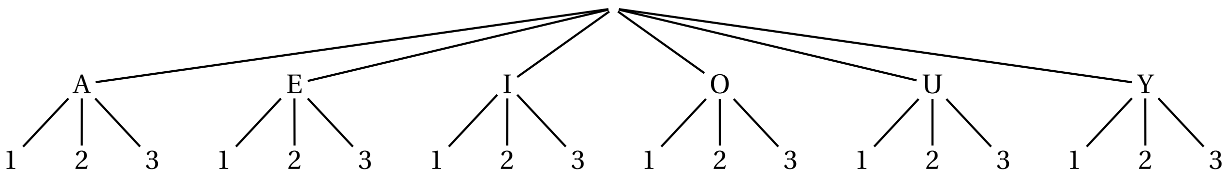
Fiche 1

Dénombrement
Activités préparatoires

Le principe multiplicatif

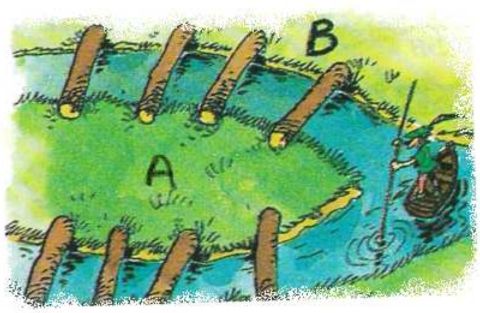
Considérons l'exemple suivant : un code est formé d'une voyelle, suivie de l'un des chiffres 1, 2, ou 3. Pour dénombrer tous les codes possibles, on peut avoir recours à un tableau ou à un arbre.

Chiffre \ Lettre	A	E	I	O	U	Y
1	$A1$	$E1$	$I1$	$O1$	$U1$	$Y1$
2	$A2$	$E2$	$I2$	$O2$	$U2$	$Y2$
3	$A3$	$E3$	$I3$	$O3$	$U3$	$Y3$



L'arbre montre clairement que le choix de la lettre offre 6 possibilités, et que, pour chaque choix de la lettre, il y a 3 façons de choisir le chiffre. Il y a donc 6×3 soit 18 codes possibles.
C'est le **principe du produit** ou **principe multiplicatif**.

Exercice 1. Combien de trajets ?



En appliquant le principe multiplicatif, dénombrer les trajets permettant d'aller de A en B, puis de revenir en A sans jamais passer deux fois sur le même pont.

Exercice 2. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments
Pour définir une partie de cet ensemble, il suffit de connaître, pour chaque élément, la réponse (OUI ou NON) à la question : « Appartient-il à cette partie ? ».
À l'aide du principe multiplicatif, déterminer le nombre de parties de cet ensemble.

Exercice 3. Nombre de façons d'ordonner un ensemble
Montrer que le nombre de façons de ranger les cinq lettres : N, A, C, R, E est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.
Ce nombre est noté $5!$ et se lit « factorielle 5 ».

Mots, listes, parties

Soit l'ensemble $\mathscr{E} = \{A, B, C, D, E, F\}$.
L'objet des exercices suivants est de dénombrer :

- les MOTS de 3 lettres, comme FEE, ABA, FFB, CAC, ..., encore appelés « 3-listes de $\mathscr{E}$ » ;
- les MOTS de 3 lettres distinctes, comme BAC, ABC, FAC, DEA, ..., encore appelés « arrangements de 3 lettres de $\mathscr{E}$ » ;
- les PARTIES à 3 éléments comme $\{A, B, F\}$, $\{D, C, F\}$, ..., $\{A, F, B\}$.
  On observe que les parties à 3 éléments se distinguent des mots de 3 lettres distinctes par le fait que l'*ordre* n'intervient pas lorsque l'on écrit les éléments d'une partie.

Exercice 4. Mots de 3 lettres
À l'aide du principe multiplicatif, montrer qu'il y a 6^3 mots de 3 lettres.

Exercice 5. Mots de 3 lettres distinctes
Toujours à l'aide du principe multiplicatif, montrer que le nombre de mots de 3 lettres distinctes est $6 \times 5 \times 4$. Un tel nombre sera noté A_6^3.

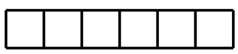
Exercice 6. Parties à 3 éléments
On note $\binom{6}{3}$ et on lit 3 parmi 6 le nombre de parties de $\mathscr{E}$ ayant 3 éléments.
En dénombrant les rangements possibles de 3 lettres données, montrer que :

$$A_6^3 = (3 \times 2 \times 1) \times \binom{6}{3}$$

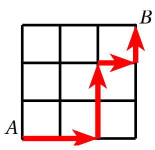
En déduire la valeur de $\binom{6}{3}$.

