Thème 2 Géométrie dans l'espace

Fiche 1

Géométrie
Vecteurs de l'espace

I. Vecteurs de l'espace-translations

Définition 7
On dit que deux couples de points de l'espace $(A;B)$ et $(C;D)$ sont deux représentants du même vecteur si, et seulement si, les deux segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Figure page 23 Sortais

Théorème 9
Si $(A;B)$, $(C;D)$ et $(E;F)$ sont trois couples de points de l'espace, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Démonstration : Preuve admise. □

Figure page 23 Sortais

Remarques
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est noté $\overrightarrow{0}$. Il est appelé le vecteur nul.

Propriété 2
- Étant donné un point O de l'espace et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. le point M est appelé l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Si deux couples de points $(A;B)$ et $(C;D)$ sont deux représentants du même vecteur $\overrightarrow{u}$ NON NUL alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles. La direction commune de ces droites est appelée la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

II. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Addition de deux vecteurs

Théorème 10
Si A est un point de l'espace si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs,notons B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et C le point défini par $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi défini est indépendant du choix du point A.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 8
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi défini est appelé somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On écrit

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.$$

La relation obtenue à l'aide des représentants s'écrit

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Cette dernière égalité est appelée **relation de Chasles**.

Théorème 11
Soit A,B et C trois points de l'espace, les deux énoncés suivants sont équivalents,

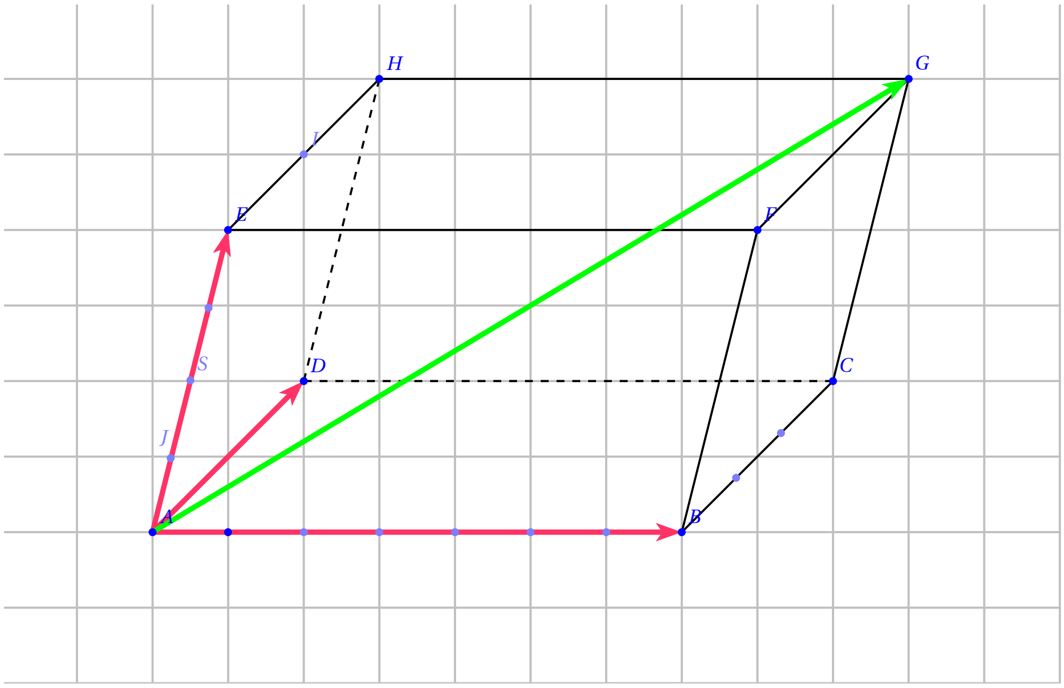
— D est le point de l'espace défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

— D est le point de l'espace tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 9
L'équivalence ci-dessus est appelée **règle du parallélogramme**.



La figure ci dessus entend souligner la configuration qu'il est possible d'associer dès lors que l'on s'intéresse à la somme de trois vecteurs :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Multiplication d'un vecteur par un réel

Théorème 12
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel strictement positif, soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$, Soit M le point de la demi droite d'origine A passant par B tel que $AM = k \times AB$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ne dépend pas du représentant choisi du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 10
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini dans la propriété précédente est appelé produit du réel positif k par le vecteur $\overrightarrow{u}$, on note

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$$

figure

Théorème 13
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel strictement négatif, soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$, Soit M le point de la droite (AB) tel que A appartienne au segment $[MB]$ et $AM = |k| \times AB$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ne dépend pas du représentant choisi du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 11
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini dans la propriété précédente est appelé produit du réel négatif k par le vecteur $\overrightarrow{u}$, on note

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$$

figure

Définition 12
On convient que,

— quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$,
$$0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

— quel que soit le réel k,
$$k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Définition 13
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** si, et seulement si, l'un deux est le produit de l'autre par un réel.

Définition 14
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont dits de même sens si $k > 0$, de sens contraires si $k < 0$.

III. Propriétés des opérations

Propriétés de l'addition

Théorème 14
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de l'espace, on a

- ⋆ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$, on dit que l'addition est commutative.
- ⋆ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, on dit que l'addition est associative.
- ⋆ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{u}$ est un élément neutre pour l'addition.
- ⋆ Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{x}$ vérifiant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
  Le vecteur $\overrightarrow{x}$ noté $(-\overrightarrow{u})$, il est appelé vecteur opposé de $\overrightarrow{u}$.
  On dispose de l'égalité suivante
  $$(-1)\overrightarrow{u} = (-\overrightarrow{u})$$

Démonstration : Preuve admise. □

propriétés de la multiplication par un réel

Théorème 15
Quels que soient les réels k,k' et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace

- ⋆ $k.(k'.\overrightarrow{u}) = (kk').\overrightarrow{u}$
- ⋆ $(k+k').\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{u} + k'.\overrightarrow{u}$
- ⋆ $k.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k.\overrightarrow{u} + k.\overrightarrow{v}$
- ⋆ $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- ⋆ $(-k).\overrightarrow{u} = k.(-\overrightarrow{u}) = -(k.\overrightarrow{u})$.
- ⋆ $k.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \leftrightarrow k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- ⋆ L'équation $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ admet une unique solution qui est $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u})$, notée aussi, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

IV. Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

premières définitions

Définition 15
si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tout vecteur pouvant s'écrire sous la forme $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$ où λ et μ sont deux nombres réels.
Les réels λ et μ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarques
On peut étendre cette définition à plus de deux vecteurs, ainsi $2\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, les coefficients sont 2, $\frac{1}{2}$ et 1.

Définition 16
On dit qu'une famille finie de vecteurs est une famille de vecteurs **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs permettant d'obtenir le vecteur nul est la combinaison dont **tous** les coefficients sont nuls.

Propriété 3
Les deux énoncés suivants sont équivalents

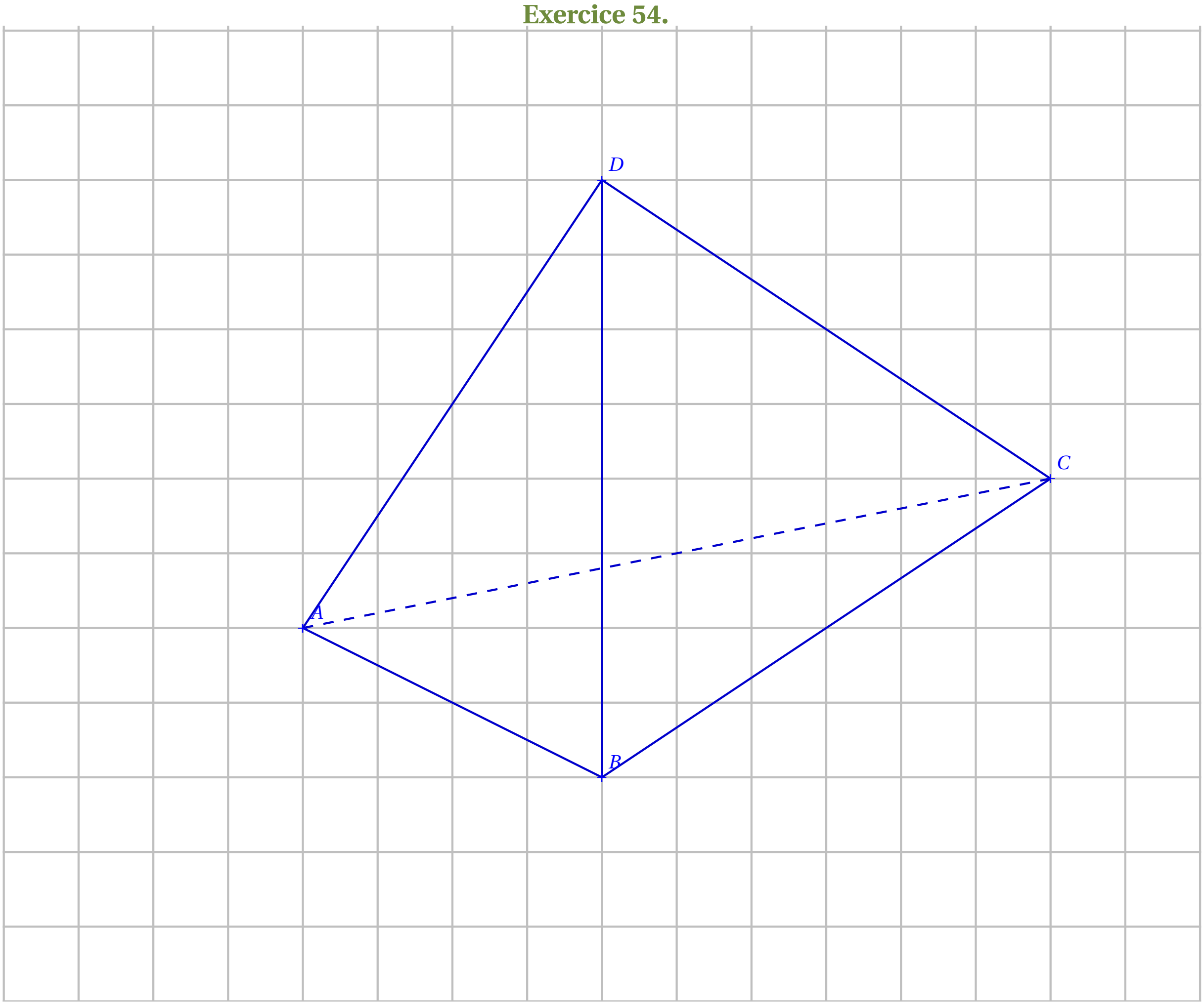
- — les **deux** vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement indépendants,
- — les **deux** vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 4
Les deux énoncés suivants sont équivalents

- — les **trois** vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants,
- — aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres.

