Thème 6 : Probabilités

Fiche 1

Probabilité- Modélisation de la succession d'épreuves

I. Modélisation d'une succession d'épreuves

Définition 52

- Rappelons qu'une expérience aléatoire est un processus conduisant à un résultat appelé issue dont on peut dire deux choses :
  - on connaît l'ensemble des issues possibles que l'on note Ω
  - on ne peut savoir quelle issue va être réalisée avant d'effectuer l'expérience
- On dit que des expériences aléatoires sont indépendantes si la réalisation de l'un d'entre elle n' a pas de raison a priori d'influencer les conditions de réalisations des autres expériences.

Règle fondamentale de modélisation d'une succession d'épreuves indépendantes Si E_1 , E_2,...,E_n sont des épreuves aléatoires supposées « indépendantes » dans leur ensemble, on choisit de modéliser l'épreuve consistant en leur succession de la manière suivante

- L'ensemble des issues de la succession est le produit cartésien des univers de chacune des expériences : $E = E_1 \times \times E_2 \times ... \times E_n$.
- Le produit d'un $n-uplet$ est le produit des probabilités de chacune des composantes de ce $n-uplet$.

  Exemples

  On considère une urne contenant quatre boules deux blanches et deux noires.

  Considérons les deux expériences aléatoires suivantes : tirer une boule de l'urne, noter la couleur puis tirer une seconde boule dans l'urne sans remettre la première dans l'urne. Comment modéliser cette expérience aléatoire ?
- Considérons les deux expériences aléatoires suivantes : tirer une boule de l'urne, noter la couleur puis tirer une seconde boule dans l'urne après avoir remis la première dans l'urne. Ces deux expériences aléatoires sont indépendantes.
- Considérons une expérience qui consiste à tirer trois fois successivement avec remise une boule dans une urne contenant une proportion de boules blanches égale à p. Quelle est la probabilité de l'événement il y a exactement deux boules blanches ?

II. Schéma de Bernoulli

épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

Le dernier exemple est un cas particulier de succession de trois expériences aléatoires indépendantes ayant deux issues.

Définition 53
Une épreuve à deux issues est appelée épreuve de Bernoulli. La loi de probabilité choisie sur l'ensemble des deux issues est appelé loi de Bernoulli. On convient de nommer l'une des issues « succès » ,l'autre sera désignée par « échec ».

Schéma de Bernoulli

Définition 54
On appelle schéma de Bernoulli toute répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

On peut coder les issues d'un schéma de Bernoulli comme les branches d'un arbre ou des mots de n lettres choisies parmi les lettres S et E. Ainsi pour calculer le nombre d'issues réalisant un événement défini sur l'univers d'un schéma de Bernoulli, on pourra utiliser les résultats de dénombrement.

II.1. Exemple fondamental de variable aléatoire définie sur l'univers d'un schéma de Bernoulli : le nombre de succès- loi binomiale

Définition 55
La variable aléatoire X,définie par le nombre de succès lors de la réalisation d'un schéma de Bernoulli d'ordre n, la probabilité du succès étant nommée p, suit une loi de probabilité appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note$\mathscr{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n, p.

Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Théorème 79
Si X désigne une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors si k désigne un entier naturel,

— si $k > n$ alors $P(X=k)=0$

— si $k \leqslant n$ alors $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Démonstration : Considérons un schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétition et p est la probabilité du succès. Si k est un entier naturel strictement supérieur à n, l'événement « obtenir k succès ne peut être réalisé car le nombre de répétitions de l'épreuve est strictement inférieur à k. Supposons alors que $n \geqslant k$. Les issues réalisant l'événement $(X=k)$ sont les n-uplets comportant k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E. Ces $n-upets$ ont tous la même probabilité qui est $p^k(1-p)^{n-k}$. Il suffit de compter le nombre de $n-uplet$ réalisant l'événement $X=k$. Or, il y a $\binom{n}{k}$ de choisir les composantes du $n-uplet$ qui seront égales à S. Ainsi $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ □

III. Exercices

Capacités attendues

— Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.

— Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.

— Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.'

— Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X=k)$, $P(X\leqslant k)$, $P(k\leqslant X\leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X\in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1-\alpha$.

exercices

Exercice 362. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$,$P(1,3<X<3,5)$.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 363. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
0.92	0.06	0.016	0.004

   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 364. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$. Le passage « sans faute » d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Pour k entier compris entre 0 et 6, exprimer en fonction de k la probabilité de l'événement (X = k). En déduire l'espérance E(X) de X.
2. La durée du parcours est alors une variable aléatoire D. Exprimer D en fonction de X, puis calculer la durée moyenne E(D) du parcours.