Autres exemples de dénombrement

Exercice 7. Combien de mots de six lettres peut-on écrire en utilisant 3 lettres « D » et 3 lettres « H » ?
Indication : Combien de façons a-t-on de choisir les trois cases où l'on écrit la lettre « D » ?

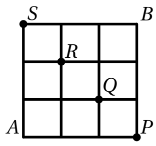


Exercice 8. Trajectoires
Combien de trajectoires vont de A en B en suivant le quadrillage ? (On considère uniquement les trajectoires les plus courtes, c'est-à-dire sans retour en arrière).



a) *Méthode 1*
Se ramener à l'exercice précédent, en codant les trajectoires à l'aide de D (« droite ») et H (« haut »). (Le trajet ci-dessus serait codé DDHHDH.)

b) *Méthode 2*
Dénombrer ces trajectoires par un calcul direct, en les triant, selon qu'elles passent par l'un des points P, Q, R, S (cette méthode de tri est appelée **méthode de la somme**).



Exercice 9. Un faux « Vrai/Faux »
Un « Vrai/Faux » propose 6 questions. Combien y a-t-il de réponses possibles à l'ensemble du questionnaire ?

a) *Méthode 1*
À l'aide du principe multiplicatif.

b) *Méthode 2*
En triant les réponses possibles en fonction du nombre de « Vrai ».

c) Déduire des deux méthodes précédentes la relation :

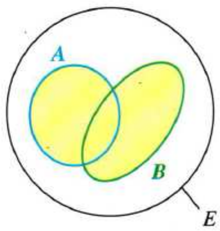
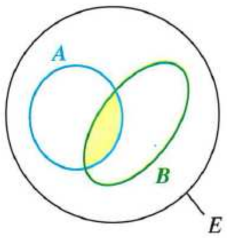
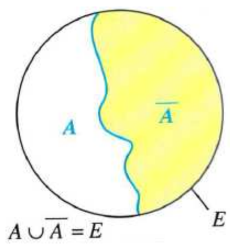
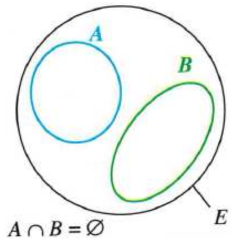
$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6$$

Fiche 2

Dénombrement
Principes de dénombrement

I. Langage des ensembles

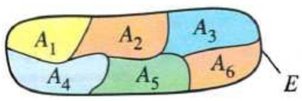
I.1. Parties d'un ensemble

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E	A et B sont disjoints
			

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E (y compris $\varnothing$ et E).

Définition 1

Les parties A_1 , ..., A_p d'un ensemble E constituent une **partition** de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.



I.2. Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2
Le **produit cartésien** des ensembles E et F est l'ensemble des couples $(a,\ b)$, où a appartient à E, et b à F. On le note $E \times F$.

Exemple
Ainsi, si $E = \{a,\ b,\ c\}$ et $F = \{l,\ 2\}$, on a :

$$E \times F = \{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (c,\ 1),\ (c,\ 2)\}.$$

On généralise cette notion à n ensembles ($n \geqslant 2$) en faisant intervenir des n-uplets.
Le n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n)$ est une suite finie ; on dit parfois « mot de longueur n » et on le note alors $a_1 a_2 \dots a_n$.

I.3. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 3
Si un ensemble E est fini et contient n éléments, ce nombre est appelé le **cardinal** de E. On note $Card(E) = n$, en convenant que $Card\emptyset = 0$.

II. Principes de dénombrement

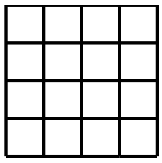
II.1. Principe de la somme

Règle 1
Si $A_1, \ldots, A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E, alors :

$$Card(E) = Card(A_1) + \cdots + Card(A_p).$$

Nous admettons ce résultat conforme à l'intuition.

Exemple



Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ? Soit E l'ensemble de tous ces carrés. On note A_1 ,A_2, A_3, A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3, 4 petits carreaux. Les sous-ensembles A_1 ,A_2, A_3, A_4 constituent une partition de E, donc $Card(E) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Propriété 1
A et B sont deux parties d'un ensemble fini E.

- Si A et B sont disjointes, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
- Dans tous les cas, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$.