Exercices

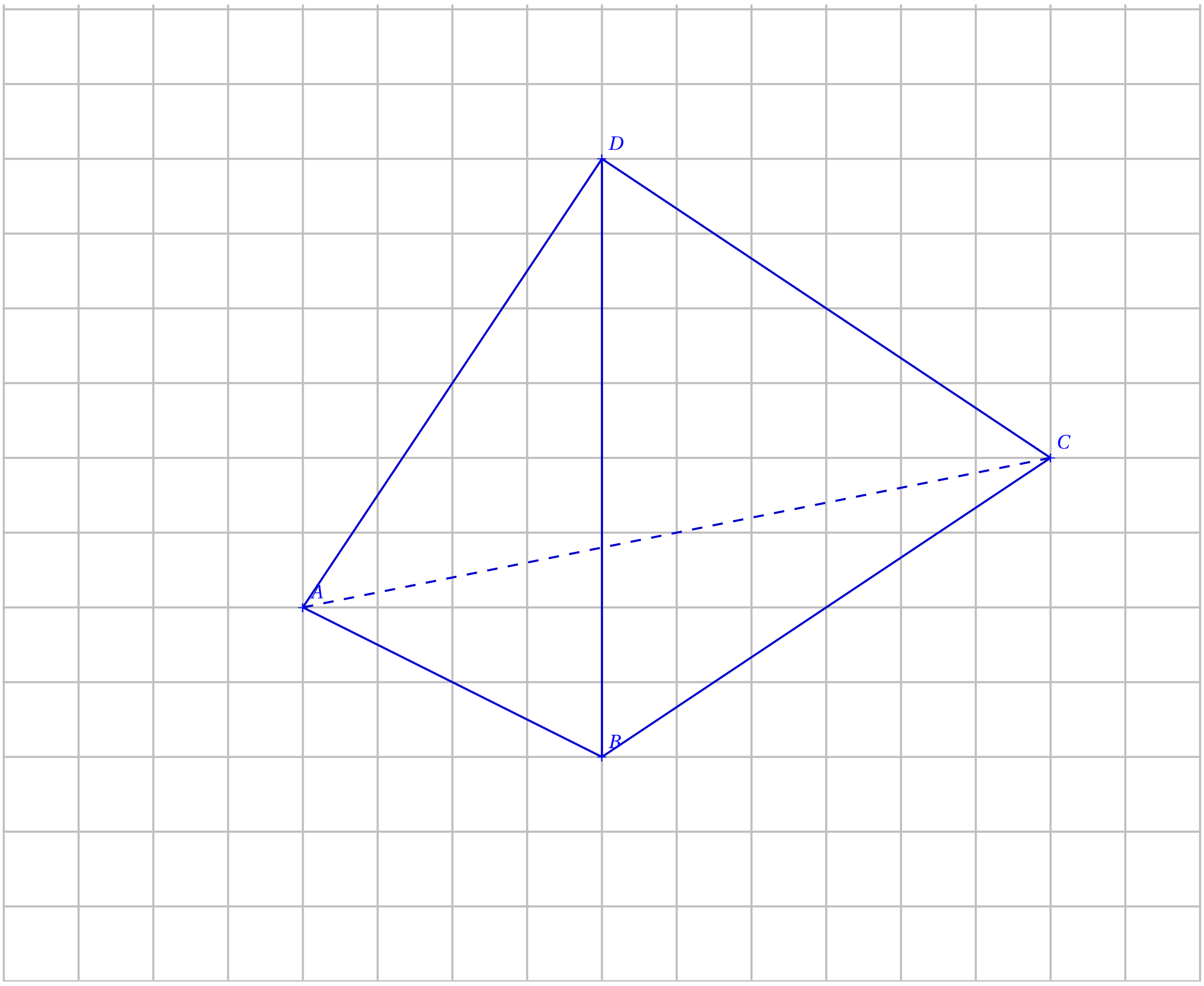
Exercice 54.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points R et S définis par

1. $\overrightarrow{DR} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AS} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

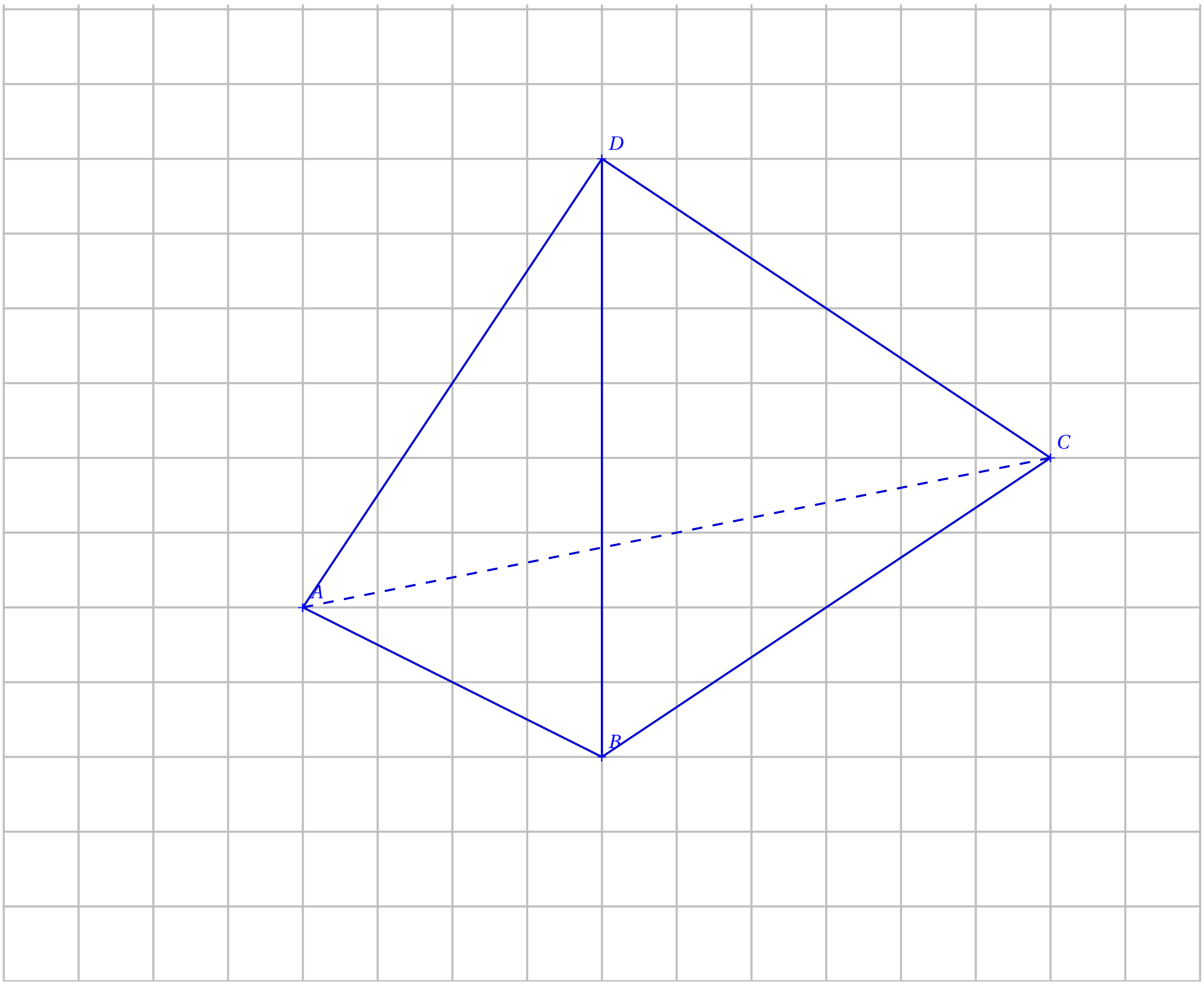
Exercice 55.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points E et F définis par

1. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

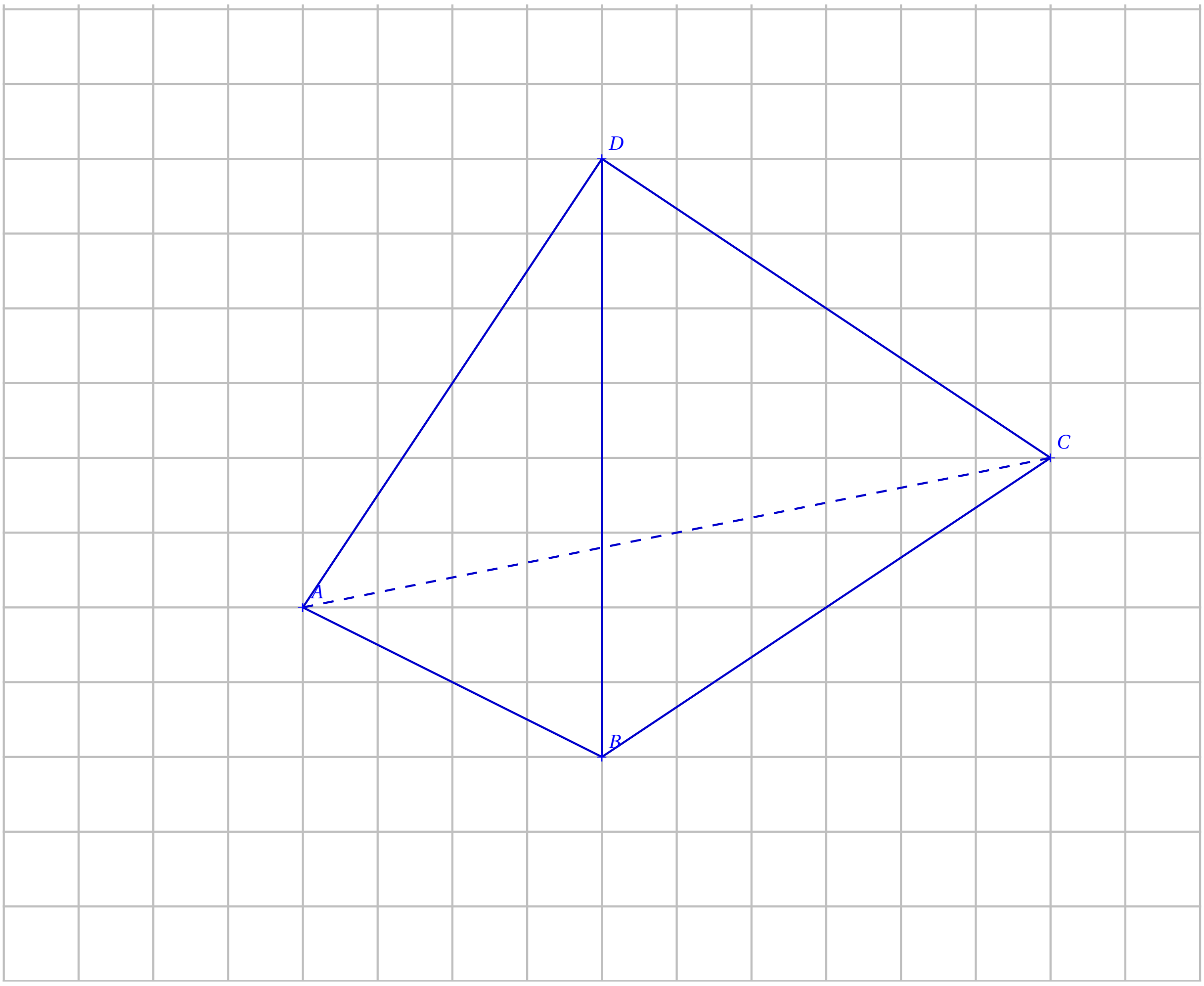
Exercice 56.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points K et L définis par

1. $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Exercice 57.



1. Le point G est défini par l'égalité vectorielle

$$6\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CB}$$

   (a) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{CB}$.

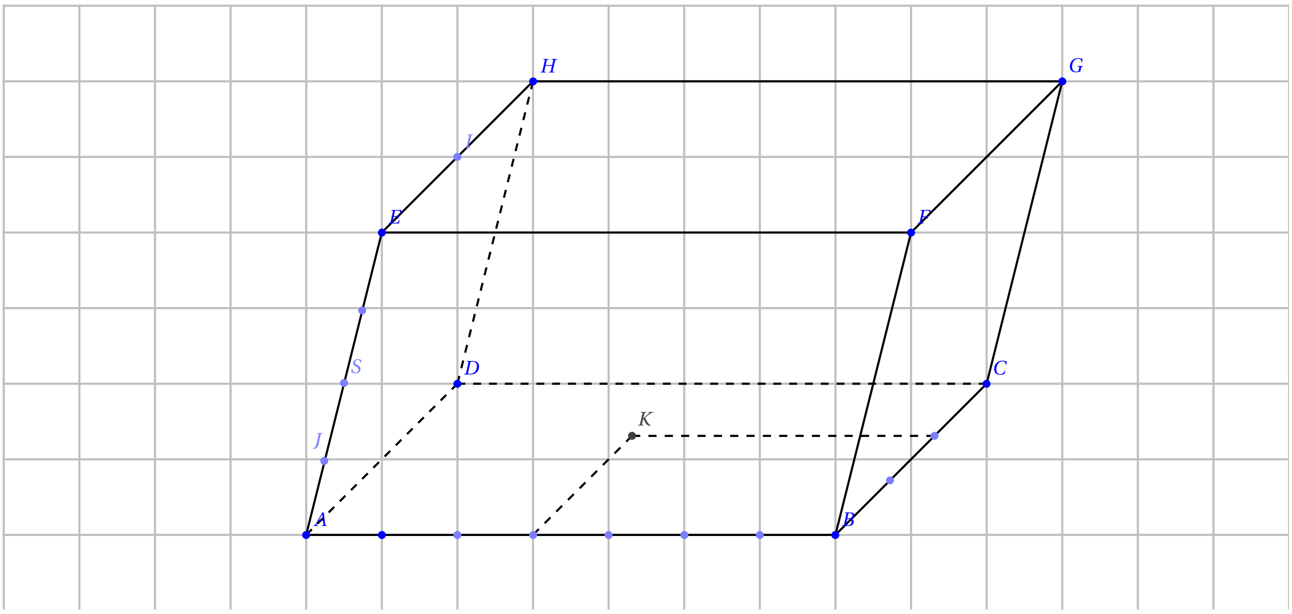
   (b) Placer G sur la figure.