Exercice 365. Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues parmi les trois boules extraites. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de l'urne, en remettant, après chaque tirage, la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours des trois tirages. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et son écart type.

d'après Baccalauréat 96

Exercice 366. Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1.

1. (a) Combien l'appareil peut-il fabriquer décodes distincts ? On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.
   (b) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. L'imprimante a été choisie au hasard dans un stock, qui est connu pour contenir cinq sortes d'imprimantes. Les imprimantes E_0 n'impriment que des « 1 ». Pour tout i de 1,2,3, les imprimantes E_i n'écrivent correctement que les i premiers éléments du code et les complètent par $4-i$ signes « 1 ». Les imprimantes E_4 fonctionnent correctement.
   On admet que pour tout i de $\{0, 1, 2, 3\}$, la probabilité pour qu'une imprimante utilisée soit de type E_i est 32.10^{-3}. Le code émis est indépendant de l'état de l'imprimante.
   (a) Calculer la probabilité $P(E_4)$.
   Pour la suite, C désigne l'événement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».
   (b) Calculer $P(C)$
   (c) Si le code imprimé est exactement celui qui a été émis par l'appareil, quelle est la probabilité que l'imprimante utilisée soit de typeE_2 ?

Exercice 367. Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse. Un robot les teste une par une jusqu'à ce que la pièce défectueuse soit détectée.

1. Le robot effectue le n -ième test dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse. Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tests effectués. On considère l'événement A_i : « la pièce défectueuse est détectée au i-ème test ». Déterminer la probabilité de A_i. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

2. La machine est réglée de façon à ne pas effectuer le dernier test dans le cas où seule la pièce défectueuse n'a pas été testée. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre des tests effectués. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de y. Comparer avec X.

Exercice 368. L'objet de cet exercice est de comparer l'efficacité de deux méthodes pour réaliser dans un délai très cours un contrôle médical sur 1000 personnes. Ce contrôle doit permettre de déterminer la présence (résultat +) ou l'absence (résultat -) d'une certaine maladie, dont on sait qu'elle atteint un individu donné avec la probabilité 0,01. L'origine des personnes est telle que l'on admet que les résultats des tests individuels sont deux à deux indépendants. Dans la méthode A, on analyse séparément les prélèvements effectués sur chaque personne, ce qui conduit à réaliser 1000 analyses. Dans la méthode B, on répartit d'abord les 1 000 personnes en n groupes de r personnes ($nr = 1\ 000$) ; on mélange les prélèvements effectués sur les r personnes d'un même groupe, et l'on analyse chacun de ces n mélanges. Si le résultat est positif pour un groupe, on analyse alors séparément le sang des r personnes qui composent le groupe.

1. Dans cette question, on établit un résultat qui sera utilisé à la question 3 pour comparer les méthodes A et B. Soit f la fonction numérique de variable réelle définie sur l'intervalle $[1;1000]$ par $f(x) = 10\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) < 1000$.
2. Dans cette question, on procède à l'étude de la méthode B.
   (a) Quelle est la probabilité p pour qu'un groupe soit négatif ? En déduire la probabilité q pour qu'il soit positif. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de groupes positifs. Donner en fonction de p et q la loi de probabilité et l'espérance de Y.
   (b) Soit X le nombre d'analyses réalisées avec la méthode B. Calculer en fonction de r l'espérance mathématique de X.
3. Dans cette question, on procède à la comparaison des méthodes A et B. On convient de remplacer $(0,99)^r$ par la valeur approchée $1 - \dfrac{r}{100}$. Donner la valeur approchée correspondante de $E(X)$ en fonction de r.Utiliser la question 1 pour indiquer les valeurs de r pour lesquelles la méthode B est plus efficace que la méthode A.

Exercice 369. Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention de la première boule blanche.