Démonstration : Voir exercice 1 □

II.2. Principe du produit

Règle 2
Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ..., n_p possibilités, où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i, alors le nombre total d'issues est :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Remarques

— La règle 2 n'exige pas l'indépendance des étapes, mais seulement l'indépendance du nombre de possibilités offertes à chaque étape, comme dans l'exemple qui suit.

— Cette règle légitime le dénombrement à l'aide d'un arbre.

— Le cardinal d'un produit cartésien en découle immédiatement :

$$Card(E_1 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times \cdots \times Card(E_p).$$

Exemple
Un code comporte deux lettres distinctes et un chiffre autre que 0. Combien peut-on former de codes distincts ?
Les 3 étapes : choix de la première lettre, de la deuxième lettre, du chiffre, offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9$.

Exercices

Ensemble, cardinal

Exercice 10. A et B sont deux parties d'un ensemble fini E. À partir de la règle de la « partition », établir la propriété :

a) Si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

b) Dans tous les cas, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

c) $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$.

Exercice 11. Dans un camp de vacances Hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 personnes ne pratiquent aucun de ces sports.
Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Exercice 12. 1. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Prouver que :
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

2. Application : Sur 100 maisons que comporte le village, on a relevé 88 maisons équipées d'un téléviseur, 90 équipées d'un lave-linge et 94 équipées d'un réfrigérateur. Combien y a-t-il, au minimum, de maisons qui sont équipées de ces trois appareils ménagers ?

Principes de la somme et du produit

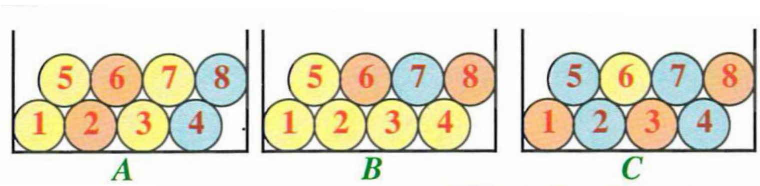
Exercice 13. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec un alphabet de 26 lettres :

a) en admettant une répétition des lettres ?

b) sans lettre « double » ?

Exercice 14. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes suivies de deux chiffres distincts ?

Exercice 15. On considère la situation suivante :



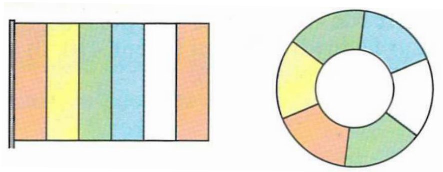
Un tirage consiste à prélever une boule dans chaque urne.

1. Dénombrer les tirages possédant la caractéristique indiquée.
   (a) 3 boules jaunes.
   (b) 3 boules de même couleur.

(c) 2 boules jaunes, exactement.
(d) 2 boules de même couleur (exactement).
(e) Trois boules de couleur différente.
(f) Trois nombres pairs.
(g) Trois nombres consécutifs.
(h) La somme des points est 10.

2. Quelle est la somme de points la plus fréquemment obtenue ?

Exercice 16. On dispose de 5 couleurs pour, colorier le drapeau et la bouée dessinés ci-dessous, deux zones voisines, ne pouvant recevoir la même couleur.



Dénombrer, dans chaque cas, les coloriages possibles.

Exercice 17. Dans un département donné de province, un numéro d'immatriculation de voiture est composé d'un entier compris entre 1 et 9 999 suivi de deux lettres (autres que I et 0). Combien peut-on construire de tels numéros ?

Fiche 3

Dénombrement
p-listes d'un ensemble fini

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992

I. p-listes « avec répétition »

Définition 4
Une p-liste (ou liste de longueur p) d'un ensemble E est un p-uplet (ou suite de longueur p, ou mot de longueur p) d'éléments de E. C'est un élément du produit cartésien $E^p = E \times \cdots \times E$ (p facteurs).

- Ainsi, le mot *ananas* est une 6-liste de $E = \{a,\ b,\ c, \dots,\ y,\ z\}$.
- On précise parfois : p-liste « avec répétition » par opposition aux arrangements évoqués au paragraphe suivant.

Théorème 1
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p.