2. Le point H est défini par $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{0}$.

   (a) Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$

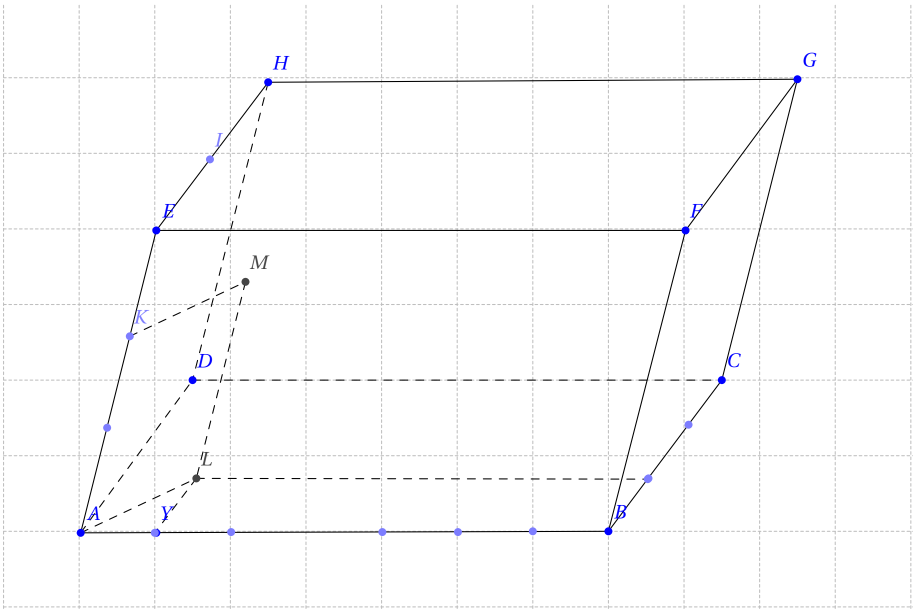
   (b) Placer le point H sur la figure.

Exercice 58. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières.



1. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EH}$.
3. les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?
4. les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?

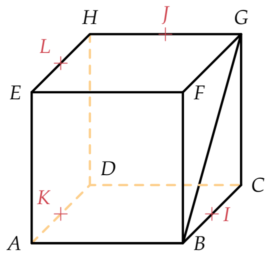
Exercice 59. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. les graduations sur chaque arête sont t régulières. De plus, $BILJ$ et $ALMK$ sont des parallélogrammes.



1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. les vecteurs $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?

Exercice 60. Dans un tétraèdre $ABCD$, I est le milieu de $[AB]$ et J est le mileiu de $[CD]$. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



Exercice 61. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$
3. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$

Exercice 62. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
3. $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

Exercice 63. Les points A,B, C et D étant distincts et tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, à tout point M de l'espace on associe le point M' tel que $AMDM'$ soit un parallélogramme. Comparer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{M'C}$.

Exercice 64. On considère un point O, trois points A, B , C et A', B' et C' leurs symétriques respectifs par rapport à O. Pour tout point M de l'espace, évaluer la somme suivante en fonction de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}$$

Exercice 65. Les points A, B et C sont distincts. préciser, dans chaque cas, s'il est possible de déterminer un point M tel que :

1. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$
2. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$
4. $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$
6. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

combinaison linéaire de deux vecteurs exemples de construction combinaison linéaire de trois vecteurs etc

Fiche 2

Géométrie
Droites de l'espace

I. Vecteurs directeurs d'une droite.

Définition 17
Si d est une droite de l'espace, on dit d'un vecteur $\vec{u}$ qu'il est un vecteur directeur de d si c'est un vecteur non nul, et si, quel que soit le point A de d, le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ est un point de d.
On dit que le vecteur $\vec{u}$ dirige la droite d, ou encore que $\vec{u}$ est un vecteur de la direction de d.

II. Vecteurs colinéaires.

Définition 18
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si l'un des deux le produit de l'autre par un réel.

Propriété 5
Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, alors $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{v} = t\vec{u}$

Démonstration :

III. Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.

Propriété 6
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, et si A est un point de d alors pour tout point $M \in d$ il existe t $\in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Propriété 7
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, et si A est un point de d alors la droite d est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Définition 19
On note $d(1, \overrightarrow{u})$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exercices

Exercice 66. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

1. Réaliser une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. En déduire que A , K et G sont alignés.

Exercice 67. $ABCDEFGH$ est un cube. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AE}$.

1. Réaliser une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
5. En déduire que L , K et G sont alignés.

Exercice 68. $ABCD$ est un tétraèdre. Les points E, F et G sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Réaliser une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que E , F et G sont alignés.

Exercice 69. Représenter un tétraèdre $ABCD$ et les droites $d(A, \overrightarrow{u})$,$d(B, \overrightarrow{v})$ avec :
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$. Ces droites sont elles sécantes ?

Exercice 70. Dans un parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ on pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$. Identifier les droites : $d(B', \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, $d(C', \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, $d(C, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$ et $d(D, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Exercice 71. On considère une pyramide $SABCD$ dont la base $ABCD$ est un parallélogramme et où I, J, K et L sont les milieux des segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$. Enfin, on note : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{JK}$.

1. Identifier chacune des droites suivantes :
   (a) $d(K, \overrightarrow{v})$
   (b) $d(A, \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$
   (c) $d(B, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$
2. Compléter par un vecteur exprimé à l'aide de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$
   (a) $(SA) = d(S, ...)$
   (b) $(SB) = d(S, ...)$
   (c) $(SC) = d(S, ...)$
   (d) $(SD) = d(S, ...)$
3. Donner en fonction de de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur des droites (AK), (BL) et (CI).

Fiche 3

Géométrie
Plans de l'espace

Version 2

I. Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.

Définition 20
On appelle direction d'un plan l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan.

Propriété 8
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **linéairement indépendants** (non colinéaires) de la direction d'un plan alors tout vecteur de la direction du plan est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que le couple $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de la direction du plan.

Propriété 9
Soit A un point d'un plan $\mathscr{P}$, et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ une base de la direction de ce plan, pour tout point M du plan, il existe deux nombres réels s et t tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Démonstration :

Propriété 10
Soit A un point d'un plan $\mathscr{P}$, et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ une base de la direction de ce plan, le plan est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$ où $(s\ ;\ t)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

Démonstration :

II. Vecteurs coplanaires.

Définition 21
Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$,... $\vec{w}$ de l'espacesont dits coplanaires lorsqu'un point O quelconque, et les points A, B,C,...définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$,..., sont coplanaires.

Remarques

— Nous admettons que cette définition ne dépend pas du point O choisi.

— Deux vecteurs sont toujours coplanaires, il existe toujours au moins un plan contenant AO,A et B.

— Pour les mêmes raisons, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, quel que soit $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème 16
Soit $\vec{u}$, et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur quelconque. Alors il est équiavlent de dire :

— les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires

— il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Propriété 11
Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Les seuls réels a,b,et c pour lesquels $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ sont tels que $a = b = c = 0$.

Propriété 12
Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires. L'écriture$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ est unique. Autrement dit l'égalité

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$$

ne peut avoir lieu que si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Exercices

Exercice 72. Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$.
3. En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Exercice 73. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède, I, J ,K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$. On considère les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

et
$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, G et N sont coplanaires.

Exercice 74. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont coplanaires.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

Exercice 75. $ABCDEFGH$ est un cube.
On considère le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

1. Que peut-on dire des points D, M, K et H ?
2. Montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF}$.
3. Montrer que si $t = \frac{4}{5}$, les points D, M et K sont alors alignés.

Exercice 76. On donne un tétraèdre $ABCD$ et l'on note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
Montrer que tous les plans définis ci après sont des faces du tétraèdre et les identifier.

1. plan $(B, \vec{u}, \vec{v})$.
2. plan $(C, \vec{w}, \vec{v})$.
3. plan $(A, -\vec{w}, \vec{u})$.
4. plan $(A, \vec{v}, \vec{w} - v)$.

Exercice 77. On considère trois points A, B et C de l'espace. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ sont ils coplanaires ?

Exercice 78. Existe-t-il cinq points de l'espace A,B, C, D, E non coplanaires tels que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$?

Exercice 79. On considère le parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$. Préciser dans chaque cas si les vecteurs sont coplanaires ou non.

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$
2. $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD})$
3. $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{C'B'})$
4. $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'B'})$

Méthode :

Pour tester si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, on peut considérer la relation $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, a, b et c étant des réels que l'on essaie de déterminer. Deux cas sont à envisager :

- Il n'y a que la solution $a = b = c = 0$, les vecteurs ne sont pas coplanaires.
- Il existe un autre triplet que $(0, 0, 0)$, dans ce cas les vecteurs sont coplanaires.

Dans les exercices suivants $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Exercice 80. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calculer $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Qu'en déduire sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$?

Exercice 81. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u_3} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ ne sont pas coplanaires.

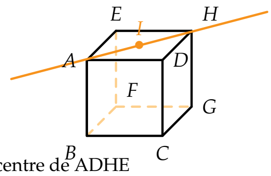
Exercice 82. Soit $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$. Examiner la coplanarité des vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{u}$.

Fiche 4

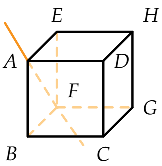
Géométrie
Positions relatives

I. Positions relatives de deux droites

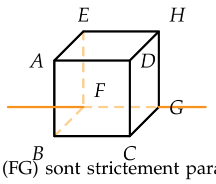
— Deux droites sont dites coplanaires s'il existe au moins un plan qui les contient toutes les deux, plus précisément, elles peuvent être



I centre de ADHE
(AH) et (AI) sont confondues
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont **colinéaires**
L'intersection des deux droites est la droite elle même

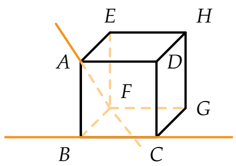


(AD) et (AF) sont sécantes en A
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires
L'intersection des deux droites est un singleton



(AD) et (FG) sont strictement parallèles
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires
L'intersection des deux droites est l'ensemble vide

— deux droites sont dites non coplanaires si il n'existe aucun plan les contenant toutes les deux



(BC) et (AF) sont non coplanaires
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires
L'intersection des deux droites est l'ensemble vide

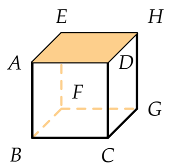
Propriété 13
Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et une droite de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires**.

II. Positions relatives de deux plans

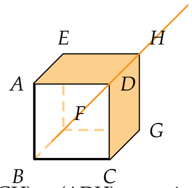
Définition 22
On dit que deux plans sont parallèles si ils ont la même direction. Ainsi toute base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de la direction d'un plan est aussi une base de la direction d'un plan qui est lui est parallèle.