1. Dans cette partie, on effectuera au maximum quatre tirages. On appellera X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tirages nécessaires et suffisant à l'obtention de la première boule blanche, et, par convention, on notera X = 0 si les quatre tirages ont tous amené une boule noire.Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Dans cette partie, on effectuera au maximum n tirages. On appellera X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tirages nécessaires et suffisant à l'obtention de la première boule blanche, et, par convention, on notera X = 0 si les n tirages ont tous amené une boule noire.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) On considère le polynôme $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.
      i. Exprimer $E(X)$ à l'aide de f.
      ii. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Calculer $G(x) = 1 + F(x)$.
      Pour tout x différent de 1 exprimer $G(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle.

iii. On pose $\Gamma(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Calculer $\Gamma'(x)$. En déduire que

$$E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Fiche 2

Espérance et variance d'une somme deux variables aléatoires finies

I. Loi du couple formé par deux variables aléatoires finies X et Y

Étude d'un premier exemple dans le cas de l'indépendance de X et Y

Une urne est composée de 2 boules portant le numéro 1 et trois boules portant le numéro 2. Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir successivement et avec remise deux boules dans l'urne. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule. Le couple (X, Y) peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{(1;1)\ ;\ (1;2)\ ;\ (2;1)\ ;(2;2)\}$. La loi de ce couple est appelée loi conjointe des deux variables X et Y. On remarque que quelle que soit la valeur x_i de X et quelle que soit la valeur de y_j de Y, la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est le produit des probabilités des événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ en raison de l'hypothèse d'indépendance des tirages.

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 1) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$

$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1) \times P(Y = 2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2) \times P(Y = 1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$

$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$

On présente la loi de (X, Y) sous la forme su tableau suivant :

	$(X = 1)$	$(X = 2)$	
$(Y = 1)$	$4/25$	$6/25$	$2/5$
$(Y = 2)$	$6/25$	$9/25$	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Étude d'un deuxième exemple dans un cas de dépendance de X et Y

Une urne est composée de 2 boules portant le numéro 1 et trois boules portant le numéro 2. Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir successivement et SANS remise deux boules dans l'urne. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule. Le couple (X, Y) peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{(1;1)\ ;\ (1;2)\ ;\ (2;1)\ ;(2;2)\}$. La loi de ce couple est appelée loi conjointe des deux variables X et Y.

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \times P_{X=1}(Y = 1) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20}$

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)\times P_{X=1}(Y=2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{20}$
$P(X=2,Y=1)=P(X=2)\times P_{X=2}(Y=1)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{6}{20}$
$P(X=2,Y=2)=P(X=2)\times P_{X=2}(Y=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{6}{20}$

On résume la loi de (X,Y) sous la forme su tableau suivant :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	$2/20$	$6/20$	$2/5$
$(Y=2)$	$6/20$	$6/20$	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Le cas général

Définition 56
Si deux variables aléatoires finies X et Y sont définies sur le même univers Ω, on dit qu'elles sont indépendantes si quelles que soient x_i et y_j, $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$.

II. Loi de la somme de deux variables aléatoires finies

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, pour connaître la loi de la variable aléatoire $X+Y$, il est nécessaire de connaître la loi du couple (X,Y). Examinons le cas de deux exemples précédents.

Exemple 1 : somme de deux variables aléatoires Indépendantes

On reprend le tableau de valeurs précédent en écrivant en rouge les valeurs de $X+Y$ et en vert les probabilités :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	2 || $4/25$	3 || $6/25$	$2/5$
$(Y=2)$	3 || $6/25$	4 || $9/25$	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Cela permet de dresser le tableau donnant l aloi de probabilité de $X+Y$:

z_i	$(Z=2)$	$(Z=3)$	$(Z=4)$
$P(z=z_i)$	$4/25$	$12/25$	$9/25$

exemple 2 : somme de deux variables non indépendantes

On reprend le tableau de valeurs précédent en écrivant en rouge les valeurs de $X+Y$ et en vert les probabilités :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	2 ||2/20	3 || 6/20	2/5
$(Y=2)$	3 || 6/20	4 || 6/20	3/5
	2/5	3/5	1

Cela permet de dresser le tableau donnant l aloi de probabilité de $X+Y$:

z_i	$(Z=2)$	$(Z=3)$	$(Z=4)$
$P(z=z_i)$	2/20	12/20	6/20

III. Espérance de la somme de deux variables aléatoires finies

On va démontrer que l'espérance de la somme des deux variables aléatoires peut être connue sans connaître la loi du couple (X,Y), mais en connaissant seulement l'espérance de X et celle de Y.

