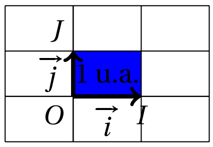
Thème 7 : Intégrale

Fiche 1

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Sesamaths

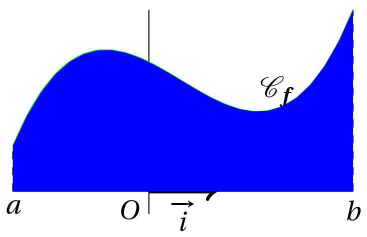


Définition 58
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.
L'unité d'aire , que l'on note u.a. est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 59
Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
L'intégrale de a à b de f est la mesure de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Cette aire se note $\int_a^b f(x)\,dx$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Remarques

— a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.

— La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

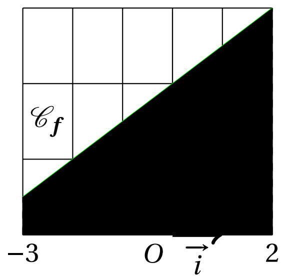
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

— Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.

— Le symbole $\int$ est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3;2]$.
Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

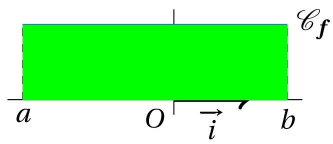
$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{0,5+3}{2} \times 5 = 8,75$$



Les unités graphiques étant 0,6 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente 0,6 cm^2 et donc l'aire coloriée représente 5,25 cm^2.

Exemple
Soit $f : x \mapsto 1$ définie sur $[a;b]$.
Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur 1. Ainsi :

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

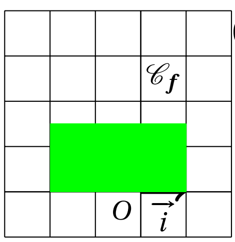


II. Exercices

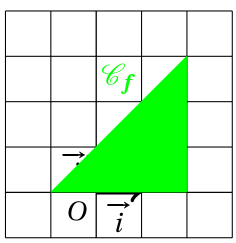
Exercice 389. Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1. l'expression de la fonction f représentée en rouge ;
2. la description du domaine coloré ;
3. l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;
4. l'aire de ce domaine, en u.a.

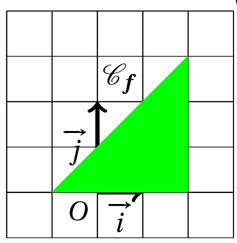
(a)



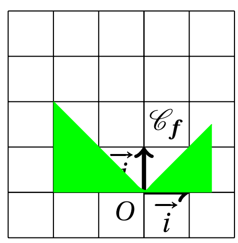
(b)



(c)



(d)

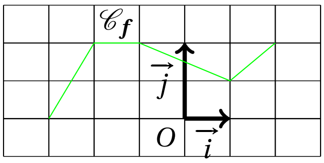


Exercice 390. Dans chacun des cas suivants :

1. représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée ;
2. décrire ce domaine ;
3. donner la valeur de son aire, en u.a.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{3,5} x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} (4-x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 391. Soit f une fonction continue sur $[-3\,;2]$ représentée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous :



Dans chacun des cas suivants, calculer :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Fiche 2

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 89
Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a;b]$ et on a $F' = f$.

Démonstration : On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.
Pour tout $x \in [a;b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;x]$.
Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a;b]$. On considère alors, pour tous $x \in [a;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a;b]$:

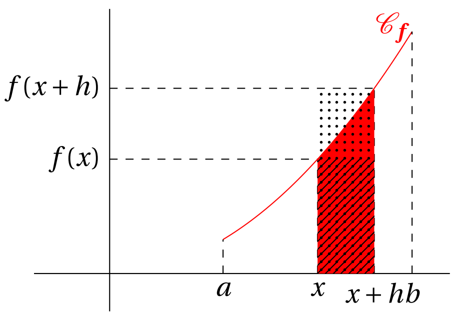
$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