Propriété 14
Si deux plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants selon une droite.

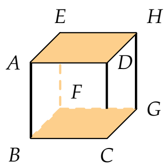
Démonstration : propriété admise. □



Les plans (EAD) et (ADH) sont confondus
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de la direction de (EAD) et de (ADH)
L'intersection des deux plans est le plan lui même



Les plans (CGH) et (ADH) sont sécants selon la droite (DH)
Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ n'est pas dans la direction du plan (ADH)
L'intersection des deux plans est la droite (DH)



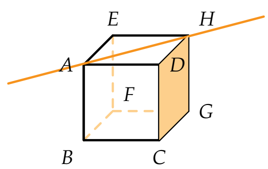
Les plans (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles
Les deux plans ont la même direction et leur intersection est vide

Propriété 15
Un plan $\mathscr{P}_\infty$ de l'espace dont la direction a pour base $(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \overrightarrow{v_1})$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}_\epsilon$ de l'espace dont la direction a pour base $(\overrightarrow{u_2}\ ;\ \overrightarrow{v_2})$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$,$\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}$ sont coplanaires.

III. Positions relatives d'une droite et d'un plan

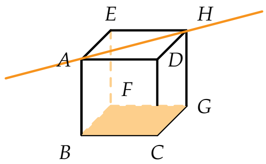
Propriété 16
Soit $\mathscr{P}$ et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ une base de sa direction. Soit d une droite et $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d, alors

— si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires alors d et $\mathscr{P}$ sont sécants en un point.

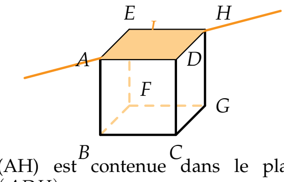


La droite (AH) est sécante en H au plan (DCG)
$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont linéairement indépendants

— si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires alors d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.



La droite (AH) est strictement parallèle au plan (BCG)
$\overrightarrow{AH}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{BG}$



(AH) est contenue dans le plan (ADH)
$\overrightarrow{AH}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et de $\overrightarrow{AE}$

Exercices

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède ; I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$.

Exercice 83. Donner la position relative des deux droites citées :

1. (DB) et (EF) ;
2. (IJ) et (AF) ;
3. (IC) et (AB) ;
4. (JF) et (EH).

Exercice 84. Donner la position relative des deux plans cités :

1. (DCG) et (AEF) ;
2. (IJA) et (HDC) ;
3. (IJE) et (CKL).

Exercice 85. Donner la position relative de la droite et du plan cités :

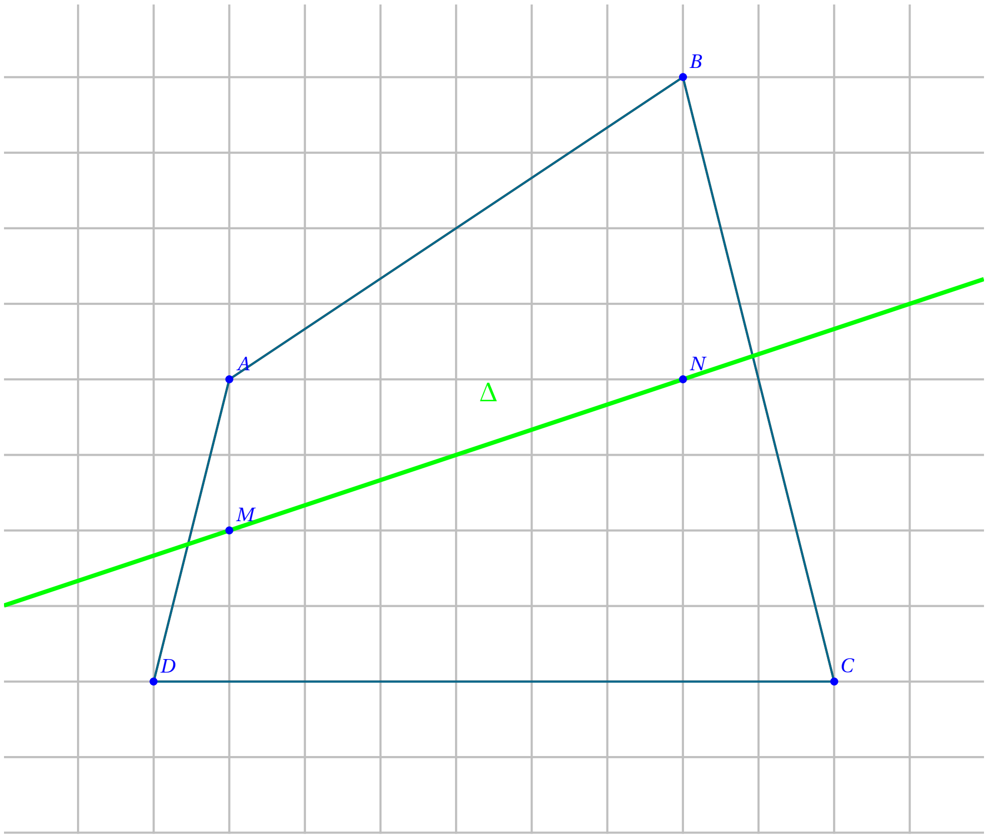
1. (IJ) et (ABF) ;
2. (IJ) et (BCG) ;
3. (KE) et (ABF).

Exercice 86. Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non-coplanaires de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$ et O un point de l'espace. Montrer que le plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est le seul plan de l'espace passant par O et parallèle aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice 87. On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$ et l'on désigne par $\mathscr{P}$ le plan passant par le milieu de $[AB]$ et parallèle aux droites (AA') et (BD').

1. La droite $(B'D)$ est-elle parallèle à ce plan ?
2. Montrer que $\mathscr{P}$ coupe en leur milieu quatre arêtes du cube.

Exercice 88. En pliant légèrement le quadrilatère (en carton) $ABCD$ suivant la droite Δ, peut-on poser sur une table l'objet de l'espace ainsi construit, de façon que les quatre points A, B, C et D soient en contacts avec la table ?


B
A
N
Δ
M
D
C

Fiche 5

Géométrie
Bases, repères de l'espace, coordonnées

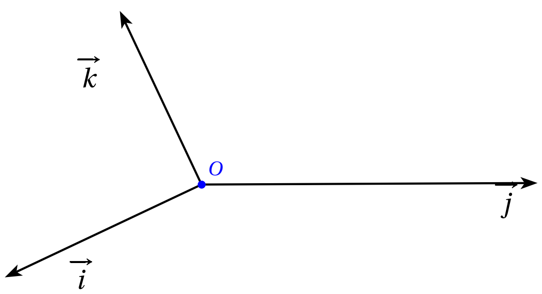
I. Bases et repères

Définition 23

- On appelle base des vecteurs de l'espace, tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.
- Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base.
- On introduit souvent les points I ,J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

Représentation

La représentation d'un repère donnée par la figure ci-dessous est choisie de façon tout à fait arbitraire, elle est cependant d'usage fréquent.

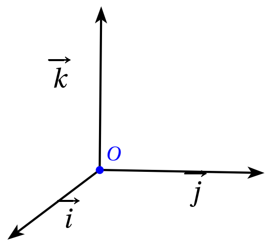


Définition 24

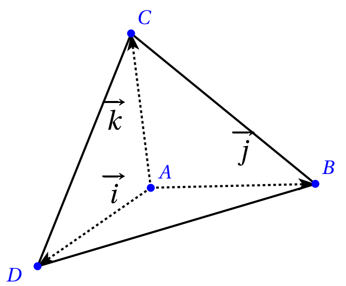
- La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et , $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dit orthogonal si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthogonale.
- La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dite orthonormale si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthogonale et si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et , $\vec{k}$ sont unitaires (de norme 1).

— Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dit orthonormal si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormale.

Représentation
En utilisant la convention précédente et les règles de la perspective cavalière, il est fréquent de représenter un repère orthonormal de la manière ci-dessous.



Remarque
A tout repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace se trouve associé un quadruplet (O, I, J, K) de points de l'espace non coplanaires.
Réciproquement il sera commode d'associer à tout quadruplet de points non coplanaires (A, B, C, D) le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.



II. Coordonnées

Mise en place des coordonnées

Un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace étant donné, ainsi que les points I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$,$\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Considérons un point M de l'espace.

— Notons M' le point d'intersection de la droite passant par M dirigée par $\vec{k}$ avec le plan (OIJ).

— Notons M_3 le point défini par $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{M'M}$ Le quadrilatère $OM'MM_3$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$

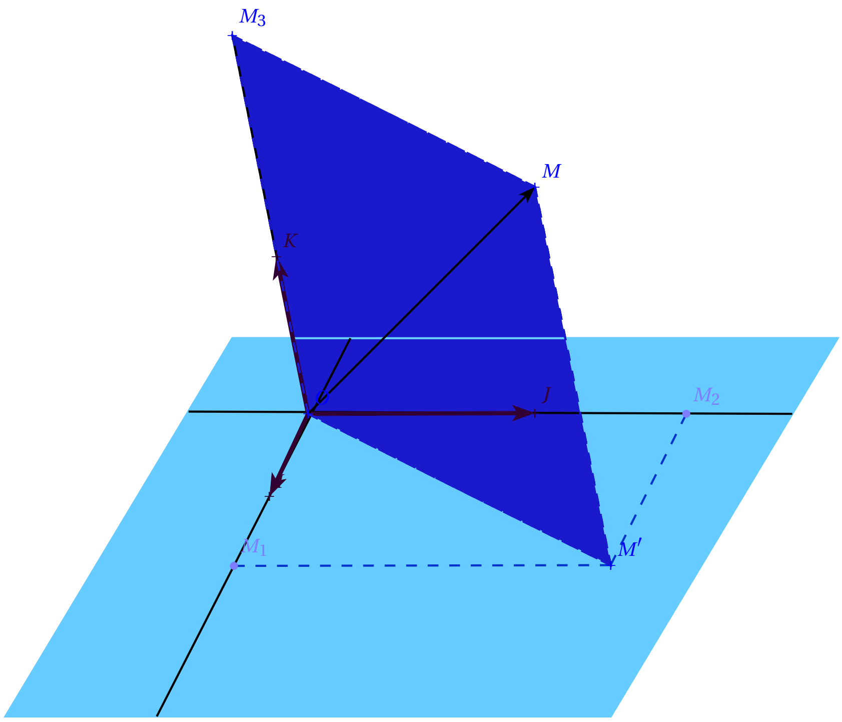
— Le point M_3 appartient à la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{OM_3} = z\,\vec{k}$

— Le point M' appartient au plan $0IJ)$ passant par O et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM_3} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

— En remplaçant dans 'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$ on obtient,

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

— Cette écriture de $\overrightarrow{OM}$ est unique.



On a démontré le théorème suivant

Théorème 17
Un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace étant donné, pour tout point M, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Ce triplet est appelé triplet des coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. x est appelé l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa cote.

Comme pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, nous obtenons la version vectorielle de ce théorème

Théorème 18
Une base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ étant donnée, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Ce triplet est appelé triplet des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$. x est appelé l'abscisse de $\vec{u}$, y son ordonnée et z sa cote.