Théorème 80
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration : Preuve dans le cas de deux variables aléatoires avec deux valeurs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i+y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)}\sum_{y_j\in Y(\Omega)} (x_i+y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)}\sum_{y_j\in Y(\Omega)} x_i\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) + \sum_{x_i\in X(\Omega)}\sum_{y_j\in Y(\Omega)} y_j\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i \sum_{y_j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) + \sum_{y_j\in X(\Omega)} y_j \sum_{x_j\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}((X=x_i)) + \sum_{y_j\in X(\Omega)} y_j\mathbb{P}((Y=y_j)) \\
&= \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

Généralisation à la somme de n variables aléatoires

Théorème 81
Si X_1,... X_n sont n variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(X_1+...+X_n)=\mathbb{E}(X_1)+...+\mathbb{E}(X_n)$$

Espérance d'une loi binomiale de paramètre n, p

Théorème 82
Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p alors $\mathbb{E}(X) = n \times p$

Démonstration : X est la somme de n variables X_i de Bernoulli de paramètre p, chacune d'espérance $\mathbb{E}(x_i) = p$ donc $\mathbb{E}(X) = p + \dots + p = np$ □

IV. Variance de la somme de deux variables aléatoires finies

On va démontrer que la variance de la somme de des deux variables aléatoires ne peut pas être connue sans connaître la loi du couple (X, Y),

Théorème 83
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}Y))^2 \\
&= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 + 2\mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)^2 - (\mathbb{E}Y)^2 - 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)
\end{aligned}$$

Variance de la somme de deux variables aléatoires finies INDEPENDANTES

Théorème 84
Si X et Y sont deux variables aléatoires Indépendantes définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i \times y_j)\mathbb{P}((X = x_i)\cap(Y = y_j)) \\
&= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i \times y_j)\mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} x_i \times y_j\mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X = x_i) \sum_{y_j\in Y(\Omega)} y_j\mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(Y) \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Théorème 85
La variance de deux variables aléatoires **indépendantes** est la somme des variances de ces deux variables aléatoires :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Démonstration : On sait déjà que :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right).$$

Puisque les deux variables sont supposées indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Donc

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Généralisation à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 57
Pour toute suite (X_n) de variables aléatoires sur un espace probabilisé **fini** Ω, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour toute famille finie $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'indices deux à deux distincts et toute famille associée $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ de réels vérifiant $x_{i_h} \in X_{i_h}(\Omega)$, pour tout $h \in \{1, k\}$, on dispose de l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1})\cap(X_{i_2} = x_{i_2})\cap\ldots\cap X_{i_k} = x_{i_k})) = \mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1})\mathbb{P}((X_{i_2} = x_{i_2})\ldots\mathbb{P}(X_{i_k} = x_{i_k}))$$

Théorème 86
La variance de la somme de n variables aléatoires définies sur un même espace fini Ω et **mutuellement indépendantes** est la somme des variances de chacune de ces variables aléatoires.

$$\mathbb{V}(X_1 + ... + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + ... + \mathbb{V}(X_n)$$

Démonstration : Admis □

Théorème 87
La variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p est

$$\mathbb{V}(X) = npq \text{ où } q = 1 - p$$

Démonstration : X est la somme de n variables X_i de Bernoulli de paramètre p, chacune de variance $\mathbb{V}(x_i) = pq$ et dont admet qu'elles sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{V}(X) = pq + ... + pq = npq$. □

Fiche 3

Probabilité- Approfondissements

I. Loi de Poisson

Exercice 370. On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\mathrm{E}(S_n)$ est égale à 10.
Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. (a) Établir l'égalité $\ln[\mathrm{P}(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-10}$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   (c) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.
   (d) Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathrm{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

II. Loi binomiale

Exercice 371. Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. (a) Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre $0,20$ et $0,21$.

   (b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

   Préciser l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

   (c) Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. (a) Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

   (b) Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

   (c) Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k} \left(\frac{7}{8}\right)^k \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\mathrm{P}_{13}.$$

   Calculer ce gain.

   (d) La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Exercice 372. Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

1. Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer espérance et variance de Z.

Fiche 4

Inégalité de concentration et loi faible des grands nombres

I. Expériences mutuellement indépendantes

Considérons une expérience aléatoire à deux issues que nous noterons « réussite », obtenue avec la probabilité p et « échec », obtenue avec la probabilité $q = 1 - p$. A une telle expérience, on fait correspondre la variable aléatoire X, qui prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité q. une telle variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Son espérance est p et sa variance pq.

