Thème 3 Analyse-Suites

Fiche 1

Analyse- SUITES DE RÉELS
Suites arithmétiques et géométriques

I. Résumé

Le tableau ci-dessous rassemble les principaux résultats obtenus en classe de première.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = r \times n + b$	$u_n = k \times q^n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
S= somme des N termes consécutifs	$S = \begin{pmatrix} moyenne \\ des\ termes \\ extrêmes \end{pmatrix} \times N$	$S = \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} \times \frac{1-q^N}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

II. Exemples

Calculer les sommes $A = 5 + 9 + 13 + \ldots + 61$ et $B = 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{10}$.

- A est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4, le nombre de termes est $\dfrac{61-5}{4} + 1 = 15$ et la moyenne des termes extrêmes est 33. Donc $A = 33 \times 15 = 495$.
- B est la somme de neuf termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.
  Donc $B = 5^2 \times \dfrac{1-5^9}{1-5}$ soit $B = 12207025$.

Les résultats relatifs à la somme de termes consécutifs résultent de deux formules sommatoires suivantes qu'il est important de connaître :

$$1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1 + q + \ldots + q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q} \ (si\ q \neq 1)$$

III. Suites arithmético-géométriques

Définition 34
On appelle suite arithmético-géométrique une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme : quel que soit l'entier n, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent des réels.

Remarque
- si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique
- si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.

III.1. Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le cas où $a \neq 1$

- Rechercher une suite constante (c) vérifiant la relation de récurrence.
- Prouver que la suite $(u_n - c)$ est géométrique de raison a
- Exprimer le terme général de la suite $(u_n - c)$ en fonction de n
- Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

III.2. Exemple

Soit (C_n) la suite définie par $C_{n+1} = 1,005 \times C_n - 400$, de premier terme 50000. Exprimer le terme général de cette suite en fonction de n.

- Résolvons l'équation d'inconnue x, $x = 1,005 \times x - 400$. Après quelques prouesses techniques, on obtient $-0,005x = -400$ donc $x = 80000$. La suite (α_n) de premier terme 80000, vérifiant la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = 1,005 \times \alpha_n - 400$ est une suite constante.
- Prouvons que la suite $(C_n - \alpha)$ est géométrique de raison a :
  Soit n un entier naturel,

$$\begin{array}{cccc} C_{n+1} & = & 1,005 \times C_n - 400 & \\ \alpha & = & 1,005 \times \alpha - 400 & \\ \text{Soustrayons} & \text{la} & \text{deuxième égalité} & \text{à la première} \\ C_{n+1} - \alpha & = & 1,005(C_n - \alpha) & \end{array}$$

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, $C_{n+1} - \alpha = 1,005(C_n - \alpha)$. La suite $(C_n - 80000)$ est donc géométrique de raison $1,005$. Le premier terme est $C_0 - 80000$ c'est à dire -30000.

— Exprimons le terme général de la suite $(C_n - 80000)$ en fonction de n :
$C_n - 80000 = (C_0 - 80000) \times 1,005^n$. On obtient $C_n - 80000 = -30000 \times 1,005^n$

— Exprimons alors le terme général de (C_n) en fonction de n.
De l'étape précédente, on déduit que, pour tout entier naturel n, $C_n = 80000 - 30000 \times 1,005^n$

IV. Exercices

Exercice 168. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite arithmétique de raison r, vérifiant :

1. $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{3}{2}$
2. $u_5 = 1$ et $u_{11} = 8$
3. $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{100} = 2$

Exercice 169. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite géométrique de raison q, vérifiant :

1. $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$
2. $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$
3. $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = 24573$

Exercice 170. Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique et préciser la raison.

1. $u_n = 3^{n+2}$
2. $u_n = 5^{1-3n}$
3. $u_n = (-1)^n \times 6^{2n+3}$
4. $u_n = 2 + (2 + 2^2 + \ldots + 2^n)$

Exercice 171. Calculer les sommes :

1. $A = 8 + 13 + 18 + \ldots + 2018 + 2023$
2. $2^2 + 2^5 + 2^8 + \ldots + 2^{20}$
3. $x + x^2 + \ldots + x^n$ (lorsque $x \neq 1$, puis $x = 1$).

Suites arithmético-géométriques

Exercice 172. Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite en fonction de n.

— $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n - 300$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 0,90u_n + 300$

Exercice 173. TOTORO va voir son banquier pour obtenir un crédit de 10000 euros. Celui-ci lui propose de rembourser une somme de 400 euros par mois avec un taux mensuel de 0,05%. Combien de temps va mettre TOTORO pour rembourser son crédit ?