Remarque
Un repère étant fixé, pour exprimer que le point M a pour coordonnées (x, y, z), on utilise indifféremment les notations $M(x, y, z)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

De même, pour signifier que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, on utilise $\vec{u}\,(x, y, z)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Situations de référence, exemples

Axes et plans de coordonnées

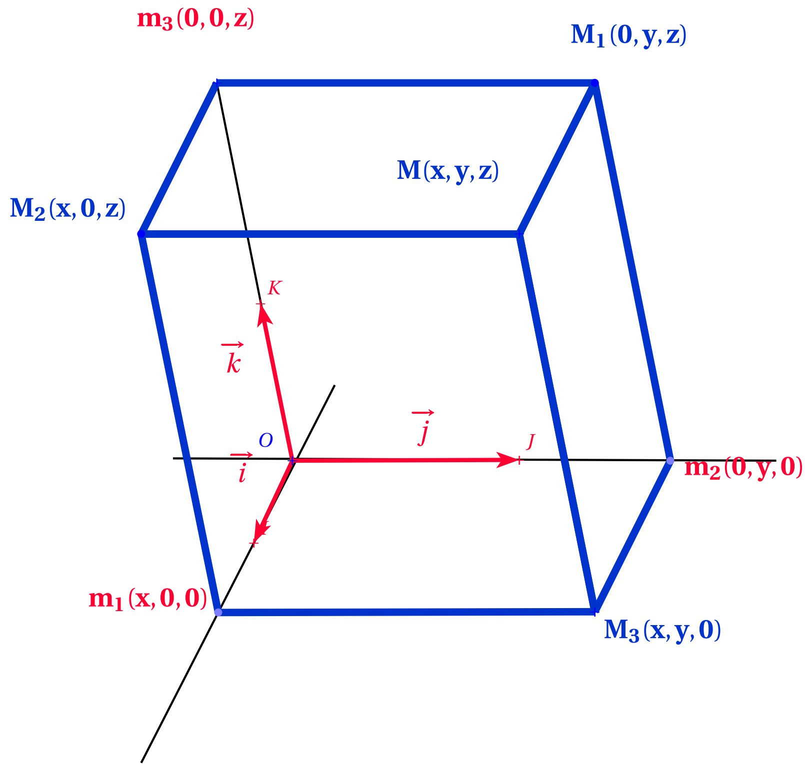
Les droites (OI), $OJ)$ et (OK) globalement appelées axes des coordonnées sont désignées respectivement par axe (Ox), axe (Oy) et axe (Oz).
Les plans (OIJ), (OJK) et (OKI) sont à leur tour désignés par plan (xOy), plan (yOz) et plan (zOx).
Le tableau ci-dessous exprime la condition traduisant le fait qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à l'un des plans (ou l'un des axes) de coordonnées.

plans	caractérisation	axes	caractérisation
(xOy)	$z = 0$	(Ox)	$z = 0$ et $y = 0$
(yOz)	$x = 0$	(Oy)	$z = 0$ et $x = 0$
(xOz)	$y = 0$	(Oz)	$x = 0$ et $y = 0$

Par exemple, étant donné un point $M(x, y, z)$ la condition $z = 0$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, c'est à dire que $\overrightarrow{OM}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont coplanaires ou encore que M appartient au plan $(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$, c'est à dire au plan (xOy).

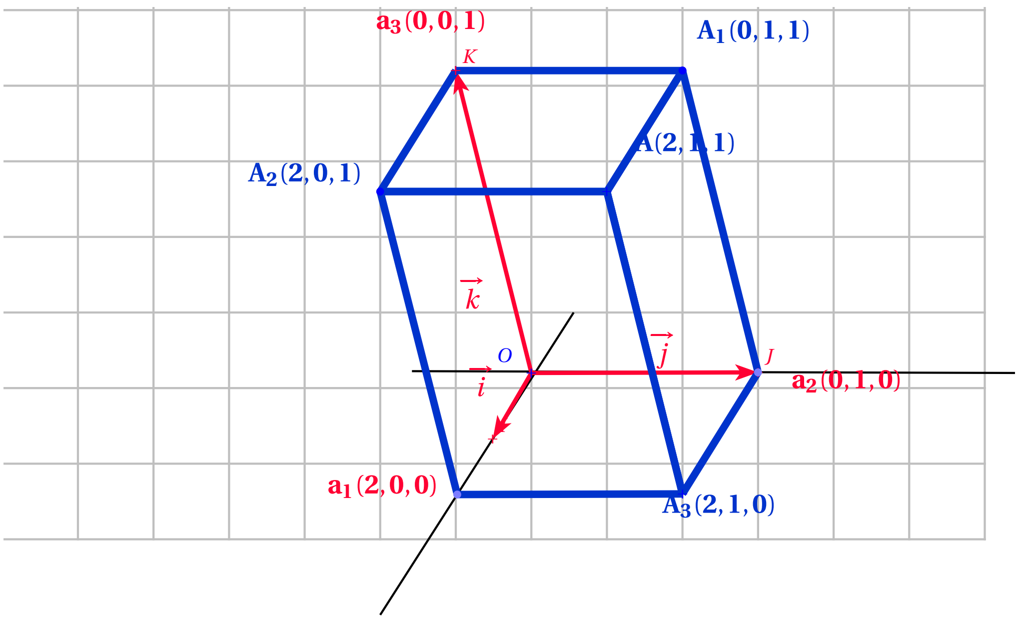
Parallélépipède associé à un point

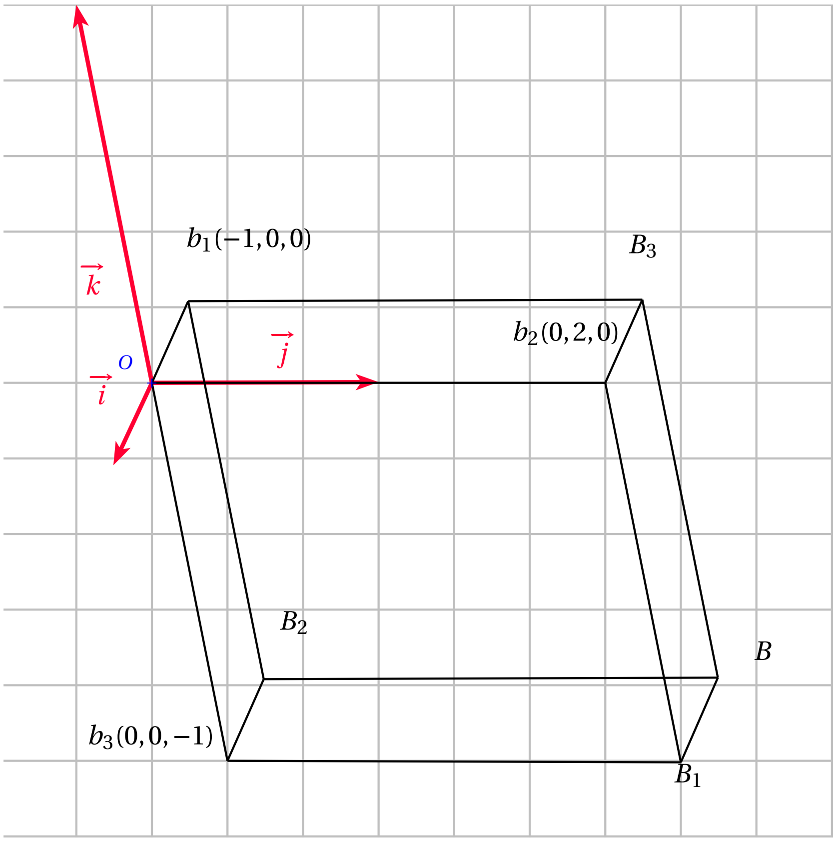
La configuration du parallélépipède à $M(x, y, z)$ est à maîtriser parfaitement : elle facilite certaines représentations graphiques et permet de retenir les résultats précédents.



Exemples

Placer les points $A(2,1,1)$ et $B(-1,2,-1)$. Dans chaque cas on reconstitue le parallélépipède associé en plaçant les points sur les axes des coordonnées : a_1, a_2 et a_3 et b_1, b_2 et b_3.





III. Propriétés des coordonnées

Elles sont analogues à celles du plan et peuvent être obtenues par ailleurs en usant des mêmes procédés : calcul vectoriel, relation de Chasles et unicité de l'écriture $x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$. Soulignons les résultats essentiels :

Théorème 19

- **Avec les vecteurs**
  Soit $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ deux vecteurs.
  - $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$
  - $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x',\ y = y',$ et $z = z'$.
  - $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\ , y + y',\ z + z')$.
  - $\alpha\,\vec{u}$ (α réel) a pour coordonnées $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
- **Liaison points-vecteurs**
  Soit $A(x, y, z)$ et $B(x', y', z')$ deux points de l'espace,
  le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x' - x,\ y' - y,\ z' - z)$.
- **Avec les points**
  Soit $A(x, y, z)$ et $B(x', y', z')$ deux points de l'espace,
  - $A = B \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$
  - Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$.

Exemples

Configuration

Les points $A(1,-2,1)$, $B(3,-1,0)$, $C(2,1,-2)$ et $D(0,0,-1)$ sont ils les sommets d'un parallélogramme ?

Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
Nous avons $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$ et $\overrightarrow{DC}(2,1,-1)$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

Alignement

Les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,\frac{3}{2})$ et $C(3,2,1)$ sont ils alignés ?

Etudions la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Nous avons $\overrightarrow{AB}(1,1,-\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AC}(2,2,-1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ s'obtiennent en multipliant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ par 2 donc $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**, donc les points A, B et C sont **alignés**.

Coplanarité

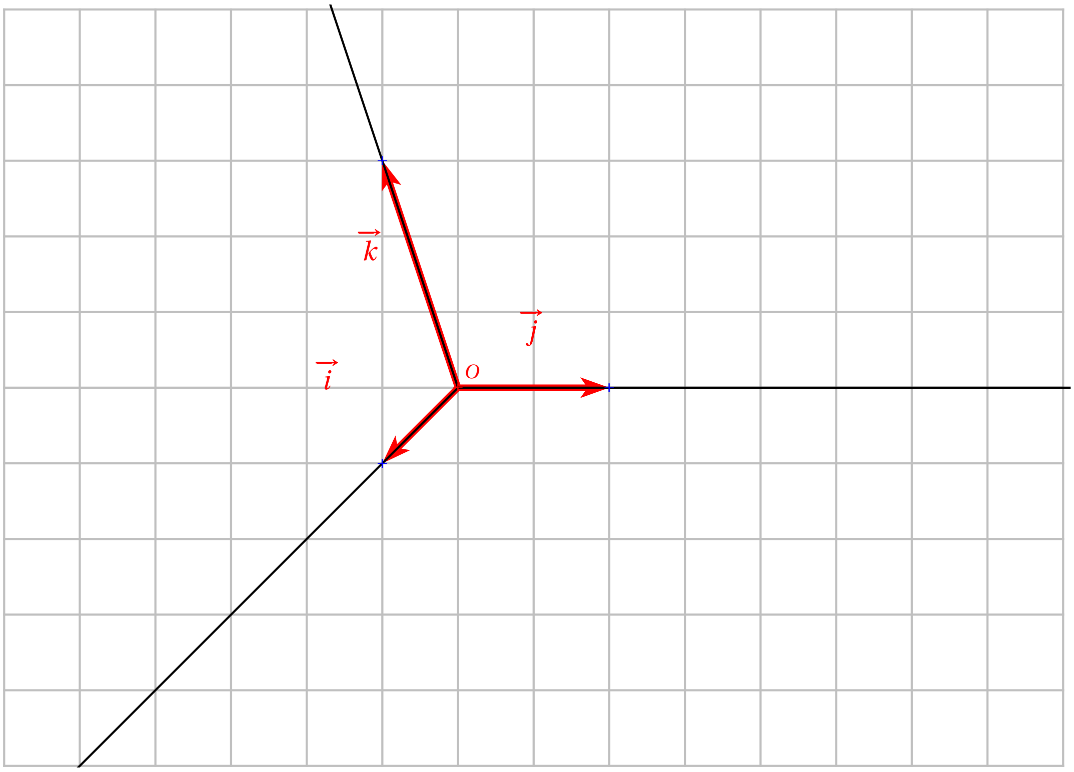
Les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,\frac{3}{2})$,$D(-1,3,2)$, et $E(-1,-7,4)$ sont ils coplanaires ?