Démonstration : Ce résultat découle immédiatement de la règle 2 (principe multiplicatif). □

II. Arrangements - Permutations

Définition 5
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.
Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemples

1. Les entiers de trois chiffres s'écrivant à l'aide de trois chiffres impairs tous distincts sont les arrangements de trois éléments de $E = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$. Leur nombre est $5 \times 4 \times 3$ (5 possibilités pour le premier chiffre, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième).
2. Les anagrammes du mot *sucre* (mots, ayant un sens ou non, écrits en modifiant l'ordre des cinq lettres s, u, c, r, e) sont les permutations de l'ensemble $E = \{s,\ u,\ c,\ r,\ e\}$. Leur nombre est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Théorème 2
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) \text{ (p facteurs)}.$$

Le nombre de permutations de E est :

$$n! = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Démonstration : Ce résultat découle immédiatement de la règle 2 (principe multiplicatif). □

Remarques

- $n!$ se lit « factorielle n », et on convient que $0! = 1$.
- Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; on peut alors poser que $A_n^0 = 1$.
- $n!$ est aussi le nombre de façons d'ordonner les éléments de E.

Exercices

Exercice 18. Une course de chevaux compte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles du tiercé (dans l'ordre) ?

Exercice 19.

1. Sans répétition, combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 1, 3, 5, 6, 7, 9 ?
2. Combien de ces nombres sont :

   a) inférieurs à 500 ? b) pairs ? c) impairs ? d) multiples de 5 ?

Exercice 20. Calculer A_6^2, A_4^2, A_2^2 et $\dfrac{A_6^2 \times A_4^2 \times A_2^2}{6!}$

Exercice 21. Dénombrer les anagrammes des mots « LION » et « TOTORO ».

Exercice 22. De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes :

a) sur une rangée de 7 chaises ?

b) autour d'une table ronde ?

Exercice 23. Sachant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côtés des autres, de combien de façons 3 Français, 4 Allemands, 3 Anglais et 2 Italiens peuvent-ils s'asseoir sur un banc ?

Fiche 4

Dénombrement
Combinaisons

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992

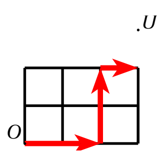
I. Définition

Définition 6
E est un ensemble fini de cardinal n, et p est un entier, on appelle combinaison (sans répétition) de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

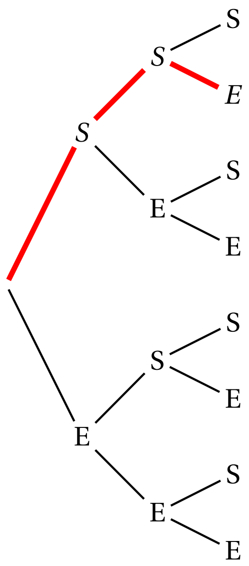
- Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$, (lire « p parmi n »). Cette notation anglo-saxonne a remplacé la notation C_n^p , (lire « cé aine pé »).
- Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux car ils interviennent dans le développement à l'aide de la formule du binôme de Newton de $(a+b)^n$. cf infra.
- Lorsque $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$, car il n' y a aucun sous ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, si cette condition est vérifiée.
- $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$. En effet, il y a un seul sous-ensemble de cardinal nul, c'est l'ensemble vide. De même, il y a un seul sous-ensemble de cardinal n, c'est l'ensemble lui même.
- On peut considérer les arrangements de E comme des combinaisons ordonnées de E.

Deux situations :

1. Les mots de cinq lettres contenant deux fois la lettre H et trois fois la lettre D peuvent être considérés comme des combinaisons de 2 éléments de l'ensemble des 5 emplacements des lettres. En effet, les deux emplacements des lettres H déterminent un tel mot.
2. Les trajectoires les plus courtes reliant O à U en suivant le réseau de la figure ci dessous peuvent être codées par des mots de 5 lettres contenant $2H$ et $3D$ (H=Haut et D =Droite). leur nombre est encore $\binom{5}{2}$.



Trajectoire codée $DDHHD$.

3. 

Représentations en termes de chemins dans un arbre. De chaque noeud de l'arbre ci-dessous partent deux branches : S (Succès) et E (Échec). Un chemin de cet arbre peut être codé par un mot de n lettres choisies parmi S et E. Le nombre de chemins comportant exactement p succès est égal au nombre de mots de n lettres comportant p fois la lettre S. C'est à dire $\binom{n}{p}$ Par exemple,le chemin rouge est codé par le mot SSE.

II. Première formule génératrice

Théorème 3
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : Soit E un ensemble de cardinal n. Cherchons de combien de façons on peut choisir une partie A contenant p éléments de E et un élément x de A.