Fiche 2

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement global d'une suite

Suites monotones

Définition 35
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est non monotone si elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Techniques d'étude :
Trois techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

1. **La technique fonctionnelle**.
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
2. **Les techniques algébriques**.
   Elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
   — soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
   — soit en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier n, $u_n > 0$.
   — le raisonnement par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition 36
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que , pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que , pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.
- La suite (u_n) est non bornée si elle n'est pas majorée ou elle n'est pas minorée.

Les techniques précédentes s'appliquent encore ici.

- suites $u_n = f(n)$: si f est majorée sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) l'est aussi.
- suites $u_{n+1} = f(u_n)$: on peut raisonner par récurrence
- méthodes algébriques. Exemple si on conjecture un majorant M de la suite (u_n) alors on peut chercher à étudier algébriquement le signe de $u_n - M$.

Exercices

Suites croissantes, décroissantes

Exercice 174. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n^2 - 5n$
3. $u_n = 3n + (-1)^n$
4. $u_n = n - 3^n$

Exercice 175. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. $u_n = \frac{n}{3^n}$
2. $u_n = 0,1^n \times n^2$
3. $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}$

Exercice 176. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la fonction f $(u_n = f(n))$.

1. $u_n = n + \cos(n)$
2. $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$
3. $u_n = n^2(3-n)$

Exercice 177. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
2. $u_0 = \frac{7\pi}{22}$ et $u_{n+1} = u_n^2$

Suites majorées, minorées

Exercice 178. Montrer que chacune des suites ci-après est majorée et en déterminer un majorant.

1. $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \ldots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$
2. $u_n = 10 + 2\cos(n)$
3. $u_n = 9 + 3 + 1 + \ldots + 3^{-n+2}$
4. $u_n = \frac{3n}{n+1}$

Exercice 179. Dans chacun des cas suivants, étudier les bornes éventuelles de la suite (u_n) à l'aide du sens de variation de la fonction f. ($u_n = f(n)$).

1. $u_n = n^2 - 10n - 3$
2. $u_n = \frac{3n^2}{n^2+1}$
3. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

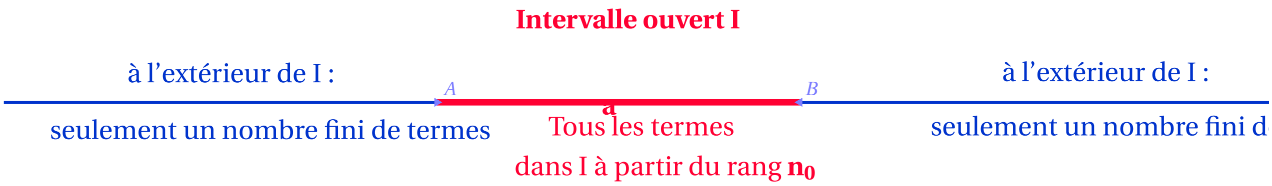
Exercice 180. Montrer, par récurrence, que $2 \leqslant u_n \leqslant 3$. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

Fiche 3

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement asymptotique

I. Suites convergentes

Définition 37
Soit (u_n) une suite numérique et a un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- Lorsque (u_n) admet pour limite a, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
- Lorsqu'une suite admet une limite finie a, on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, elle est divergente.
- Si une suite est convergente, sa limite est unique. Preuve en exercice.

I.1. Suites de référence

Propriété 27
Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$...admettent pour limite 0

II. Suites ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 38
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 39
On dit que (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

II.1. Suites de référence

Propriété 28
Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2...admettent pour limite $+\infty$

II.2. Suites divergentes

Elles sont de deux types, une suite divergente peut être :

— soit avoir une limite infinie

— soit de ne pas avoir de limite comme $(-1)^n$ (cf exercice)

III. Exercices

Exercice 181. Unicité de la limite.

1. On suppose qu'une suite (u_n) admet deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, on a donc $\alpha > 0$. Montrer que la définition de la limite appliquée à deux intervalles bien choisis conduit à une contradiction.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 182. En utilisant les définitions du cours montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ ne peut avoir de limite.

Exercice 183. Démontrer que si une suite (u_n) est convergente alors elle est bornée.

