Sommaire

Thème 1

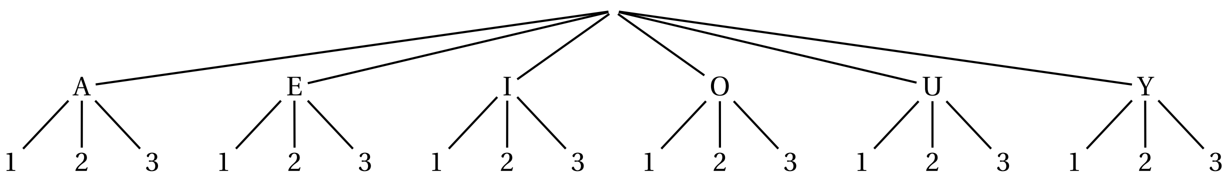
Fiche 1

Dénombrement
Activités préparatoires

Le principe multiplicatif

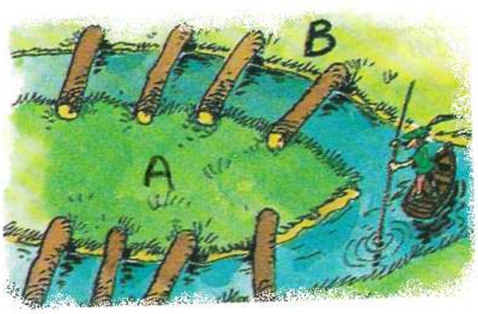
Considérons l'exemple suivant : un code est formé d'une voyelle, suivie de l'un des chiffres 1, 2, ou 3. Pour dénombrer tous les codes possibles, on peut avoir recours à un tableau ou à un arbre.

Lettre / Chiffre	A	E	I	O	U	Y
1	$A1$	$E1$	$I1$	$O1$	$U1$	$Y1$
2	$A2$	$E2$	$I2$	$O2$	$U2$	$Y2$
3	$A3$	$E3$	$I3$	$O3$	$U3$	$Y3$



L'arbre montre clairement que le choix de la lettre offre 6 possibilités, et que, pour chaque choix de la lettre, il y a 3 façons de choisir le chiffre. Il y a donc 6×3 soit 18 codes possibles.
C'est le **principe du produit** ou **principe multiplicatif**.

Exercice 1. Combien de trajets ?



En appliquant le principe multiplicatif, dénombrer les trajets permettant d'aller de A en B, puis de revenir en A sans jamais passer deux fois sur le même pont.

Exercice 2. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments
Pour définir une partie de cet ensemble, il suffit de connaître, pour chaque élément, la réponse (OUI ou NON) à la question : « Appartient-il à cette partie ? ».
À l'aide du principe multiplicatif, déterminer le nombre de parties de cet ensemble.

Exercice 3. Nombre de façons d'ordonner un ensemble
Montrer que le nombre de façons de ranger les cinq lettres : N, A, C, R, E est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.
Ce nombre est noté $5!$ et se lit « factorielle 5 ».

Mots, listes, parties

Soit l'ensemble $\mathscr{E} = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\}$.
L'objet des exercices suivants est de dénombrer :

- les MOTS de 3 lettres, comme FEE, ABA, FFB, CAC, ..., encore appelés « 3-listes de $\mathscr{E}$ » ;
- les MOTS de 3 lettres distinctes, comme BAC, ABC, FAC, DEA, ..., encore appelés « arrangements de 3 lettres de $\mathscr{E}$ » ;
- les PARTIES à 3 éléments comme $\{A,\ B,\ F\}$, $\{D,\ C,\ F\}$, ..., $\{A,\ F,\ B\}$.
  On observe que les parties à 3 éléments se distinguent des mots de 3 lettres distinctes par le fait que l'*ordre* n'intervient pas lorsque l'on écrit les éléments d'une partie.

Exercice 4. Mots de 3 lettres
À l'aide du principe multiplicatif, montrer qu'il y a 6^3 mots de 3 lettres.

Exercice 5. Mots de 3 lettres distinctes
Toujours à l'aide du principe multiplicatif, montrer que le nombre de mots de 3 lettres distinctes est $6 \times 5 \times 4$. Un tel nombre sera noté A_6^3.

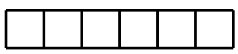
Exercice 6. Parties à 3 éléments
On note $\binom{6}{3}$ et on lit 3 parmi 6 le nombre de parties de $\mathscr{E}$ ayant 3 éléments.
En dénombrant les rangements possibles de 3 lettres données, montrer que :

$$A_6^3 = (3 \times 2 \times 1) \times \binom{6}{3}$$

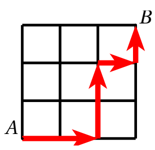
En déduire la valeur de $\binom{6}{3}$.