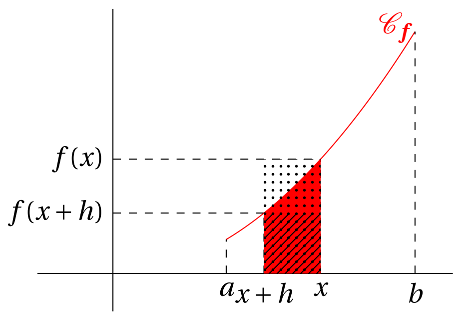
Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h)-F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x;x+h]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$f(x)h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant f(x+h)h \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x+h).$$

Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x)-F(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x+h;x]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$f(x+h)(-h) \leqslant F(x)-F(x+h) \leqslant f(x)(-h) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x+h) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x).$$





□

f étant une fonction continue, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas, d'après le théorème des gendarmes , on conclut que $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = f(x)$.

II. Exercices

Exercice 392. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie aussi sur $[a;b]$.

1. Déterminer $F'(x)$.
2. Étudier les variations de F sur $[a;b]$.

Exercice 393. Dans chacun des cas suivants :

1. donner un intervalle I sur lequel on peut appliquer le théorème ;
2. déterminer $F'(x)$, pour tout $x \in I$.

(a) $F : x \mapsto \int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t$

(b) $F : x \mapsto \int_2^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(c) $F : x \mapsto \int_{-5}^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(d) $F : x \mapsto \int_2^x |1-t|\,\mathrm{d}t$

(e) $F : x \mapsto \int_{-2}^x \ln|t|\,\mathrm{d}t$

Fiche 3

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Primitives d'une fonction continue

Définition 60
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque
On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple
Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F_1' = F_2' = f$.

Théorème 90 (Existence de primitives)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration : On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Soit f une fonction continue sur I et notons m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. D'après le théorème précédent, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.
Étant donné que l'on cherche une fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. □

Théorème 91 (Lien entre les primitives)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

— Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.

La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

— Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I. □

Propriété 33
Condition d'unicité de la primitive Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :

— **Existence :** soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

— **Unicité :** notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I. □

Remarque
Pour tout $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc *la* primitive de f sur I s'annulant en x_0. En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

Exercice 394. Utiliser les propriétés élémentaires des primitives Soient φ et ψ les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{x^3}{3}.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $[1\,;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 3$.

correction

1. (a) $f : t \mapsto t^2$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ donc d'après le théorème , φ est définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a $\varphi' = f$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$, $\psi'(x) = x^2$.
   (b) ψ est une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$ donc φ est de la forme $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ pour tout $x \geqslant 1$. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1) + k$ et donc $0 = \dfrac{1}{3} + k$, c'est-à-dire $k = -\dfrac{1}{3}$. On en déduit alors que pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \psi(x) - \dfrac{1}{3}$.
2. Les primitives de f sur $[1\,;+\infty[$ sont donc de la forme $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

   $F(1) = 3$ donc $\dfrac{1}{3} + k = 3$ donc $k = \dfrac{8}{3}$ et ainsi $F(x) = \dfrac{x^3 + 8}{3}$ pour tout réel $x \geqslant 1$.

Propriété 34
Calcul pratique d'une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

Démonstration : Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.
Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$.
Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$ et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

Exemple
On souhaite calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0;1]$.
En remarquant que $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0;1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

II. Exercices

Exercice 395. Soient φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que :
   (a) $F(0) = 0$
   (b) $F(1) = 0$

Exercice 396. Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les fonctions φ et ψ définies sur $[1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \psi(x) = x\ln(x) - x.$$

Pour les questions **2)a)** et **2)b)**, on prendra respectivement $F(1) = 0$ et $F(\mathrm{e}) = 0$.

Exercice 397. Même consigne qu'à l'exercice avec les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Pour les questions **2)a)** et **2)b)**, on prendra respectivement $F(1) = 1$ et $F(2) = 0$.

Exercice 398. Dans l'exercice précédent, la relation entre φ et ψ a été établie pour tout réel x strictement positif.