- Première manière : On peut commencer par choisir la partie A, puis choisi r l'élément de x dans A. En utilisant le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{p} \times p$ choix possibles.
- Deuxième manière : On commence par choisir l'élément x dans E puis on choisit parmi les $n-1$ éléments de E qui sont différents de x, les $p-1$ éléments qui, avec x, constituent la partie A.En utilisant le principe multiplicatif, il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ choix possibles. □

On obtient alors

$$\binom{n}{p} \times p = n \times \binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 4 (Conséquence :formule close avec les factorielles)
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dot{}(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\dot{}\times 2 \times 1}$$

Cette dernière égalité s'écrit de manière plus condensée en utilisant la factorielle,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration : Si $p = 0$, le résultat est évident. Sinon, il suffit d'appliquer $p-1$ fois le théorème précédent. □

III. Lien arrangements-combinaisons

Théorème 5
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Démonstration :

— Il suffit de remplacer l'expression de A_n^p dans l'expression précédente pour obtenir l'égalité.

— Une autre technique de démonstration consiste à remarquer que pour créer une p-liste éléments deux à deux distincts d'éléments de E, on peut procéder en deux temps, dans un premier temps choisir une combinaison de p éléments, puis choisir un ordre sur cette combinaison D'après le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{p} \times p!$ façons de choisir un arrangement d'où l'égalité $\binom{n}{p} \times p! = A_n^p$. □

Exemples

1. $\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!9!} = 10$
2. $\binom{10}{9} = \frac{10!}{9!1!} = 10$
3. Le nombre de façons de choisir 4 personnes dans une assemblée de 10 est $\binom{10}{4}$,

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 210$$

4. Le nombre de mots de 7 lettres possédant 5 S et 2 E est $\binom{7}{2}$.

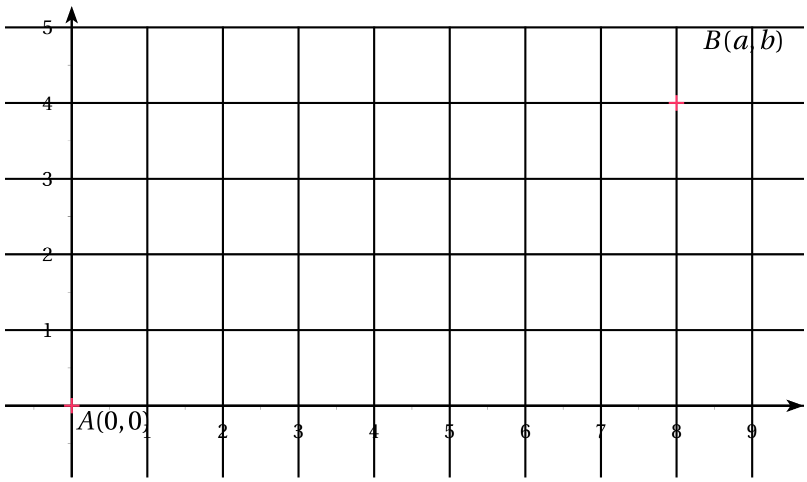
$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

Exercices

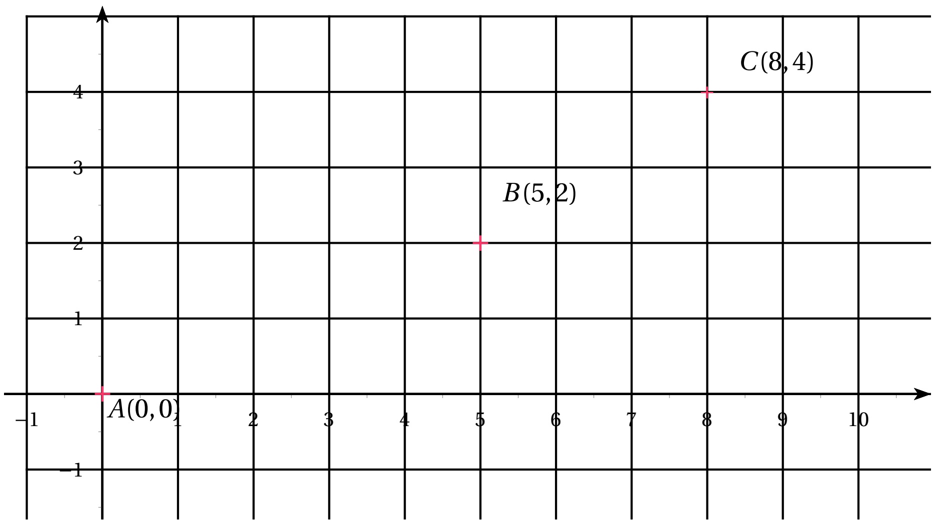
Exercice 24. Combien de comités de 3 membres peut-on élire dans une assemblée de 20 personnes ?