Fiche 4

Analyse- SUITES DE RÉELS
Opérations sur les limites

I. La somme

Théorème 24
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite de la somme $(u_n + v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
a est$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	x
a est$-\infty$	$-\infty$	x	$-\infty$

II. Le produit

Théorème 25
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $(u_n \times v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	ab	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$
a est$+\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
a est$-\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$+\infty$

III. Le quotient

Théorème 26
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel $(b \neq 0)$	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$\frac{a}{b}$	0	0
a est$+\infty$	$\pm\infty$	x	x
a est$-\infty$	$\pm\infty$	x	x

IV. Exemples

Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2. $v_n = n(3 - n)$

3. $\boldsymbol{w_n = \dfrac{1}{n^2-5}}$

La suite (u_n) :
On a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ car ce sont des suites de référence, donc, en utilisant le théorème sur la limite d'une somme, $\lim u_n = +\infty$.
La suite (v_n) :
On a $\lim(-n) = -\infty$ donc $\lim(3-n) = -\infty$ (limite d'une somme). Comme $v_n = n(3-n)$, le résultat sur le produit fournit $\lim v_n = -\infty$.
La suite (w_n) :
Il est clair que $\lim(n^2-5) = +\infty$, le résultat sur le quotient fournit alors $\lim w_n = 0$.

V. Formes indéterminées

Les théorèmes précédents ne disent rien :

— sur la somme lorsque $a = +\infty$ et $b = -\infty$

— sur le produit lorsque $a = \pm\infty$ et $b = 0$

— sur le quotient lorsque $b = 0$ ou lorsque a et b sont infinis tous les deux.

Ces situations dont certaines sont appelées formes indéterminées seront étudiées en exercice.

VI. Exercices

Opérations algébriques

Exercice 184. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide des théorèmes concernant les opérations sur les limites,

1. $u_n = 3n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = 1 - n^5$
3. $u_n = (1-3n)(n^2+n-2)$

Formes indéterminées

Exercice 185. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = 3n^2 - n + 5$. Mettre en facteur n^2.
2. $u_n = 8n - n^3$. Mettre en facteur n^3.

Exercice 186. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - n}{1 - n^2}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
3. $u_n = \dfrac{(n+3)(-2n+1)}{3n+5}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Exercice 187. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \sqrt{n} - n$. Mettre en facteur le terme dominant.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{2n+1}$. Mettre en facteur le terme dominant.

Exercice 188. Déterminer la limite de (u_n) avec $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Fiche 5

Analyse- SUITES DE RÉELS THÉORÈMES DE COMPARAISON

I. Théorèmes des comparaison

Théorème 27
On résume les théorèmes dans le tableau ci-dessous :

— les quatre premiers déterminent le comportement à l'infini d'une suite (x_n) par comparaison à d'autres suites (u_n), (v_n) dont le comportement est connu.

— le dernier résultat autorise le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse 1 : une inégalité à partir d'un certain rang	Hypothèse 2 : Comportement à l'infini	Conclusion
$u_n \leqslant x_n$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim x_n = +\infty$
$x_n \leqslant u_n$	$\lim u_n = -\infty$	$\lim x_n = -\infty$
$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers le même nombre ℓ	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$\lvert x_n - \ell \rvert \leqslant u_n$	$\lim u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$x_n \leqslant y_n$	$\lim x_n = \ell$ $\lim y_n = \ell'$	$\ell \leqslant \ell'$

II. Comportement asymptotique de q^n (q réel)

Théorème 28

— Si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

— Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante et a pour limite 1.

— Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Ce résultat sera démontré en exercice. Il permet le cas échéant, de déterminer la limite d'une suite géométrique, ou de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple

Etudier la limite de la suite (S_n) : $S_n = 1 + x + \ldots + x^n$ avec $-1 < x < 1$. Utilisons la formule sommatoire

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$.

III. Exercices

III.1. Théorème de comparaison

Exercice 189. Énoncer et démontrer le théorème de la première ligne du tableau.

Exercice 190. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \cos(n) - n$
2. $u_n = 2n + (-1)^n$

Exercice 191. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{n}$

III.2. Suites géométriques

Exercice 192. 1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \text{ Inégalité de Bernoulli}$$

2. En déduire que, si $q > 1$, $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

3. A l'aide des théorèmes de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Exercice 193. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 1{,}01^n$
2. $u_n = 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Exercice 194. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
2. $u_n = 1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{6}{5}\right)^n$
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^n$
5. $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{7}\right)^{2n}$

Exercice 195. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 3{,}77..7$ (n chiffres 7)
2. $u_n = 0{,}6767..67$ (n séquences 67)
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
5. $u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

Fiche 6

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement asymptotique des suites monotones

I. Suites monotones non bornées

Théorème 29
- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim u_n = +\infty$
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim u_n = -\infty$

Démonstration : Soit (u_n) une suite croissante, non majorée et M un réel quelconque. M n'est pas un majorant de (u_n) donc il existe au moins un terme de rang n_0 tel que $u_{n_0} > M$. La suite (u_n) étant croissante, tous les termes de rangs supérieurs à n_0 sont dans l'intervalle $]M, +\infty[$, ce qui se traduit par $\lim u_n = +\infty$. □

II. Le théorème de la convergence monotone

Théorème 30
- Si une suite de **nombres réels** est croissante et majorée alors elle est convergente vers un réel.
- Si une suite de **nombres réels** est décroissante et minorée alors elle est convergente

Démonstration : Admis. □

Commentaires :
Ce résultat, est difficile à établir car il découle de la construction des nombres réels, est capital en Analyse, il livre un résultat asymptotique sur une suite à partir de son comportement global. Cependant, s'il affirme la convergence d'une suite, ce théorème reste muet sur la la valeur de la limite.