1. Pourquoi n'a-t-on pas pu établir la relation pour $x = 0$ alors que φ et ψ sont bien définies en 0 ?
2. Étudier le cas particulier $x = 0$.

Exercice 399. Soient $F : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+1}$ définies sur $I =]-\infty ; -1[$.

1. Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur I ?
2. Si oui, laquelle ?

Exercice 400. Même consigne avec les fonctions $F : x \mapsto \ln(7x)$ et $G : x \mapsto -\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$ définies sur $I =]0 ; +\infty[$.

Exercice 401. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1. En reconnaissant une forme connue de dérivée, déterminer une primitive H_1 de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout réel t, écrire $h(t)$ à l'aide d'un sinus.
   (b) À partir de cette forme, en déduire une primitive H_2 de h sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Représenter graphiquement H_1 et H_2. Ces deux fonctions sont-elles égales ?
   (b) Quelle est la constante qui les différencie ?
4. Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 402. Dans chacun des cas suivants :

1. déterminer les primitives de chacune des fonctions sur l'intervalle donné ;
2. déterminer la primitive F vérifiant la condition donnée.
   (a) $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 1$.
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1 ; +\infty[$ avec $F(2) = 0$.
   (c) $f : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
   (d) $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = \ln(2)$.

Exercice 403. Un mobile M se déplace de façon rectiligne sur un axe $(O ; \vec{i})$, gradué en cm. Son abscisse (en cm) et sa vitesse (en cm·s^{-1}) en fonction du temps $t \geqslant 0$ sont données par les fonctions $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ et $\vec{v} : t \mapsto v(t)$.

1. Rappeler le lien qu'il existe entre $\vec{v}$ et $\vec{x}$.
2. On sait que $\vec{v}(t)$ est donné par $\vec{v}(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t + 1\right)\vec{i}$ et qu'à l'instant $t = 1$ s, le mobile est à 2 cm de l'origine.
   (a) Déterminer $\vec{x}(t)$.
   (b) Quelle est alors sa position à $t = 0$ s ?
   (c) Quand le mobile repasse-t-il par l'origine ? Quelle est alors sa vitesse ?

Fiche 4

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I.

Propriété 35
Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$	$F(x)=-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 404. Déterminer des primitives simples sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x)=x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x)=\dfrac{6}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$
3. $h(x)=\dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

correction

1. f est une fonction de degré 2, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 3.
   Or $(x^3)' = 3x^2$.
   On écrit alors $f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
2. g est du type $\frac{1}{x^3}$, continue sur $]-\infty;0[$, une primitive sera donc du type $\frac{1}{x^2}$.
   Or, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.
   On écrit alors $g(x) = (-3) \times \frac{-2}{x^3}$ et les primitives de g sur $]-\infty;0[$ sont définies par :
$$G(x) = -\frac{3}{x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
3. h est du type $\frac{1}{x}$, continue sur $]0;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.
   Or, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
   On écrit alors $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ et les primitives de h sur $]0;+\infty[$ sont définies par :
$$H(x) = \frac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Propriété 36 (Primitives et opérations sur les fonctions)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

Exercice 405. Déterminer des primitives sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de f, la fonction u, ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

correction

1. f est du type $u'u^3$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type u^4.
   Or, $\left((2x-1)^4\right)' = 4\times 2\times(2x-1)^3 = 8(2x-1)^3$.
   On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{8}\times 8(2x-1)^3$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
   $$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + k,\, k\in\mathbb{R}.$$
2. g est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-1$, $u(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.
   Or, $\left(\ln(x^2-1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2-1}$. On écrit alors $g(x) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}$ et les primitives de g sur $]1\,;+\infty[$ sont définies par :
   $$G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + k,\, k\in\mathbb{R}.$$
3. h est du type $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, $u(x) \neq 0$ sur I, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{u}$.
   Or, $\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)' = -\dfrac{2}{(2x-1)^2}$. On écrit alors $h(x) = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ et les primitives de h sur I sont définies par :
   $$H(x) = -\frac{1}{2(2x-1)} + k,\, k\in\mathbb{R}.$$