Nous avons $\overrightarrow{AB}(1,1,-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AD}(-2,3,0)$ et $\overrightarrow{AE}(-2,-7,2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, on peut appliquer la règle algébrique qui stipule alors que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$. Le passage aux coordonnées conduit au **système** $\begin{cases} x-2y=-2 \\ x+3y=-7 \\ -\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$ qui admet pour couple solution (x,y), le couple $(-4,-1)$. Ainsi les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires. En conclusion les points A, B, D et E sont **coplanaires**.

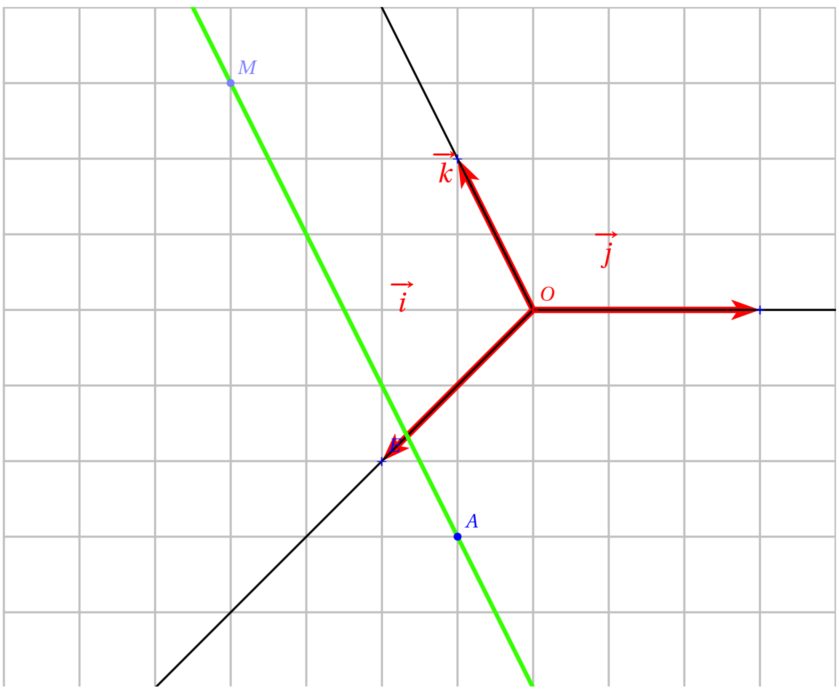
Exercices

Coordonnées

Exercice 89. Représenter les points suivants $A(3,2,1)$, $B(-1,-1,-1)$, $C(-1,2,-1)$ et $D\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$.



Exercice 90. Dans la figure ci-dessous $(AM)//(OK)$ et A appartient au plan (OIJ). Déterminer graphiquement les coordonnées de M.



Calculs de coordonnées

Dans les exercices suivants à partir de données initiales et d'une condition géométrique ou vectorielle, calculer les coordonnées de M.

Exercice 91. Données initiales : $A(1,-3,2)$, $B(1,-5,0)$, $C(1,0,1)$
Conditions : $\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Exercice 92. Données initiales : $A(1,0,3)$, $B(-1,-1,-4)$, $C(8,-2,5)$
Conditions : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$.

Exercice 93. Données initiales : $A(1,0,4)$, $B(3,-2,5)$, $C(1,1,1)$
Conditions : $ABMC$ est un parallélogramme.

Exercice 94. Données initiales : $A(-1,3,8)$, $B(0,-5,-6)$
Conditions : B est le milieu de $[AM]$.

Application à la colinéarité

Exercice 95. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

1. $A(1,-2,3)$, $B(0,4,1)$, $C(4,-20,9)$
2. $A(-1,-5,3)$, $B(3,-2,6)$, $C(4,-6,1)$
3. $A(1,2,5)$, $B(2,4,10)$, $C(-1,-2,-6)$

Exercice 96. Les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont ils alignés ? $A(1,-2,6)$, $B(2,5,-3)$, $C(4,-1,-3)$, $D(-6,-1,1)$, $E(0,3,-4)$, $F(1,-2,5)$.

Exercice 97. Étudier si les droites (AB), (CD) sont parallèles : $A(-3,1,4)$, $B(-2,-1,7)$, $C(-4,-1,-2)$, $D(-2,-5,4)$.

Application à la coplanarité

Exercice 98. On donne $A(2,0,-1)$, $B(1,-4,8)$ et $C(7,-12,22)$. Calculer $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. En déduire que les points O, A, B et C sont coplanaires.

Exercice 99. Étudier si les points A,B, C et D sont coplanaires.

1. $A(4,5,2)$, $B(-3,-1,7)$, $C(9,5,-3)$ et $D(1,2,0)$
2. $A(3,0,2)$, $B(1,1,1)$, $C(2,2,2)$ et $D(-2,5,1)$
3. $A(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},\sqrt{5},0)$, $C(\sqrt{5},\sqrt{7},0)$ et $D(\sqrt{7},\sqrt{11},0)$

Exercice 100. Soit $\overrightarrow{u}(-2,3,-1)$ et $\overrightarrow{v}(1,-1,-2)$

1. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{w}(4,-2,-18)$?
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w'}(-3,1,-1)$ sont ils coplanaires ?

Exercice 101. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{v}(-1,1,-2)$, et $\overrightarrow{w}(1,-2,-1)$ sont ils coplanaires ?

Exercice 102. Montrer que $A(1,1,1)$, $\overrightarrow{u}(0,-1,1)$, $\overrightarrow{v}(-2,-1,3)$, et $\overrightarrow{w}(-1,-1,-1)$ est un repère de l'espace.

Fiche 6

Géométrie
Produit scalaire dans l'espace

I. Définition du produit scalaire

Remarque
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires :

— s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

— s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui contient donc, par construction, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 25
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Règle fondamentale :

Toutes les propriétés du produit scalaire établies en Géométrie plane s'applique dans l'espace à des points et des vecteurs **coplanaires**. On dispose,par exemple, on dispose des propriétés suivantes.

Propriété 17
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$. Ainsi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

II. Propriétés algébriques

Propriété 18 (Symétrie et bilinéarite)
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

— $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

— $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Remarque
Seul le premier point recquiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

III. base orthonormée-repère orthonormé

Définition 26

— Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs est dite orthonormée si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

— Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

III.1. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété 19
Supposons que le vecteur $\vec{u}$ ait pour coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors

- $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$
- $\vec{v} \cdot \vec{j} = y$
- $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$

III.2. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 20

— Dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = xx' + yy' + zz'$$

— Dans une base orthonormée, la norme du vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ e

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

— La distance entre les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

III.3. Développements

Propriété 21
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

III.4. Formules de polarisation

Propriété 22
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

IV. Exercices

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 103. Soit a l'arête du cube $ABCDEFGH$. Calculer dans chaque cas $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u} = \overrightarrow{EB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$
2. $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{HF}$
3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$
4. $\vec{u} = \overrightarrow{EA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CH}$

Exercice 104. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Établir l'équivalence :

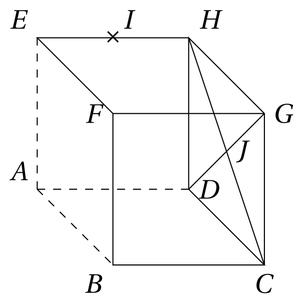
$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Exercice 105. Démontrer la relation $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

Exercice 106. Dans un repère orthonormé de l'espace :

1. Rappeler la formule de la norme d'un vecteur ;
2. Énoncer la formule de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et la démontrer.

Exercice 107. On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

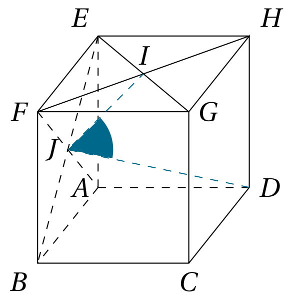


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2. $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3. $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5. $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6. $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

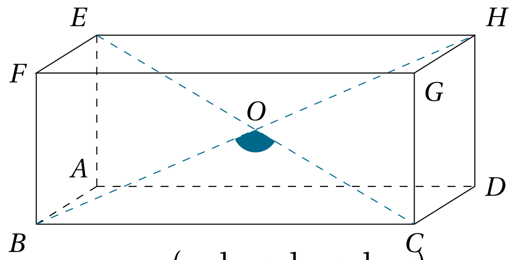
Calculs d'angles

Exercice 108. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J celui de la face $ABFE$.



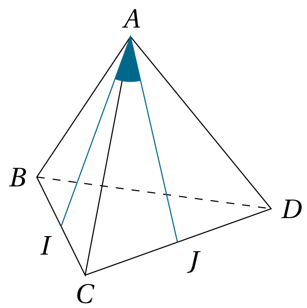
En se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, calculer, au degré prés, une mesure de l'angle $\widehat{IJD}$.

Exercice 109. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ au centième de degré prés.

Exercice 110. On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1. (a) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
   (b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré prés.

Exercice 111. Refaire l'exercice précédent en traitant le cas général d'un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$.

Exercice 112. On donne dans l'espace quatre points A,B, C et D non coplanaires. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CD]$.

1. Peut-on avoir $I = J$?
2. Existe-il des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?
3. Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$
4. Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que
$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$
5. Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

Fiche 7

Géométrie
Produit scalaire dans l'espace

I. Orthogonalité

Définition 27
On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Théorème 20

- Orthogonalité de deux droites. Deux droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- Orthognalité droite- plan. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.
  - Pour tous les points M et N de $\mathscr{P}$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.
  - Pour tout couple $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ de vecteurs de $\mathscr{P}$, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'} = 0$$

II. Vecteur normal à un plan

Définition 28
Étant donné un plan $\mathscr{P}$, tout vecteur directeur d'une droite orthogonal à $\mathscr{P}$ est appelé un vecteur normal à $\mathscr{P}$

Théorème 21

- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ un plan. Quel que soit le point A de $\mathscr{P}$ et le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

On dit que le plan est le plan passant par A et de vecteur normal à $\overrightarrow{n}$.

III. Projection orthogonale

Définition 29
Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d.

Propriété 23
Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M à la droite d.

Définition 30
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathscr{P}$.

Propriété 24
Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M au plan e $\mathscr{P}$.

Le problème

Soit $\mathscr{P}$ un plan défini comme le plan passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Etant donné un point M de l'espace, on note M' et m les projetés orthogonaux de M sur $\mathscr{P}$ et sur la droite $d(A, \overrightarrow{n})$. Il s'agit d'exprimer $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{Am}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$.

Une méthode

Nous avons $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{Am}$. Exploitons les propriétés de la figure :

1. $m \in d(A, \overrightarrow{n})$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{Am} = t\overrightarrow{n}$
2. $M' \in \mathscr{P}$, $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Il en découle $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + t\overrightarrow{n}$ puis $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = t\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2$. Nous en déduisons successivement

$$t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2}$$

donc

$$\overrightarrow{Am} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2}\overrightarrow{n}$$

et

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2}\overrightarrow{n}$$

IV. Exercice

IV.1. Orthogonalité

Exercice 113. Démontrer que si un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $(\mathscr{P})$, alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exercice 114. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 115. Même exercice que le précédent avec les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}k+1\\-k\\2\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$.

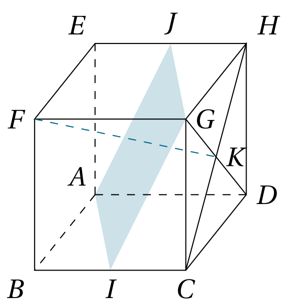
Exercice 116. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les deux points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 117. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les quatre points $A(-1;1;2)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;3;1)$ et $D(-8;2;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 118. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



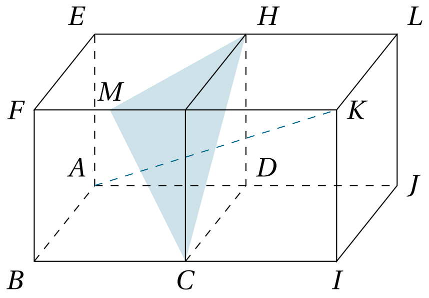
Sans utiliser de repère :

1. démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

2. (a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;
   (b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;
   (c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

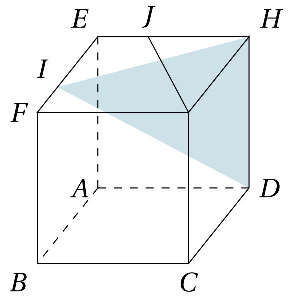
Exercice 119. Reprendre l'exercice précédente en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

Exercice 120. On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.
3. Conclure.