Considérons alors une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X. On dit que (X_n) est un échantillon aléatoire de cette loi.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ désigne le nombre des variables X_i qui prennent la valeur 1, c'est à dire le nombre de celles des n expériences aléatoires successives envisagées qui débouchent sur un succès.
On sait que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p définie sur $\{0, ..., n\}$, et vérifiant, pour tout k de $\{0, ..., n\}$ l'égalité

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Son espérance est $\mathbb{E}(S_n) = np$ et sa variance $\mathbb{V}(S_n) = npq$.
La variable $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ prend pour valeur la proportion de réussites dans les n expériences faisant l'objet de l'étude.
Son espérance est :

$$\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} == \frac{np}{n} = p.$$

Sa variance est :

$$\mathbb{V}(F_n) = \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

On constate que l'espérance de F_n est la probabilité de réussite de chaque expérience et ne dépend pas du nombre d'expériences et que sa variance tend vers 0 quand le nombre d'expériences tend vers $+\infty$.

II. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Propriété 29
Pour tout variable aléatoire réelle X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admettant une espérance non nulle m, et pour tout réel strictement positif λ, on dispose de l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda m) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration : Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ où l'on suppose $0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$ et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Par définition,

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Si l'on restreint cette somme aux termes tels que $x_i \geqslant \lambda m$, on obtient puisque tous les termes de cette somme sont positifs

$$m \geqslant \sum_{x_i \geqslant \lambda m} x_i p_i \geqslant \lambda m \sum_{x_i \geqslant \lambda m} p_i = \lambda m \mathbb{P}(X \geqslant \lambda m).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 30
Pour tout variable aléatoire réelle X admettant une espérance m et une variance σ^2, et pour tout réel strictement positif ε, on dispose de l'inégalité

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Démonstration : La variable aléatoire $Y = (X - m)^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admet une espérance qui est la variance de X, σ^2. En lui appliquant l'inégalité de Markov, avec $\lambda = \dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$ on obtient

$$\mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\sigma^2\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}\left((X - m)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, les événements $(X - m)^2 \geqslant \varepsilon^2$ et $|X - m| \geqslant \varepsilon$ sont identiques, d'où le résultat. □

Le théorème d'or de Bernoulli

Propriété 31
Pour tout réel strictement positif ε, la probabilité $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ pour que , dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p, la fréquence F_n des succès s'écarte de ε du paramètre p est majorée par $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Démonstration : L'inégalité de Bienaymé appliquée à F_n donne

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Or $pq = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ donc

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Propriété 32
Pour tout réel strictement positif ε, la probabilité $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ pour que , dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p, la fréquence F_n des succès s'écarte de ε du paramètre p est tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La loi faible des grands nombres

Le théorème en or de Bernoulli est un cas particulier d'un résultat plus général connu sous le nom de loi faible des grands nombres que nous admettons

Théorème 88
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2. On pose $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors, $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

III. exercices

Exercice 373. D'après livre de Terminale D, Delagrave, 1967.
On jette un dé n fois de suite. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer à partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que la fréquence d'apparition du 6 sera comprise entre $\frac{9}{60}$ et $\frac{11}{60}$, **avec un risque d'erreur** inférieur à 0,1.

Exercice 374. D'après livre de Terminale D, Delagrave, 1967.
Admettons que le poids d'un oeuf d'une certaine variété de poules est une variable aléatoire (Ndr : le terme utilisé en 1967 est aléa numérique) de moyenne 60 grammes et d'écart type 10 grammes. On choisit 100 oeufs au hasard. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour montrer que, **avec un risque d'erreur** inférieur à 0,1, que la moyenne de l'échantillon sera comprise entre deux nombres que l'on déterminera.

Fiche 5

Exercices de probabilités

Exercice 375. Un lot de pièces mécaniques comporte $0,5\%$ de pièces non conformes. Quelle est la probabilité pour que, parmi 1500 pièces, il y ait au plus de 10 pièces non conformes ?

Exercice 376. Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ de pièces défectueuses. Le contrôle des pièces donne le résultats suivants :

— si une pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité $0,97$

— si une pièce est défectueuse, elle est refusée avec la probabilité $0,99$

1. Quelle est la probabilité que la pièce sortant de l'usine soit défectueuse ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
3. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait exactement 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
4. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait au plus 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
5. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait au moins 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
6. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait moins de 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
7. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait plus de 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
8. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait entre 10 et 15 au sens large erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?