II. Exercices

Exercice 406. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 407. Même consigne qu'à l'exercice précédent

1. $f : x \mapsto x^5 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{4x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 408. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{7}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto x^{-4} + 8x^4$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 409. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty\,;0[$

Exercice 410. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 411. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
3. $f : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ sur $]1\,;+\infty[$

Exercice 412. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Fiche 5

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

I. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu dans les fiches précédentes que, pour une fonction continue et positive sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$. On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a;b]$ avec la définition ci-dessous.

Définition 61
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a;b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple
On souhaite calculer $\int_{-1}^{2} (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur $I = [-1;2]$. Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\right) = -3.$$

Remarques
- Pour toute fonction f continue en a, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 413. Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère l'intégrale $I = \int_\alpha^\beta \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire une valeur de I.
3. En particularisant α et β, vérifier le résultat obtenu à la question 2) l'exercice

Exercice 414. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2} \, \mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2-1}{x} \, \mathrm{d}x$

Exercice 415. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2 \, \mathrm{d}u$
3. $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 416. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$

Exercice 417. Après avoir rappelé la formule de duplication donnant $\sin(2t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 418. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x+5} \, \mathrm{d}x.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ?
2. Démontrer que pour tout $x \neq -5$, $\dfrac{2x-1}{x+5}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x+5}$, où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 419. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1} \, \mathrm{d}x.$$

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$
où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 420. On souhaite calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas la calculer directement ?
2. Première méthode.
   (a) En remarquant que $1 = e^x + 1 - e^x$, décomposer I en deux intégrales calculables.
   (b) Calculer chacune des deux intégrales et en déduire que $I = -\ln(e+1) + \ln(2) + 1$.
3. Seconde méthode.
   (a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{e^x+1}$ par e^{-x} puis calculer I.
   (b) Vérifier que les résultats, malgré leur forme apparemment différentes, sont bien égaux.

Exercice 421. En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de :
$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,dt.$$

Exercice 422. Calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,du.$$

Exercice 423. On souhaite calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt.$$
On pose $f : t \mapsto t\cos(t)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout réel t :
$$f(t) = -2\sin(t) - f''(t).$$
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 424. On souhaite calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_{-5}^1 xe^x\,dx.$$
On pose $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(x)$.
2. En déduire la valeur de I.

Fiche 6

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

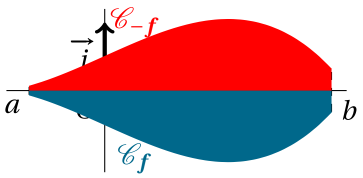
Propriété 37
Linéarité de l'intégrale Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel. Alors :

— $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$ — $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration : Voir exercice. □

Propriété 38 (Fonction négative et aire)
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$ est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On note $\mathscr{D}$ le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[a;b]$.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{E}$, compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$. Ainsi :



$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Exemple
Utiliser la linéarité de l'intégrale Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?
2. Calculer $I+J$ et $I-J$.
3. En déduire les valeurs respectives de I et J.

correction

1. Aucune des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.

2. Par linéarité de l'intégrale, on a :
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$
De même :
$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$
On reconnaît ici une dérivée de la forme $\frac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$. Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a :
$$I-J=-\Big[\ln(\sin(x)+\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$
3. On doit résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} I+J &= \frac{\pi}{2} \\ I-J &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2I &= \frac{\pi}{2} \\ I &= J \end{cases} \iff I=J=\frac{\pi}{4}$$

I. Exercices

Exercice 425. On note F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a;b]$.

1. Démonstration du premier point.
   (a) Donner une primitive de la fonction $f+g$ sur $[a;b]$.
   (b) En utilisant la définition, en déduire une expression de $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de F et G.
   (c) Faire de même avec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   (d) Comparer les résultats.
2. Démonstration du second point.
   (a) Pour tout réel λ, donner une primitive de la fonction λf sur $[a;b]$.
   (b) Démontrer l'égalité.