Exercice 25. Combien de résultats contenant n « Pile » peut-on dénombrer lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce de monnaie ?
Donner une valeur approchée de ce nombre en utilisant la formule de Stirling, qui consiste à prendre pour valeur approchée de $n!$: $n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ pour de « grandes » valeurs de n.

Exercice 26. Établir le résultat général suivant :
Le nombre de trajectoires de plus court chemin tracées sur la quadrillage reliant $A(0;0)$ à $B(a,b)$ est $\binom{a+b}{a}$, (ou encore $\binom{a+b}{b}$).



Exercice 27. Montrer que le nombre de trajectoires reliant A à C en passant par B sur le quadrillage ci dessous est $\binom{7}{2}\times\binom{5}{2}$.



Exercice 28. Parmi 8 hommes et 6 femmes, combien peut-on former de comités de 5 personnes comprenant :

a) 4 hommes exactement ?

b) 4 hommes au moins ?

c) au moins deux femmes ?

Exercice 29. A l'écrit d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

a) Combine y-a-t-il de choix possibles ?

b) Même question sachant que deux exercices sont obligatoires. ?

Fiche 5

Dénombrement propriétés des combinaisons

D'après MATH Terminales C et E - Terrracher - 1992

I. Propriétés des combinaisons

Théorème 6
Ces propriétés résultent immédiatement de la définition ou de la formule explicite des combinaisons à l'aide des factorielles.

- Pour tout n entier naturel, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
- Pour tout n entier naturel non nul, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$
- Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p avec $p \leqslant n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Remarques
La démonstration de la dernière égalité peut être obtenue de manière algébrique en appliquant la formule donnant les combinaisons à l'aide des factorielles. On peut aussi l'obtenir par une démonstration ensembliste. En effet à chaque partie de p élément est associée de manière unique son complémentaire qui est une partie de $n-p$ élément. Cette correspondance est bijective et on peut donc conclure que le nombre de parties à p éléments, d'un ensemble en comportant n, est aussi le nombre de parties à $n-p$ éléments.

II. Deuxième formule génératrice, la formule de Pascal

Théorème 7
Pour tout couple d'entiers naturels, vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on dispose de l'égalité suivante,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : Démonstration ensembliste.
Soit E un ensemble de cardinal n, avec $n \geqslant 2$. Soit a un élément de E fixé. L'ensemble des parties de E de cardinal p est la réunion disjointe de

— l'ensemble des parties de E de cardinal p ayant a parmi leurs éléments,

— l'ensemble des parties de E de cardinal p n'ayant pas a parmi leurs éléments,

Or, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ éléments dans le premier ensemble et $\binom{n-1}{p}$ dans le deuxième ensemble. la formule de Pascal est obtenu en appliquant le principe additif. $\square$

III. Triangle de Pascal

La formule de Pascal permet de calculer toutes les coefficients binomiaux dans un tableau comme ci-dessous.
On commence par border la diagonale et la première colonne de 1. Puis n applique la formule de Pascal.

n^p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Dans le triangle ci-dessus : le nombre 6 en rouge est $\binom{4}{2}$, c'est la somme des deux nombres écrits en rouge à la ligne précédente, $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$.

Exercices

Exercice 30. Déterminer mentalement,

a $\binom{10}{0}$

b $\binom{10}{10}$

c $\binom{10}{1}$

d $\binom{10}{9}$

e $\binom{10}{2}$

f $\binom{10}{8}$

Exercice 31. On considère le programme écrit dans le langage Python ci-dessous.

```
1 def Coefficients(n):
2     L=[1,1]
3     M=L
4     for i in range(2,n+1):
5         M=M+[1]
6         for k in range(i-1):
7             M[k+1]=L[k+1]+L[l]
8         L=M
9     return L
```

Le but de ce programme est d'afficher la ligne n du triangle de Pascal.

1. Corriger l'erreur qui est présente à la ligne 7 pour que le programme fonctionne.
2. Utiliser ce programme pour indiquer la valeur numérique de $\binom{15}{5}$.

Exercice 32. Prouver le résultat suivant : « Le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$. »

Exercice 33. Démontrer la relation suivante

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2,$$

1. en calculant de deux manières le nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires.
2. en dénombrant de deux manières, les trajectoires les plus courtes relaint $(A(0,0)$ à $B(n,n)$ sur un réseau.