Exemple
Le nombre d'Erdös
On pose $u_1 = 0,2$, $u_2 = 0,23$, $u_3 = 0,235$, ... $u_7 = 0,2357111317$ u_n s'écrit avec la juxtaposition des n premiers nombres premiers. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
Par définition la suite (u_n) est croissante, majorée par 1 donc elle converge. Sa limite est un nombre réel mystérieux imaginé par le mathématicien Paul Erdös en 1945. Cherchez donc qui est Paul Erdös !

III. Exercices

Exercice 196. Montrer que la suite de terme général $n!$ est croissante et non majorée. Conclure sur la limite de cette suite.

Exercice 197. On pose $u_1 = 1,38$, $u_2 = 1,3388$, ..., $u_n = 1,33\dots388\dots8$ (n chiffres 3 suivis de n chiffres 8).

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Montrer que, pour tout n, $0 \leqslant u_n - \dfrac{4}{3} \leqslant 10^{-n}$
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 198. On pose $u_1 = 0,1$, $u_2 = 0,12$, $u_3 = 0,123$, ..., $u_n = 0,123\dots$ u_n est obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers 1,2, ...,n après la virgule. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (Pour ceux que cela intéresse Nombre de Champernowne...)

Fiche 7

Analyse- SUITES DE RÉELS
Problèmes : Exemples d'études de suites

I. problème 1

Page 18 TERACHER NEW

II. Exemple 1

Etudier la suite de terme général $u_n = 2^n - n$

Observations

Écrire un programme en Python permettant d'afficher les premiers termes de la suite.

Rédaction

— Conjecturer le sens de variation valider votre conjecture par une démonstration.

— Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n)

III. Exemple 2

Etudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

On établira pour $k \geqslant 2$, l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Recherche d'une idée

Rédaction

IV. Exemple 3

Etudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Représentation graphique et conjectures

Rédaction

- Sens de variation
- Comportement asymptotique

V. Exercices

Exercice 199. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)
2. Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 13$, $u_n \geqslant 2^n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 200. En utilisant le résultat du problème 2, démontrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \dots + \dfrac{1}{n^4}$ est convergente.

Exercice 201. Considérons à présent la suite (H_n) de terme général $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}$. On se propose de démontrer par l'absurde que cette suite a pour limite $+\infty$.

1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul,
$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$
2. Démontrer que si on suppose que la suite n 'a pas pour limite $+\infty$ alors la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ a pour limite 0. On reviendra à la définition de la limite pour justifier la limite de la suite (H_{2n}).
3. Conclure.

Exercice 202. Approfondissements (***) Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $T_1 = 1$ et $T_{n+1} = T_n$ si n ne possède pas le chiffre 9 dans son écriture décimale, $T_{n+1} = T_n + \dfrac{1}{n}$ sinon. Démontrer que (T_n) converge.

Exercice 203. On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4$.

1. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16$$
3. Démontrer que (u_n) converge et a pour limite 16.

Fiche 8

Analyse- SUITES DE RÉELS Approfondissements -suites adjacentes

I. Exemple traité ensemble

Soit deux suites de réels (a_n) et (b_n) vérifiant :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$,

— la suite (a_n) est croissante,

— La suite (b_n) est décroissante,

1. Démontrer que ces deux suites sont convergentes.
2. Démontrer que si on suppose de plus que la limite de la différence $a_n - b_n$ est nulle alors elles convergent vers la même limite.

Remarque
Deux suites de réels vérifiant l'une est croissante, l'autre est décroissante et la limite de leur différence étant nulle, sont appelées suites adjacentes. Dans ce cas, on peut démontrer qu'elles convergent vers la même limite.

II. exercices

Exercice 204. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 205. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admet que $e - 1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

   En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

Exercice 206. 1. Soient $x, y, z \geq 0$. Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ (mettre $x + y + z$ en facteur).

2. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{3}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Fiche 9

Analyse- SUITES DE RÉELS
Problèmes

I. Problèmes de seuils cf Hyperbole

II. Algorithme de Babylone 86 page 38 Terracher

III. Approximation du nombre d'or 87 page 38 Terracher

IV. La méthode d'Archimède 88 page 38 Terracher

V. Problèmes de Seuil Hyperbole