Exercice 426. On considère les deux intégrales :
$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x \qquad J=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$
1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 427. Même consigne avec les intégrales :
$$I=\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad J=\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 428. On considère les deux intégrales suivantes :
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$
1. De ces deux intégrales, l'une est calculable facilement : la calculer.
2. Calculer $I+J$.
3. En déduire la valeur de l'autre intégrale.

Fiche 7

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- relation de Chasles

Propriété 39
Relation de Chasles Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle. Notons F une primitive de f sur I.
Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

— $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$ par définition.

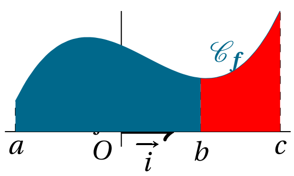
— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie. □

Remarque

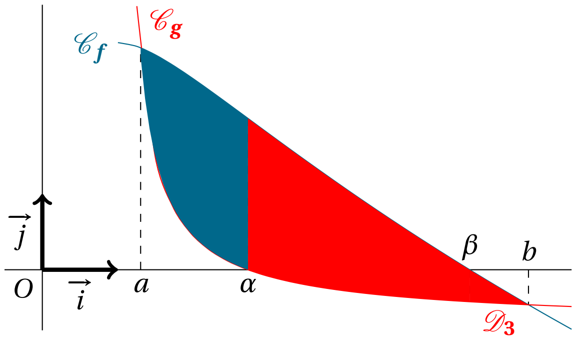
Lorsque f est positive et continue sur $[a;c]$ et que $b \in [a;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} + \mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{A}_{\text{totale}}.$$



Propriété 40
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On distingue trois cas, selon que les fonctions sont toutes les deux positives, de signes contraires ou toutes les deux négatives :



— Premier cas.
L'aire de $\mathscr{D}_1$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;\alpha]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Deuxième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_2$ est la somme de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Troisième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_3$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta;b]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_3} = \int_\beta^b (-g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_\beta^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines. □

Exemple
Calculer une aire entre deux courbes

1. Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2. Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

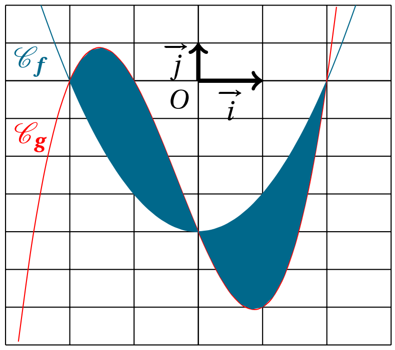
Exercice 429. Soient $f : x \mapsto x^2-4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2;2]$.

correction

1. On calcule la différence $f(x)-g(x) = x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a :

$f(x)-g(x)=(x^2-4)(1-x-1)=-x(x^2-4)$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $I=[-2;2]$ en deux sous-intervalles $I_1=[-2;0]$ et $I_2=[0;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

2. Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=\displaystyle\int_{-2}^{0}x(x^2-4)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}-x(x^2-4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.
   D'une part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0}=\dfrac{(-4)^2}{4}-\dfrac{0^2}{4}=4$.
   D'autre part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}=\dfrac{0^2}{4}-\dfrac{(-4)^2}{4}=-4$.
   Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}=8$ u.a.

I. Exercices

Exercice 430. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,;b]$ et soit c, un réel appartenant à $[a,;b]$.
Énoncer la relation de Chasles puis la démontrer.

Exercice 431. Soit f définie sur $I=[-1;1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur I.

Exercice 432. Même consigne avec f définie sur $I=[0;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1\leqslant x\leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{2} & \text{si} \quad 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

Fiche 8

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue-
Intégrales et inégalités

Propriété 41
Intégrales et inégalités Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

— Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

— Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : Voir exercice □

Remarques
Les réciproques de chacun des points de cette propriétés sont fausses.