Exercice 121. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).
4. Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{13};\dfrac{7}{13};1\right)$ dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice 122. $ABCDEFG$ est un cube. Montrer que la grande diagonale (AG) coupe les triangles équilatéraux EBD et FCH en leurs centres respectifs I et J et que de plus $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JG}$.

Exercice 123. Montrer que, quels que soient les points A, B, C et D de l'espace :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

En déduire que si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont formés de droites orthogonales, il en est de même du troisième couple.

Exercice 124. Un tétraèdre $ABCD$ est tel que (AB) est orthogonale au plan (BCD).

1. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le triangle ACD est rectangle en C si et seulement si le triangle BCD est rectangle en C.

Exercice 125. Soit un tétraèdre $ABCD$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si,
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$
2. Démontrer que si dans un tétraèdre $ABCD$ les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales d'une part et les arêtes (BC) et (AD) d'autre part sont orthogonales alors les arêtes (BD) et (AC) sont aussi orthogonales.
3. On suppose les conditions de la question 2 satisfaites. Soit A' le projeté orthogonal de A sur la face (BCD). Démontrer que A' est l'orthocentre du triangle BCD.
Soit B', C' et D' les projetés respectifs de B, C et D sur la face opposée. Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.
Remarque
Un tel tétraèdre où les hauteurs sont concourantes est appelé tétraèdre orthocentrique.

Exercice 126. Dans un tétraèdre $ABCD$, soit A' le projeté orthogonal de A sur (BCD).

1. Comparer $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$, puis $\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BD}$ avec $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. En déduire que si A' est l'orthocentre de BCD alors le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique.

Exercice 127. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête a et O le point défini par $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$. O est appelé le centre du tétraèdre.
K est le milieu de $[BC]$ On appelle centre de gravité du triangle BCD le point A' vérifiant $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{0}$. De même B' est le centre de gravité de ACD,C' celui de ABD et D' celui de ABC.
On appelle médiane du tétraèdre toute droite joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée.
On appelle bimédiane du tétraèdre toute droite joignant les milieux de deux arêtes opposées.

1. Démontrer que A' appartient à BCD. On admettra qu'il en est de même pour les centres de gravité. Ils appartiennent au plan contenant le triangle.
2. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Deux quelconques des arêtes opposées sont orthogonales.
   (b) Chaque médiane est orthogonale à la face opposée
   (c) le point O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.
   (d) Exprimer en fonction de a, les longueurs DK, DA' et AA'.
   (e) On note V le volume du tétraèdre et R le rayon de la sphère circonscrite. Donner en fonction de a l'expression de V et celle de R.
   (f) Évaluer $\cos \widehat{AOB}$ et $\cos \widehat{AKD}$ et donner une valeur apporchée de ces deux angles en degré, à 0,01° près.
   (g) Soit Ω le milieu de $[AA']$. Montrer que le repère (Ω, B, C, D) est orthogonal et que $\left\|\overrightarrow{\Omega B}\right| = \left\|\overrightarrow{\Omega C}\right| = \left\|\overrightarrow{\Omega D}\right|$

Fiche 8

Géométrie Analytique
Plans de l'espace

Dans tout le chapître l'espace est muni d'un repère ORTHONORME $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. Équation cartésienne d'un plan défini par un vecteur normal et un point

I.1. Étude préliminaire

Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et admettant le vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal, peut être défini comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
La traduction analytique de cette relation donne $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,soit en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a ou b ou c non nul.
Réciproquement, étant donnés trois réels a,b, c dont l'un au moins est non nul, montrons que l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.
Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{P}$, (il en existe, pourquoi ?) : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.
Alors, $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Ainsi

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 22
Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul. Les plans orthogonaux à $\vec{n}$ sont les plans dont une équation cartésienne est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d réel.

Remarque
Le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal à $\vec{k}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{i}, \vec{j})$ est $z = 0$.
Le plan $(0, \vec{i}, \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{j}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{i}, \vec{k})$ est $y = 0$.
Le plan $(0, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{i}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{j}, \vec{k})$ est $x = 0$.

Exemple
Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(-2, 1, 3)$ et orthogonal à (BC) avec $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $(3,3,-3)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,1,-1)$, colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, est donc également un vecteur normal à ce plan. Traduisons analytiquement la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$, avec $M(x,y,z)$. On obtient $(x+2)+(y-1)-(z-3)=0$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x+y-z+4=0$.

II. Distance d'un point à un plan

Théorème 23
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $M(x_0,y_0,z_0)$ un point de l'espace. La distance du point M_0 au plan $\mathscr{P}$ est calculée par

$$\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration : Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, on peut écrire $\|\overrightarrow{n}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Soit A un point quelconque du plan $\mathscr{P}$, notons (x_1,y_1,z_1) ses coordonnées. On dipose de l'égalité $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. On a démontré dans la fiche précédente que la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est $\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)=ax_0+by_0+cz_0-(ax_1+by_1+cz_1)=ax_0+by_0+cz_0+d$.

On obtient la formule de l'énoncé en remplaçant $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|$ et $\|\overrightarrow{n}\|$ par leurs expressions analytiques.□

Exemple
Calculer la distance du point $M_0(5,2,-3)$ au plan d'équation cartésienne $x+4y+8z+2=0$
Appliquons simplement le résultat du théorème :

$$d(M_0,\mathscr{P})=\frac{|1\times5+4\times2+8\times(-3)+2|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{81}}=1$$

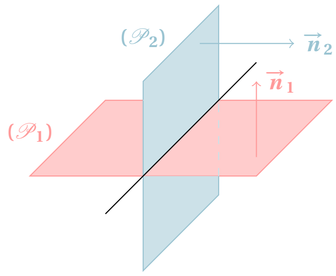
III. Plans parallèles

Propriété 25
Les plans $\mathscr{P}\ :\ ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}'\ :\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont **parallèles** si, et seulement si, (a,b,c) et (a',b',c') sont **proportionnels**.

Démonstration : Deux plans sont parallèles si, et seulement si, un vecteur normal à l'un est aussi normal à l'autre. Si et seulement si les vecteurs obtenus par à partir des équations respectives des deux plans sont colinéaires. □

IV. Plans perpendiculaires

Définition 31
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.



Propriété 26
Les plans $\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa'+bb'+cc'=0$.

V. intersection de deux plans

Les plans $\mathscr{P}$ orthogonal à $\vec{n}$ et $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\vec{n'}$ sont sécants si, et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires. Dans ces conditions, leur droite d'intersection est dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

VI. Exercices

Exercice 128. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(3,-1,2)$ et $\vec{n}\,(1,0,-4)$.

Exercice 129. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(1,-1,0)$ et $\vec{n}\,(1,1,-2)$.

Exercice 130. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(5,-1,-6)$ et $\vec{n}\,(1,1,1)$.

Exercice 131. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(-2,1,2)$ et $\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}$.

Exercice 132. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(\sqrt{2},3,0)$ et $\vec{n}=-3\vec{k}$.

Exercice 133. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal avec $A(3,4,5)$ et $\vec{n}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$.

Exercice 134. Dans chaque cas,vérifier que l'équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal à ce plan.

1. $3x-5y+z-1=0$

2. $x = y$
3. $3z - x - 3 = 0$
4. $y = 1 - 2x$

Exercice 135. Dans chaque cas donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ (déterminer d'abord un point et un vecteur normal)

1. $\mathscr{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$ où $A(-1,3,1)$ et $B(0,5,-3)$
2. $\mathscr{P}$ est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3,0,4)$, $B(-1,1,1)$ et $C(2,0,0)$.

Exercice 136. On donne les points $A(3,-1,4)$ et $B(0,5,1)$. Montrer que (AB) est orthogonale au plan d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$.

Exercice 137. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(1,-1,1)$ et $\mathscr{P}\ :\ 2x + y - z - 3 = 0$.

Exercice 138. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(2,1,0)$ et $\mathscr{P}$ le plan passant par 'origine du repère et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-1,-1)$.

Exercice 139. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(0,0,0)$ et $\mathscr{P}$ le plan médiateur segment $[AB]$ où $A(-4,2,1)$ et $B(5,3,-7)$

Exercice 140. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(-4,4,-9)$ et $\mathscr{P}\ :\ \dfrac{x}{2} + y + \dfrac{z}{3} - 6 = 0$.

Exercice 141. Prouver que la distance d de M à Δ droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$ vérifie la relation

$$d^2 = AM^2 - \frac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})^2}{\|\overrightarrow{n}\|^2}$$

Exercice 142. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ ayant pour coordonnées $(1,1,1)$, on désigne par D la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{n}$ et par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à D passant par O. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, démontrer que les points $A(1,0,2+\sqrt{3})$ et $B(4+3\sqrt{2},1,1)$ sont à égale distance de la droite D et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 143. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $A(0,0,0)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{v}(0,1,-1)$

Exercice 144. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $A(1,-2,-1)$, $\overrightarrow{u}(-1,3,4)$ et $\overrightarrow{v}(0,0,2)$.

Exercice 145. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $A(2,1,-1)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{v}(-1,-2,1)$.

Exercice 146. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (ABC) :

$$A(1,-1,3),\ B(2,5,-1),\ \text{et } C(-3,4,0)$$

Exercice 147. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan $3x - y + z - 5 = 0$ passant par le point $A(-1,1,1)$.

Exercice 148. Prouver que les points $A(0,2,-1)$, $B(-1,1,-2)$ et $C(1,0,3)$ définissent un plan parallèle au plan d'équation $2x - y - z + 4 = 0$

Exercice 149. Étant donnés deux plan $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ de l'espace, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{P}_\infty$ contient une droite orthogonale à $\mathscr{P}_\epsilon$
2. $\mathscr{P}_\epsilon$ contient une droite orthogonale à $\mathscr{P}_\infty$
3. $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\epsilon$ sont perpendiculaires.

Exercice 150. Les plans d'équations $3x - y + 2z - 1 = 0$ et $x + 5y + z - 2 = 0$ sont ils perpendiculaires ?

Exercice 151. Soit λ un réel fixé. Montrer que l'équation :

$$\lambda x + (\lambda + 1)y + z - 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$ et que P passe par $A(1, -1, 2)$.

Exercice 152. Montrer que chacune des équations ci-après est celle d'un plan parallèle ou perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées (xOy), (xOz) et (yOz).

1. $3x - z + 1 = 0$
2. $y - 5 = 0$
3. $y + 2z = 1$
4. $x = y$
5. $z + 4 = 0$
6. $2x + 5 = 0$

Exercice 153. Montrer que les plans d'équations $3x - 2y - z - 5 = 0$ et $5x + y + 2z - 4 = 0$ sont sécants selon une la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ avec $A(1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{u}(3, 11, -13)$.

Exercice 154. Prouver que les plans d'équations $x - y + 1 = 0$ et $z - x - 1 = 0$ se coupent selon une droite contenue dans le plan d'équation $y - z = 0$.

Fiche 9

Géométrie Analytique
Droites de l'espace

I. Droites de l'espace

I.1. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. En bref $D = \mathscr{D}(A, \vec{u})$. La droite D peut être décrite comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$,t étant un nombre réel quelconque. Ainsi $M(x, y, z)$ appartient à D signifie : il existe un réel t tel que $x = x_0 + t\alpha$, $y = y_0 + t\beta$ et $z = z_0 + t\gamma$. Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition 32
Le système de relations $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\vec{u}$ supposé non nul).

Remarques

- La notation $(t \in \mathbb{R})$ a pour vocation de rappeler que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point associé $M(x, y, z)$ décrit la droite $\mathscr{D}(A, \vec{u})$.
- La lettre t est le paramètre de la représentation mais d'autres lettres peuvent être utilisées.