Exercice 377. BAC 2021

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée* ;

— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d ?une fraction irréductible.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
   (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu ?elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
   Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l ?exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   (a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1−(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 378. Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 379. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

   a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **b.** $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

Exercice 380. Quelle est la probabilité qu'en jetant six dès équilibrés et discernables, toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

Exercice 381. Quelles sont les probabilités que, parmi les familles à n enfants, $n \geqslant 2$, une famille soit constituée d'enfants de deux sexes (événement A), puis de garçons et d'au plus une fille (événement B) ? Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$. les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 382. 1. Une urne contient M jetons numérotées de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.

2. Des étudiants au nombre de n sont réunis dans un amphithéâtre. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour (on suppose qu'un aucun n'est né un 29 février et que $n \leqslant 365$) ?

Exercice 383. Un joueur jette une pièce a priori non équilibrée (on note p la probabilité d'obtenir « Pile » lors d'un jet de la pièce) jusqu'à ce qu'il obtienne « Pile » ; si ceci se passe à la suite du k-ième jet, il lance k fois de suite un dé bien équilibré. Il gagne s'il obtient exactement un 6. On demande la probabilité pour que le joueur gagne à ce jeu.

Exercice 384. Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est définie par

$$p_0 = p_1 = a$$

et pour $k \geqslant 2$,

$$p_k = (1-2a)2^{-(k-1)}$$

où a est un réel strictement compris entre 0 et 1. On suppose de plus que la probabilité d'avoir un garçon ou une famille lors d'une naissance est la même.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

Exercice 385. Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2. Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile »dans un lancer est notée p, avec $0 < p < 1$.
Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi,

— si un joueur obtient « pile »au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer,

— s'il obtient « pile »au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1,

— s'il obtient « pile »au n-ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$,

— s'il n'obtient pas « pile »durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

Exercice 386. Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. La probabilité d'un évènement A est notée $\mathbb{P}(A)$.

1. (a) Vérifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
   (b) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j , j^2 ?

   (c) Montrer que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

2. On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F . Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(Z = j^2) = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère un entier $n \geqslant$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j^2$.
   (a) Déterminer $U_n + V_n + W_n$.
   (b) Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2W_n$.
   (c) Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.
   (d) En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.
4. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(U_n = m) = \dbinom{3m}{m}\dfrac{2^{2m}}{3^{3m}}$
   (c) On note $\mathbb{P}_(U_n = m(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$. Montrer que $P_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m}\dbinom{2m}{m}$
   (d) En déduire que $p_{3m} = 3^{-3m}\dbinom{3m}{m}\dbinom{2m}{m}$
   (e) Démontrer que $\dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \dfrac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$
5. Pour tout entier $m \geqslant 1$, montrer que $\dfrac{m}{m+1} \leqslant \dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geqslant \dfrac{2}{9m}$
6. Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $S_k = 0$.
   (a) Déterminer des variables de Bernoulli Y_k , avec $1 \leqslant k \leqslant n$, telles que $X_n = Y_1 + ... + Y_n$.
   (b) On note $E(X_n), E(Y_1), ..., E(Y_n)$ les espérances de X_n , Y_1 , . . . , Y_n .Montrer que $E(X_n) = p_1 + ... + p_n$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$.
7. Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leqslant k \leqslant n$, c'est-à-dire $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$. L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.
   (a) Montrer que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leqslant q \leqslant 1$ pour tout n.
   (b) Pour r , n entiers naturels non nuls, montrer que $\mathbb{P}(X_n \geqslant r) \leqslant q^r$.
   (c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $E(X_n) \leqslant q + q^2 + ... + q^n$.
   (d) Conclure.

Exercice 387. Soient $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur un ensemble Ω d'issues possibles et A et B deux événements. La proposition suivante est elle vraie ou fausse ?

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)).$$

Exercice 388. Une urne contient trois boules : une bleue, une blanche et une rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de cette dernière dans l'urne. pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on désigne par A_n l'événement « les $n-1$ premiers tirages ont donné la même boule, et la n-ième boule tirée est différente de celles tirées lors des $n-1$ premiers tirages ».

1. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(A_2)$,$\mathbb{P}(A_3)$,$\mathbb{P}(A_n)$
2. Calculer la limite de $\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ quand n tend vers $+\infty$.