— Par exemple $\displaystyle\int_0^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction $x \mapsto x^2-1$ n'est pas positive sur $[0;2]$: l'image de 0 est -1.

— De même, $\displaystyle\int_0^2 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ puisque $2 \leqslant \dfrac{8}{3}$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0;2]$.

Exemple
Encadrer une intégrale Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geqslant 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $0 \leqslant F(a) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

correction

1. Une exponentielle étant toujours positive, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$. De plus, si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$, c'est-à-dire $-x \geqslant -x^2$ et donc $\mathrm{e}^{-x} \geqslant f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
   On en déduit donc que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1;a]$ et ainsi :
$$\int_1^a 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant F(a) \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a.$$
   Cette dernière quantité est égale à $-\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

I. Exercices

Exercice 433. 1. Le premier point provient de la définition de l'intégrale. Expliquer pourquoi.

2. Pour démontrer le second point, on considère la fonction $h = g - f$ définie sur $[a;b]$. Appliquer le premier point à h puis conclure.

Exercice 434. On considère $I = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer un encadrement de la fonction à intégrer, sur $[0;\pi]$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale I.

Exercice 435. On considère $I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:
$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$
2. En déduire un encadrement de I.

Exercice 436. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{x\mathrm{e}^x}$ sur $[1;+\infty[$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[n;n+1]$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de u_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 437. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 438. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent , déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par :
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 439. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante.

2. (a) Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$
   (c) Expliquer les égalités suivantes :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_{n+1} - 1.$$
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 440. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que (I_n) est décroissante.
2. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, démontrer que :
$$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{x+1} \leqslant x^n.$$
   (b) Pour tout $n \geqslant 0$, en déduire un encadrement de I_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (I_n).

Exercice 441. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.
   (c) Que peut-on en déduire sur (I_n).
2. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire le signe de $f(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
   (c) En déduire la limite de (I_n).

Fiche 9

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- Valeur Moyenne d'une fonction

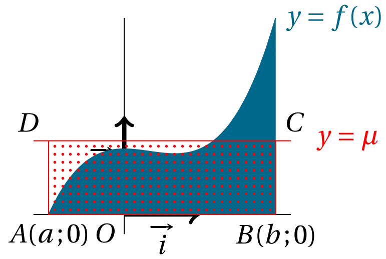
Définition 62
Valeur moyenne Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a;b]$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Exemple
Pour connaître la valeur moyenne de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0;\pi]$, on calcule :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Remarques
— En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a;b]$.
— En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2.

I. Exercices

Exercice 442. Valeur moyenne d'un signal On souhaite calculer la valeur moyenne sur une période de deux types de signaux périodiques.

1. On considère un signal purement sinusoïdal. La fonction le représentant peut se mettre sous la forme $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où u_0 est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ la phase à l'origine.
   (a) Rappeler la plus petite période de la fonction cos.
   (b) Soit T la plus petite période de u. En écrivant que pour tout réel t, $u(t+T) = u(t)$, en déduire une expression de T en fonction de ω.
   (c) Déterminer une primitive de u sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire la valeur moyenne du signal v sur l'intervalle $[a\,;a+T]$.
2. On considère la fonction v suivante, représentant un signal triangulaire de période T, où a est un réel :

$$v(t) = \begin{cases} -a\left(\dfrac{4t}{T}+1\right) & \text{si} \quad -\dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant 0 \\ a\left(\dfrac{4t}{T}-1\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \end{cases}.$$

   (a) Représenter graphiquement v pour $a = 1$ et $T = \pi$.
   (b) Quelle semble être la valeur de l'intégrale de v sur l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\dfrac{T}{2}\right]$?
   (c) Le démontrer dans le cas général.

Exercice 443. Valeur efficace d'un signal Si f représente un signal, la valeur efficace f_{eff} de f est par définition la racine carrée de la moyenne sur une période de f^2. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de f.