Autres exemples de dénombrement

Exercice 7. Combien de mots de six lettres peut-on écrire en utilisant 3 lettres « D » et 3 lettres « H » ?
Indication : Combien de façons a-t-on de choisir les trois cases où l'on écrit la lettre « D » ?

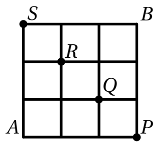


Exercice 8. Trajectoires
Combien de trajectoires vont de A en B en suivant le quadrillage ? (On considère uniquement les trajectoires les plus courtes, c'est-à-dire sans retour en arrière).



a) *Méthode 1*
Se ramener à l'exercice précédent, en codant les trajectoires à l'aide de D (« droite ») et H (« haut »). (Le trajet ci-dessus serait codé DDHHDH.)

b) *Méthode 2*
Dénombrer ces trajectoires par un calcul direct, en les triant, selon qu'elles passent par l'un des points P, Q, R, S (cette méthode de tri est appelée **méthode de la somme**).



Exercice 9. Un faux « Vrai/Faux »

Un « Vrai/Faux » propose 6 questions. Combien y a-t-il de réponses possibles à l'ensemble du questionnaire ?

a) *Méthode 1*
À l'aide du principe multiplicatif.

b) *Méthode 2*
En triant les réponses possibles en fonction du nombre de « Vrai ».

c) Déduire des deux méthodes précédentes la relation :

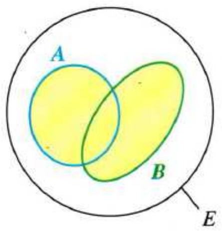
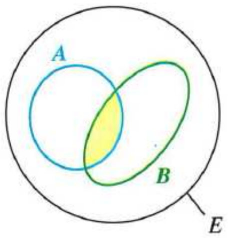
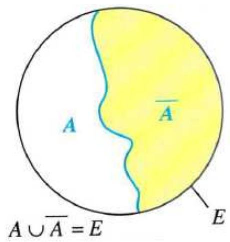
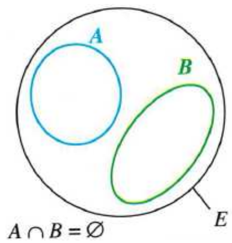
$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6$$

Fiche 2

Dénombrement
Principes de dénombrement

I. Langage des ensembles

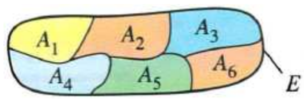
I.1. Parties d'un ensemble

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E	A et B sont disjoints
			

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E (y compris $\varnothing$ et E).

Définition 1

Les parties A_1 , . . ., A_p d'un ensemble E constituent une **partition** de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.



I.2. Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2
Le **produit cartésien** des ensembles E et F est l'ensemble des couples $(a,\ b)$, où a appartient à E, et b à F. On le note $E \times F$.

Exemple
Ainsi, si $E = \{a,\ b,\ c\}$ et $F = \{l,\ 2\}$, on a :
$$E \times F = \{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (c,\ 1),\ (c,\ 2)\}.$$
On généralise cette notion à n ensembles ($n \geqslant 2$) en faisant intervenir des n-uplets.
Le n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n)$ est une suite finie ; on dit parfois « mot de longueur n » et on le note alors $a_1 a_2 \dots a_n$.

I.3. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 3
Si un ensemble E est fini et contient n éléments, ce nombre est appelé le **cardinal** de E. On note $Card(E) = n$, en convenant que $Card\varnothing = 0$.

II. Principes de dénombrement

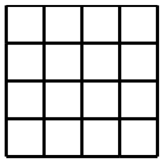
II.1. Principe de la somme

Règle 1
Si $A_1, \ldots, A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E, alors :

$$Card(E) = Card(A_1) + \cdots + Card(A_p).$$

Nous admettons ce résultat conforme à l'intuition.

Exemple



Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ? Soit E l'ensemble de tous ces carrés. On note A_1 ,A_2, A_3, A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3, 4 petits carreaux. Les sous-ensembles A_1 ,A_2, A_3, A_4 constituent une partition de E, donc $Card(E) = 16+9+4+1 = 30$.

Propriété 1
A et B sont deux parties d'un ensemble fini E.

- Si A et B sont disjointes, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
- Dans tous les cas, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$.

Démonstration : Voir exercice 1 □

II.2. Principe du produit

Règle 2
Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités, où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i, alors le nombre total d'issues est :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Remarques

— La règle 2 n'exige pas l'indépendance des étapes, mais seulement l'indépendance du nombre de possibilités offertes à chaque étape, comme dans l'exemple qui suit.

— Cette règle légitime le dénombrement à l'aide d'un arbre.

— Le cardinal d'un produit cartésien en découle immédiatement :

$$Card(E_1 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times \cdots \times Card(E_p).$$

Exemple
Un code comporte deux lettres distinctes et un chiffre autre que 0. Combien peut-on former de codes distincts ?
Les 3 étapes : choix de la première lettre, de la deuxième lettre, du chiffre, offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9$.