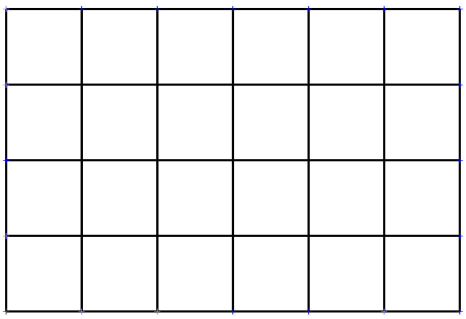
Fiche 6

Exemples d'emploi de partition

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992
Le princie de base permettant de déterminer le cardinal d'un nensemble fini est de trier ses éléments en fonction d'un critère bine déterminé, autrement dit d'en effectuer une partition. Le dénombrement repose alors sur l'organisation des données (arbres, tableaux). Nous en donnons quelques exemples.

Exercice résolu

Combien de rectangles ont leurs côtés matérialisés dans le réseau quadrillé ci dessous ?



1. Détermination de la partition. : Notons $R_{n,p}$ l'ensemble des rectangles ayant n colonnes et p lignes, avec $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $1 \leqslant p \leqslant 4$. Notons aussi $u_{n,p} = \text{card}(R_{n,p})$. Les $R_{n,p}$ forment une partition de l'ensemble à dénombrer.
2. Calcul de $u_{n,p}$. Soit n et p fixés ($1 \leqslant n \leqslant 6$, $1 \leqslant p \leqslant 4$). On peut choisir n colonnes consécutives de $6-n+1$ façons, et p lignes consécutives de $4-p+1$ façons. Le principe multiplicatif donne alors $u_{n,p} = (6-n+1)(4-p+1)$.
3. Organisation des données. Le tableau à « double entrée » rassemble les résultats.

p^n	6	5	4	3	2	1
4	1	2	3	4	5	6
3	2	4	6	8	10	12
2	3	6	9	12	15	18
1	4	8	12	16	20	24

On en déduit que le nombre cherché est

$$\sum_{p=1}^{4}\sum_{n=1}^{6} u_{n,p} = (1+2+\ldots+6)(1+\ldots+4)$$

Soit 210 rectangles.

4. Remarque. Une méthode plus rusée pour remplir le tableau consiste à remarquer les relations de récurrence : $u_{n-1,p} = u_{n,p} + 5 - p$ et $u_{n,p-1} = u_{n,p} + 7 - n$, qui permet de remplir toutes les cases connaissant $u_{6,4} = 1$, et mettent en évidence le caractère arithmétique des suites $n \mapsto u_{n,p}$ et $p \mapsto u_{n,p}$.
5. Remarque finale. Une autre méthode consiste à repérer que construire un rectangle revient à :
   — choix de deux cotés verticaux parmi les 7 droites $\binom{7}{2}$,
   — choix de deux cotés horizontaux parmi les 5 droites $\binom{5}{2}$,

   En appliquant le principe multiplicatif, on obtient

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 21 \times 10$$

6. Résumé. L'exemple précédent qui ne requiert que des connaissances modestes, rassemble l'essentiel des techniques du dénombrement.
   (a) Trier et décomposer. C'est à dire réaliser une partition et au besoin, décomposer la procédure de dénombrement de chaque sous-ensemble de la partition en « sous-procédures » simples.
   (b) Organiser les données. On peut avoir recours à des arbres, des tableaux, ou au raisonnement par récurrence lorsqu'il s'agit de prouver une formule générale.

exercices

Exercice 34. Un péage automatique d'autoroute n'accepte que des pièces de 2 euros, 1 euro, $0,50$ euro, $0,20$ euro et ne rend pas la monnaie. de combien de façons peut-on s'acquitter un paiement de 5 euros.

Exercice 35. Directement dérivés de l'art de combinatoire cher à Leibnitz, ils sont engendrés par dix sonnets de quatorze vers, entièrement conformes aux règles prosodiques. Chacun de ces dix sonnets est imprimé sur une page échancrée en bandelettes, de telle sorte que chaque vers, porté par l'un des volets ainsi découpés, peut être remplacé par le vers de même rang de l'un des 9 autres poèmes. Au total, le lecteur peut effectivement composer les 10^{14} poèmes annoncés. Vérifier ce résultat.