1. Traduire par une formule la phrase décrivant le calcul de f_{eff}.
2. On reprend les fonctions de l'exo
   (a) Démontrer que la valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal est $u_{\text{eff}} = \dfrac{u_0}{\sqrt{2}}$.
   On pourra utiliser une formule de réduction de $\cos^2(x)$ pour la détermination d'une primitive.
   (b) Démontrer que la valeur efficace du signal triangulaire est $v_{\text{eff}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Remarque
Physiquement, l'intensité efficace d'un courant alternatif i est égale à l'intensité du courant continu dissipant la même énergie que i à travers une résistance sur une période T.

Fiche 10

Analyse-Intégrale
Intégrale d'un produit de fonctions à dérivées continues - Intégration par parties

I. Intégration par parties

Théorème 92
Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur $[a, b]$ et à dérivées continues u' et v' sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple

$$\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 1 \times \ln(x)\mathrm{d}x = [x \times \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1$$

Exercice 444. On admet que la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x)$ est $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Soit n un entier naturel, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_2 et I_3.

correction

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^0}\mathrm{d}x = 1$ et $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^1}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
2. Posons pour n entier non nul, $\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = 1 \\ v(x) = (x^2+1)^{-n} & v'(x) = -n \times 2x(x^2+1)^{-n-1} \end{cases}$

   Alors
$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$I_n - 2nI_n = \frac{1}{2^n} - 2nI_{n+1}$$

$$(1-2n)I_n - \frac{1}{2^n} = -2nI_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

3. $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

II. Exercices

Exercice 445. Calculer les intégrales $A = \int_0^4 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 446. Calculer les intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t^2)\sin t\,\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e (3x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 447. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$

Exercice 448. Calculer $A = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

Exercice 449. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(3x)\mathrm{d}x$

Exercice 450. Calculer $A = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 451. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\mathrm{d}x$

Exercice 452. Calculer $A = \int_0^2 (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Exercice 453. Calculer $A = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 454. Calculer $A = \int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x$

Fiche 11

Analyse-Intégrale
Intégrale -Exercices de synthèse

Exercice 455. Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :
$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,
$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$
   (b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
   Quelle est alors la fonction g ?
2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :
$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$
   (b) Résoudre (F).
   (c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).
   (d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,
$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \; f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

(b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

(a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

(b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

(c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

(d) En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 456. On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R}$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   (a) On pose $I_n = \int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

   (b) Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n+1}$.

   (e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 457. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le sens de variations de cette suite.

   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

   (c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Étudier le sens de variations et le signe de f.

   (b) En déduire le sens de variations de g sur $[0\,;\,1]$.

   (c) Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

   (d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

   (e) Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

   (f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Fiche 12

Analyse-Intégrale
Intégrale - Approfondissements

I. Changement de variables

Théorème 93
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et, φ une fonction dont la dérivée est continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans I alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Remarque
Dans la pratique, on pose $t=\varphi(x)$ et $\mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x$, puis il faut penser à transformer

— les bornes de l'intégrale
— l'expression de la fonction
— l'élément différentiel $\mathrm{d}t$.

Exemple
Pour calculer $I=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.
On pose $t=\sin(x)$ alors $\mathrm{d}t=\cos(x)\mathrm{d}x$.

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin(x))^2}\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x$$
$$I=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 458. exploiter la périodicité et les symétries de la courbe
Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$. **correction** La fonction $f \ : \ x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$ est impaire et périodique de période 2π. Posons $t=2\pi-x$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^0 f(2\pi-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = -I$$

donc $I=0$

Exercice 459. se ramener à une primitive connue Calculer $\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ avec $a>0$. **correction** Posons $t=\frac{x}{a}$, donc $x=at$

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{a^2t^2+a^2}a\mathrm{d}t$$

donc
$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[\arctan(t)\right]_0^1$$
donc
$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a}$$

II. Comparaison de suites

II.1. Suite dominée par une autre

Définition 63
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **dominée** par (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ est borné.
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant M$$
On note $y_n = \mathcal{O}(x_n)$. Lire : y_n est un **grand O** de x_n

Exemple
$n\sin(n) = \mathcal{O}(n)$

II.2. Suite négligeable devant une autre

Définition 64
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **négligeable** devant (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 0.
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant \varepsilon$$
On note $y_n = o(x_n)$. Lire : y_n est un **petit o** de x_n.