Exercices

Ensemble, cardinal

Exercice 10. A et B sont deux parties d'un ensemble fini E. À partir de la règle de la « partition », établir la propriété :

a) Si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

b) Dans tous les cas, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

c) $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$.

Exercice 11. Dans un camp de vacances Hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 personnes ne pratiquent aucun de ces sports.
Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Exercice 12. 1. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Prouver que :
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

2. Application : Sur 100 maisons que comporte le village, on a relevé 88 maisons équipées d'un téléviseur, 90 équipées d'un lave-linge et 94 équipées d'un réfrigérateur. Combien y a-t-il, au minimum, de maisons qui sont équipées de ces trois appareils ménagers ?

Principes de la somme et du produit

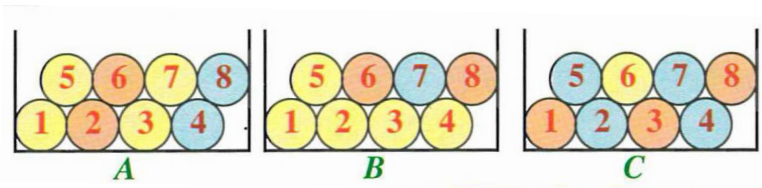
Exercice 13. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec un alphabet de 26 lettres :

a) en admettant une répétition des lettres ?

b) sans lettre « double » ?

Exercice 14. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes suivies de deux chiffres distincts ?

Exercice 15. On considère la situation suivante :



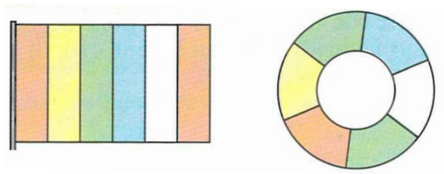
Un tirage consiste à prélever une boule dans chaque urne.

1. Dénombrer les tirages possédant la caractéristique indiquée.
   (a) 3 boules jaunes.
   (b) 3 boules de même couleur.

   (c) 2 boules jaunes, exactement.
   (d) 2 boules de même couleur (exactement).
   (e) Trois boules de couleur différente.
   (f) Trois nombres pairs.
   (g) Trois nombres consécutifs.
   (h) La somme des points est 10.

2. Quelle est la somme de points la plus fréquemment obtenue ?

Exercice 16. On dispose de 5 couleurs pour, colorier le drapeau et la bouée dessinés ci-dessous, deux zones voisines, ne pouvant recevoir la même couleur.



Dénombrer, dans chaque cas, les coloriages possibles.

Exercice 17. Dans un département donné de province, un numéro d'immatriculation de voiture est composé d'un entier compris entre 1 et 9 999 suivi de deux lettres (autres que I et 0). Combien peut-on construire de tels numéros ?

Fiche 3

Dénombrement
p-listes d'un ensemble fini

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992

I. p-listes « avec répétition »

Définition 4
Une p-liste (ou liste de longueur p) d'un ensemble E est un p-uplet (ou suite de longueur p, ou mot de longueur p) d'éléments de E. C'est un élément du produit cartésien $E^p = E \times \cdots \times E$ (p facteurs).

- Ainsi, le mot *ananas* est une 6-liste de $E = \{a,\ b,\ c, \dots,\ y,\ z\}$.
- On précise parfois : p-liste « avec répétition » par opposition aux arrangements évoqués au paragraphe suivant.

Théorème 1
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p.

Démonstration : Ce résultat découle immédiatement de la règle 2 (principe multiplicatif). □

II. Arrangements - Permutations

Définition 5
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.
Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemples

1. Les entiers de trois chiffres s'écrivant à l'aide de trois chiffres impairs tous distincts sont les arrangements de trois éléments de $E = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$. Leur nombre est $5 \times 4 \times 3$ (5 possibilités pour le premier chiffre, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième).
2. Les anagrammes du mot *sucre* (mots, ayant un sens ou non, écrits en modifiant l'ordre des cinq lettres *s, u, c, r, e*) sont les permutations de l'ensemble $E = \{s,\ u,\ c,\ r,\ e\}$. Leur nombre est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Théorème 2
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :
$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) \text{ (p facteurs).}$$
Le nombre de permutations de E est :
$$n! = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Démonstration : Ce résultat découle immédiatement de la règle 2 (principe multiplicatif). □

Remarques

- $n!$ se lit « factorielle n », et on convient que $0! = 1$.
- Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; on peut alors poser que $A_n^0 = 1$.
- $n!$ est aussi le nombre de façons d'ordonner les éléments de E.

Exercices

Exercice 18. Une course de chevaux compte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles du tiercé (dans l'ordre) ?

Exercice 19.