Exemple
Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(-1, 2, -3)$ et $B(1, -1, 1)$. La droite (AB) n'est autre que la droite $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Or $\vec{u}\,(2, -3, 4)$, donc une représentation paramétrique de la droite est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{9.1}$$

Notons que la droite (AB) est aussi la droite $\mathscr{D}(B, \vec{u})$ d'où la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{9.2}$$

Cet exemple rend visible qu'une même droite peut avoir plusieurs représentations paramétriques. En effet posons $s = t - 1$ dans le système de ralation (1) et observons que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, il en est de même pour s. Dans ces conditions

$$\begin{cases} x = -1 + 2(1+s) \\ y = 2 - 3(1+s) \\ z = -3 + 4(1+s) \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{9.3}$$

Ce qui donne après réduction

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -1 - 3s \\ z = 1 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{9.4}$$

On retrouve le système (2) à la lettre près utilisée comme paramètre.

I.2. Système de deux équations linéaires

Exemple
Considérons les plans $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ d'équations :

$$\mathscr{P}_\infty \;:\; 2x + y - z - 2 = 0 \;\text{ et } \mathscr{P}_\in \;:\; x + 3y + 7z - 11 = 0,$$

de vecteur normal respectif $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$ et $\overrightarrow{n_2}(1,3,7)$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ sont sécants selon une droite que nous appellerons $\mathscr{D}$.
L'équivalence qui en résulte est

$$M(x,y,z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + 7z - 11 = 0 \end{cases}$$

conduit à dire que $\mathscr{D}$ est définie par le système des deux équations linéaires.

De manière générale,

Définition 33
Lorsque (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points $m(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est une droite que l'on dit « définie par le système des deux équations linéaires ».

Exemple
Donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le système $\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y + 7z - 11 = 0 \end{cases}$.

Utiliser l'une des coordonnées comme paramètre.

Multiplions la seconde équation par 2 et effectuons la différence avec la première équation, nous obtenons $-5y - 15z + 20 = 0$, soit $y = -3z + 4$.
Reportons dans la première équation, il vient $2x + (-3z + 4) - z - 2 = 0$, soit $x = 2z - 1$.

Une représentation paramétrique de la droite D est $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

I.3. Intersection d'une droite et d'un plan

Le problème posé

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et D la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. En premier lieu, il est clair que D et $\mathscr{P}$ sont sécants si, et seulement si, $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ ne sont pas orthogonaux, c'est à dire si, et seulement si, $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$. Il s'agit, sous une telle hypothèse, d'obtenir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et D.

Exemple type

Déterminer le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$ et de la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ avec $A(2, 1, -4)$ et $\overrightarrow{u}(3, -2, 4)$.
Noter qu'avec $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$ normal à$\mathscr{P}$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = -5$ donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} \neq 0$.

Soit $M(x, y, z)$ le point de D défini par $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -4 + 4t \end{cases}$, t est réel. Le point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $x + 2y - z + 2 = 0$, c'est à dire :

$$(2 + 3t) + 2(1 - 2t) - (-4 + 4t) + 2 = 0.$$

Soit, $-5t + 10 = 0$, d'où $t = 2$. En reportant la valeur de t dans la représentation paramétrique de D, on détermine les coordonnées du point d'intersection de D et de $\mathscr{P}$ soit $(8, -3, 4)$.

II. Exercices

Exercice 155. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ avec $A(-1, 2, 5)$ et $\overrightarrow{u}(-1, 1, 4)$.

Exercice 156. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(5, 0, -1)$ et $B(8, -3, 2)$.

Exercice 157. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à (AB) passant par C avec $A(1, 0, -3)$, $B(-3, 1, 0)$ et $C(-1, 6, 2)$.

Exercice 158. Donner une représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan d'équation $2x - z + 1 = 0$ passant par $A(-2, 1, 0)$

Exercice 159. On considère la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t\sqrt{2} \\ y = 2t - 1 \\ z = t\sqrt{2} - 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}(1, -\sqrt{2}, -1)$ est il un vecteur directeur de D ?
2. La droite D est elle contenue dans le plan d'équation $3x + \sqrt{2}y + z - 2 + \sqrt{2} = 0$?
3. Montrer que la plan orthogonal à D passant par le point $A(\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$ contient l'origine du repère.
4. On donne le point $C(5, -2, -7)$ et $D(1, -4\sqrt{2}, 1)$, montrer que le milieu du segment $[CD]$ appartient à la droite D.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à D passant par le point $P(-1, 0, -\sqrt{2})$. Cette droite passe-t-elle par le point $Q(\sqrt{2} - 1, -2, -2\sqrt{2})$?

Exercice 160. Après avoir vérifié que le système de deux équations linéaires définit une droite , donner une représentation paramétrique de la droite D définie par ce système

1. $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3y-z-2=0 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y-z=-1 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} 2+y-5z=0 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$.
4. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -2x+y+z=3 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} (\beta^2+\gamma^2)x-\alpha\beta y-\alpha\gamma z=0 \\ (\beta+\gamma)x-\alpha y-\alpha z=0 \end{cases}$. ($\alpha$, β, γ trois réels non nuls avec $\beta \neq \gamma$.

Exercice 161. Montrer que le plan P d'équation $3x+2y-z+1=0$ est sécant avec chacun des axes de coordonnées et calculer les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 162. Soit a,b et c trois réels non nuls et P l eplan d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection A,B et C de P avec les axes (Ox), (Oy) et (Oz) ?

Exercice 163. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=t \\ z=4-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Dans chaque cas, examiner si $\mathscr{D}$ est sécante avec le plan$P$ et, si oui, calculer les coordonnées du point d'intersection.

1. $P=(xOy)$
2. $P=(xOz)$
3. $P=(yOz)$
4. $P : 2x+y-z=0$
5. $P : -x+2y-z+1=0$
6. P ets le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$ passant par $A(-1,0,1)$
7. P orthogonal à D passant par $I(1,0,0)$

Exercice 164. Déterminer le projeté orthogonal de O sur le plan d'équation cartésienne $x+y+z=1$

Exercice 165. On considère les plans $P_1 : x-y+z-3=0$ et $P_2 : 2x+y-2=0$.

1. Montrer que les deux plans sont sécants selon une droite D
2. Soit A le point de coordonnées de $(1,1,1)$. Donner une équation cartésienne du plan P contenant la droite D et perpendiculaire à P_1.
3. Calculer la distance de A à P_1 de A à P puis en déduire la distance de A à D.

Exercice 166. Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=5+3t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, et A le point de coordonnées $(1,-1,2)$.

1. Déterminer le réel t de façon que le point M de D qui lui est associé vérifie (AM) orthogonal à D.
2. En déduire la distance de A à la droite D.

Exercice 167. On considère les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C((0,0,c)$ où a, b, c sont des réels non nuls. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) et en déduire que la distance h du point O à ce plan vérifie

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Fiche 10

Géométrie Problèmes de BAC

I. Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points $A(8\,;\,0\,;\,8)$,$B(10\,;\,3\,;\,10)$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équations paramétriques :

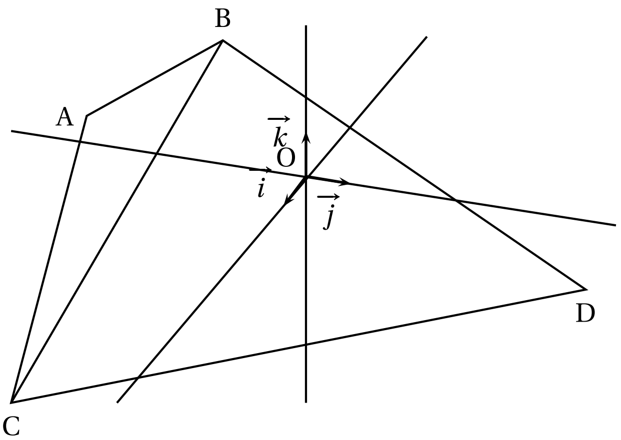
$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. (a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
   (b) Démontrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires.
2. (a) Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
   (c) Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{P}$ est indépendante de M.
   (d) Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (xOy).
3. La sphère $\mathscr{S}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathscr{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathscr{P}$, du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

II. Exercice 2

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

Partie B

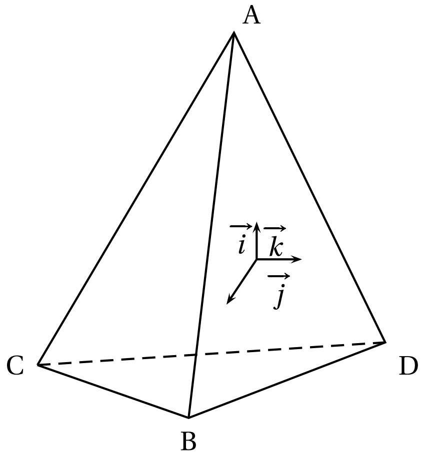
1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   (b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

III. Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$\text{A}(0\,;\,0\,;\,3),\ \text{B}\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1\right),\ \text{C}\left(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1\right),\ \text{D}\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right).$$

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



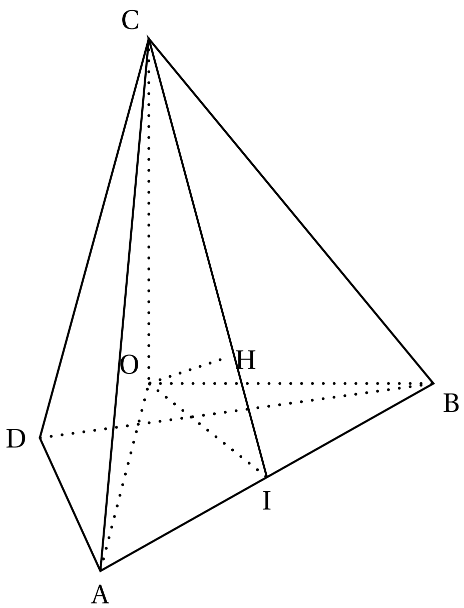
Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

IV. Exercice 4 version du Bac métropole 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par
$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   (a) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   (b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $\text{OH} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   (c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

V. Exercice 4 Version proposée par l'A. P. M. E. P.

OABC est un tétraèdre tel que :

— OAB, OAC, OBC, sont trois triangles rectangles en O.

— OA = OB = OC.

Le dessin fourni en annexe sera complété au fur et à mesure de l'avancement du problème, et rendu avec la copie.
(Je propose que seul le tétraèdre OABC soit représenté, avec une disposition qui permette ultérieurement de bien distinguer les points O et K, les droites (CK) et (CO), les droites (AK) et (AO), et de placer le repère dans la disposition habituelle).

1. On nomme K le point du plan ABC qui est le point de concours des trois médiatrices du triangle ABC. Montrer que K est aussi l'isobarycentre de A, B, C.
2. On choisit la distance OA comme unité de longueur, et on munit l'espace du repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right)$, qui est alors orthonormé.
   (a) Déterminer les coordonnées de K.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal au plan ABC.
   (c) Calculer la distance de O au plan ABC.
3. On rappelle que, dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est défini de deux façons équivalentes :
   — c'est le plan orthogonal au segment et passant par son milieu
   — c'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à égale distance des deux extrémités du segment.
   (a) Montrer que le plan médiateur P du segment [AB] est le plan COK.
   Déterminer le plan médiateur Q du segment [BC].

(b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace situés à égale distance des trois points A, B, C.

4. Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK}$, et soit Ω l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
   (a) Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].
   (b) Montrer que Ω est le centre d'une sphère S contenant les quatre sommets du tétraèdre ABCO (S se nomme sphère circonscrite au tétraèdre).
5. Les unités d'aire et de volume étant celles attachées au repère, calculer :
   — l'aire du triangle ABC ;
   — la mesure de la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD ;
   — le volume du tétraèdre ABCD ;
   — le volume de la sphère S.