Exemple
$n\sin(n) = o(n^2)$

II.3. Suites équivalentes

Définition 65
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **équivalente** à (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 1.
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{y_n}{x_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$
On note $y_n \sim x_n$. Lire : y_n est équivalent à x_n.

Exemple
$\sqrt{n^2+1} \sim n$

Théorème 94
Soit (x_n) une suite de réels non nuls et (y_n) une suite réelle,

$$y_n \sim x_n \Longleftrightarrow y_n - x_n = o(x_n) \Longleftrightarrow y_n - x_n = o(y_n)$$

Fiche 13

Analyse-Intégrale
Intégrale -Exercice Approfondissements

problème de max Hochart. On étudie ici les intégrales de Wallis définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$. On établit ensuite des résultats classiques à l'aide de ces intégrales : calcul de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et démonstration de la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

.1. Etude des intégrales de Wallis

1. Calculer W_n pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Prouver que $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$ et retrouver W_2 sans calcul.Changement de variable.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Intégration par parties.
   Donner W_4 et W_5.

.2. Calcul de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$.

1. (a) Calculer J_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
   $$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{2n+2}.$$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $W_n > 0$ et que
   $$\frac{J_{n+1}}{W_{2n+2}} - \frac{J_n}{W_{2n}} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n en fonction de $\frac{J_0}{W_0}$ et $\frac{J_n}{W_{2n}}$.
2. (a) Prouver que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
   $$t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t.$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2}) = \frac{\pi^2}{8}\frac{W_{2n}}{n+1}.$$

(b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite, notée $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$.

.3. Intégrale de Gauss

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Etudier la monotonie de F. Montrer que F est majorée, en remarquant que pour $t \geqslant 1$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$. Conclure que F admet une limite en $+\infty$ notée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, prouver que
   $$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
   On note
   $$A_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$
   (b) En posant $t = \sqrt{n}\cos u$, montrer que
   $$A_n = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$
   (c) En posant $t = \sqrt{n}\tan u$, montrer que
   $$B_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$
   (d) Justifier l'encadrement
   $$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant F(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}.$$
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir
   $$W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n.$$
   En déduire
   $$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}.$$
   (b) Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.
   (c) Déduire de (a) et (b) l'équivalent
   $$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
4. Déduire de tout ce qui précéde la valeur de l'intégrale de Gauss.

.4. Expression des intégrales de Wallis, formule de Wallis

1. Avec A3, montrer que, pour $p \in \mathbb{N}$,
   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{\pi}{2^{2p+1}} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}2^{2p}.$$
2. En utilisant C.3.1 , montrer que
   $$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{2^{4p}\,p!^4}{(2p)!^2\,p}\right) = \pi.$$

.5. Utilisation du développement en série entière de $\ln(1+x)$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et x dans $]0;+\infty[$.

1. Montrer que : pour tout $t \in [0,x]$,
$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + (-1)^m \frac{t^{m+1}}{1+t}$$
2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^m \int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t} \mathrm{d}t$$
Puis que :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t} \mathrm{d}t$$
3. En déduire (en passant) que si $0 \leqslant x \leqslant 1$
$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$$
4. Écrire l'égalité obtenue au 2) pour $m = 2$ et démontrer que : Pour tout x réel vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

.6. Démonstration de la formule de Stirling

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$. Montrer que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$
2. Montrer que
$$-\frac{1}{24n^4}(2n^2 - 2n - 3) \geqslant \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant -\frac{1}{4n^2}.$$
3. En déduire que la suite $\left(T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
Simplifier T_n pour conclure que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
4. En utilisant cet équivalent dans D2, démontrer la formule de Stirling.