Exercice 36. Pour fabriquer un jeu de construction, on dispose de cubes de bois identiques et de deux couleurs : rouge et vert. toutes les faces seront peintes d'une couleur quelconque. Combien de cubes différents peut-on peindre ?

Fiche 7

Dénombrement de « tirages »

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992 Un bon nombre de situations aléatoires font intervenir directement un tirage de boules dans une urne ou peuvent s'y ramener par analogie. Les exemples qui suivent présentent donc un modèle de référence pour l'étude de ces situations avec plusieurs significations possibles du mot « tirage ».

Exercice résolu

En se ramenant à des tirages de boules numérotées dans une urne, résoudre chacun des problèmes suivants.

1. Combien peut-on former d'entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?
2. Huit coureurs s'affrontent pour trois médailles. Combien y-a-t-il de palmarès possibles ?
3. Combien de grilles distinctes existent au Loto ? Une grille est données en entourant 6 numéros parmi les 1,2,...,49.

1. Tirages successifs avec remise. Soit E l'ensemble des entiers de trois chiffres dont le cardinal est 900, et A la partie de E formée des nombres contenant au moins l'un des chiffres : 0, 3, 6 et 9. Alors qu'un dénombrement direct de A semble délicat, il paraît plus simple de dénombrer $\overline{A}$, la partie de E des nombres écrits à l'aide des seuls chiffres 1, 2, 4, 5,7 ,8. Un élément de $\overline{A}$ peut être considéré comme un tirage ordonnée de 3 boules dans l'urne contenant les boules 1,2,5,4,8 et 7 avec remise de la boule tirée après que l'on ait noté son numéro. Il y a $6 \times 6 \times 6$ tirages. Ainsi $\text{card}(\overline{A}) = 216$ et par suite
$$\text{card}(A) = \text{card}(E) - \text{card}(\overline{A}) = 684.$$
2. Tirages successifs sans remise. Si l'on numérote les 8 coureurs de 1 à 8,un palmarès correspond à un tirage ordonné de 3 boules distinctes dans l'urne composée des 8 boules, sans remise de la boule tirée. Il y a 8 choix possibles pour la première boule, 7 pour la deuxième, 6 pour la troisième. le nombre cherché est donc $8 \times 7 \times 6 = 336$.
3. Tirages simultanés sans remise. Une grille peut s'identifier à un tirage de 6 boules dans une urne contenant 49 boules, ou encore à une combinaison de 6 éléments parmi 49 éléments. le nombre de grilles est donc $\binom{49}{6} = 13983816$.

exercices

Exercice 37. Combien existe-t-il de nombres de quatre chiffres écrits avec

1. au moins un chiffre pair ?

2. au moins un chiffre impair ?

Exercice 38. Le problème du Duc de Toscane. On lance 3 dès numérotés de 1 à 6. Y a -t-il autant de résultats donnant pour somme 9 que de résultats donnant pour somme 10 ?

Exercice 39. De combien de façons différentes peut-on répartir quatre personnes sur une rangée de sept chaises ?

Exercice 40. Parmi toutes les mains de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes, dénombrer celles contenant

1. deux as et seulement deux as
2. deux coeurs et deux seulement ?

Fiche 8

Dénombrement-Problèmes d'approfondissement »

la formule de Vandermonde

On considère deux ensembles disjoints A et B non vides, tels que $\mathrm{Card} A = a$ et $\mathrm{Card} B = b$. Soit $E = A \cup B$.

1. Quel est le cardinal de E ? Pour tout entier naturel n inférieur ou égal à $a+b$, combien E admet-il de sous-ensembles de cardinal n ?
2. Soit k un entier naturel inférieur ou égal à a. Combien A admet-il de sous-ensembles de cardinal k ? Combien B admet-il de sous-ensembles de cardinal $n-k$?
3. En faisant varier k de 0 à a, déduire de ce qui précède la valeur de

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Combinaisons avec répétitions

1. (a) Écrire tous es triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x+y+z=5$. Combien y en a-t-il ?
   (b) Déterminer le nombre de façons de ranger cinq boules indiscernables dans trois tiroirs numérotés.
   (c) Déterminer le nombre de suites de sept caractères comportant cinq fois le chiffre 0 et deux fois le chiffre 1.
   (d) Que peut-on remarquer ? expliquer pourquoi.
2. (a) Soit (n, p) un couple d'entiers naturels. Déterminer le nombre de p uplets $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ d'entiers naturels tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_p = n$.
   (b) Déterminer le nombre de p uplets $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ d'entiers naturels non nuls tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_p = n$.