Fiche 1

Raisonnement
Le raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence simple

Théorème 8
Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, on peut procéder de la façon suivante.

— Initialisation. On établit la propriété pour $n = 0$.

— Hérédité. On fixe un entier naturel n tel que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie.

Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

Remarques

— Il se peut que l'on demande de prouver la validité d'une propriété $\mathscr{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. L'initialisation consiste alors en la vérification de $\mathscr{P}_1$.

Exemples de mise en oeuvre

1. Somme des carrés des n premiers entiers.
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Nous allons établir que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Utilisons le principe de la démonstration par récurrence.
   Pour n entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Initialisation. La vérification de $\mathscr{P}_1$ est immédiate, $1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
   Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc,
   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   Alors,
   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2.$$
   D'où, grâce à $\mathscr{P}_n$:
   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Après réduction au même dénominateur et factorisation par $n+1$,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1)).$$

Mais,

$$n(2n+1)+6(n+1)=2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3).$$

En fin de compte, on obtient $\mathscr{P}_{n+1}$:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion, on a démontré que :

— $\mathscr{P}_1$ est vraie,

— que que soit l'entier non nul n, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de la démonstration par récurrence, on peut conclure que, quel que soit l'entier naturel n non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

2. Une inégalité. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Initialisation. On a $2-\frac{1}{1}=1$ donc $1\leqslant 2-\frac{1}{1}$
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}..$$

En ajoutant $\frac{1}{(n+1)^2}$ aux deux membres de l'inégalité, il vient :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comparons alors les deux nombres $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$ et $2-\frac{1}{n+1}$ en étudiant le signe leur différence.
$\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=-\frac{1}{n(n+1)^2}.$
Le dernier membre de l'égalité est négatif, il en résulte que $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Cette dernière inégalité est exactement la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ Conclusion, on a démontré que :

— $\mathscr{P}_1$ est vraie,

— que que soit l'entier non nul n, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de la démonstration par récurrence, on peut conclure que, quel que soit l'entier naturel n non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exercices

Exercice 41. On considère la propriété « $3^n \geqslant 1+2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Montrer que la propriété est initialisée.
2. Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.
   (a) Écrire l'hypothèse de récurrence.
   (b) Écrire la propriété au rang $n+1$ (on simplifiera le membre de droite de l'inégalité).
   (c) Multiplier les deux membres de l'inégalité de la question a) par 3 puis les simplifier.
   (d) Justifier que $3+6n \geqslant 3+2n$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. Rédiger intégralement le raisonnement par récurrence permettant de justifier la propriété souhaitée.

Exercice 42. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 43. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_n = -\frac{1}{3}w_{n-1} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer par récurrence que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 44.
1. Montrer par récurrence que $3^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 7$.
2. Montrer que $n! \leqslant n^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 45. Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 46. Somme des impairs.
On a créé une feuille de tableur comme ci-dessous :

	A	B	C
1	1	1	
2	3	4	
3	5	9	
4	7	16	
5	9	25	
6	11	36	

Dans la colonne A, on a écrit les premiers nombres impairs. En B1, on a écrit 1. Dans la cellule B2 est écrite la formule « =B1+A2 » qu'on a recopiée vers le bas.

1. Conjecturer une formule pour la somme des premiers nombres impairs : $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ pour $n \geqslant 1$.
2. Démontrer cette égalité par récurrence.

Exercice 47. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}.$$
2. En déduire la somme des 101 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison 50.

Exercice 48.
1. Calculer $4!$ puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3!$.
2. Calculer $5!$ puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4!$.
3. Conjecturer une expression de $\sum_{k=1}^{n-1} k.k!$ en fonction de $n!$ pour $n \geqslant 2$.
4. Démontrer cette égalité.

Exercice 49. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_n = 3v_{n-1} - 2n + 6$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. La suite (v_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Montrer par récurrence que $v_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 50. On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 51. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_n = \frac{1}{5}w_{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Montrer que $w_n = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{8}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 52. Avec un tableur
On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et par la relation de récurrence $w_n = 2w_{n-1} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On donne ci-dessous la feuille de tableur donnant les premiers termes de la suite (w_n).

	A	B	C
1	n	w(n)	
2	0	4	
3	1	5	
4	2	7	
5	3	11	
6	4	19	
7	5	35	

1. Quelle formule a été écrite en B3 et recopiée vers le bas pour obtenir ces résultats ?
2. On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par $r_n = w_n - 3$.
   Conjecturer une formule explicite pour (r_n) puis pour (w_n).
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 53. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
1. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer une expression explicite de u_n.
2. Démontrer cette égalité en utilisant une démonstration par récurrence.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^3$.
   (a) Montrer que $v_0 = u_0$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) satisfait la relation de récurrence de la suite (u_n).

Remarques
Les suites (u_n) et (v_n) ont même premier terme et satisfont la même relation de récurrence, cela implique que (u_n) et (v_n) sont la même suite sans avoir à utiliser une démonstration par récurrence.