1. Sans répétition, combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 1, 3, 5, 6, 7, 9 ?
2. Combien de ces nombres sont :

   a) inférieurs à 500 ? b) pairs ? c) impairs ? d) multiples de 5 ?

Exercice 20. Calculer A_6^2, A_4^2, A_2^2 et $\dfrac{A_6^2 \times A_4^2 \times A_2^2}{6!}$

Exercice 21. Dénombrer les anagrammes des mots « LION » et « TOTORO ».

Exercice 22. De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes :

a) sur une rangée de 7 chaises ?

b) autour d'une table ronde ?

Exercice 23. Sachant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côtés des autres, de combien de façons 3 Français, 4 Allemands, 3 Anglais et 2 Italiens peuvent-ils s'asseoir sur un banc ?

Fiche 4

Dénombrement
Combinaisons

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992

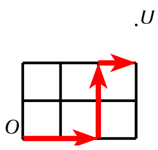
I. Définition

Définition 6
E est un ensemble fini de cardinal n, et p est un entier, on appelle combinaison (sans répétition) de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

- Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, (lire « p parmi n »). Cette notation anglo-saxonne a remplacé la notation C_n^p , (lire « cé aine pé »).
- Les nombres $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux car ils interviennent dans le développement à l'aide de la formule du binôme de Newton de $(a+b)^n$. cf infra.
- Lorsque $p > n$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = 0$, car il n' y a aucun sous ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, si cette condition est vérifiée.
- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$. En effet, il y a un seul sous-ensemble de cardinal nul, c'est l'ensemble vide. De même, il y a un seul sous-ensemble de cardinal n, c'est l'ensemble lui même.
- On peut considérer les arrangements de E comme des combinaisons ordonnées de E.

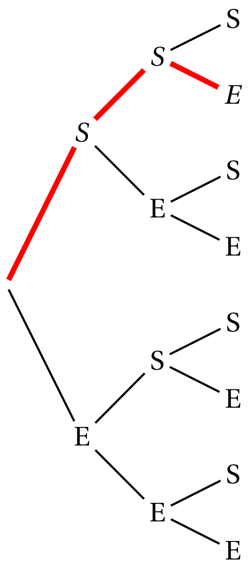
Deux situations :

1. Les mots de cinq lettres contenant deux fois la lettre H et trois fois la lettre D peuvent être considérés comme des combinaisons de 2 éléments de l'ensemble des 5 emplacements des lettres. En effet, les deux emplacements des lettres H déterminent un tel mot.
2. Les trajectoires les plus courtes reliant O à U en suivant le réseau de la figure ci dessous peuvent être codées par des mots de 5 lettres contenant $2H$ et $3D$ (H=Haut et D =Droite). leur nombre est encore $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Trajectoire codée $DDHHD$.

3.



Représentations en termes de chemins dans un arbre. De chaque noeud de l'arbre ci-dessous partent deux branches : S (Succès) et E (Échec). Un chemin de cet arbre peut être codé par un mot de n lettres choisies parmi S et E. Le nombre de chemins comportant exactement p succès est égal au nombre de mots de n lettres comportant p fois la lettre S. C'est à dire $\binom{n}{p}$ Par exemple,le chemin rouge est codé par le mot SSE.

II. Première formule génératrice

Théorème 3
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : Soit E un ensemble de cardinal n. Cherchons de combien de façons on peut choisir une partie A contenant p éléments de E et un élément x de A.

- Première manière : On peut commencer par choisir la partie A, puis choisi r l'élément de x dans A. En utilisant le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{p} \times p$ choix possibles.
- Deuxième manière : On commence par choisir l'élément x dans E puis on choisit parmi les $n-1$ éléments de E qui sont différents de x, les $p-1$ éléments qui, avec x, constituent la partie A.En utilisant le principe multiplicatif, il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ choix possibles. □

On obtient alors

$$\binom{n}{p} \times p = n \times \binom{n-1}{p-1}$$

Théorème 4 (Conséquence :formule close avec les factorielles)
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dot{}(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\dot{}\times 2 \times 1}$$

Cette dernière égalité s'écrit de manière plus condensée en utilisant la factorielle,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration : Si $p = 0$, le résultat est évident. Sinon, il suffit d'appliquer $p-1$ fois le théorème précédent. □

III. Lien arrangements-combinaisons

Théorème 5
Pour tout couple (n, p) d'entiers non nuls vérifiant $p \leqslant n$, on dispose de l'égalité

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Démonstration :

— Il suffit de remplacer l'expression de A_n^p dans l'expression précédente pour obtenir l'égalité.

— Une autre technique de démonstration consiste à remarquer que pour créer une p-liste éléments deux à deux distincts d'éléments de E, on peut procéder en deux temps, dans un premier temps choisir une combinaison de p éléments, puis choisir un ordre sur cette combinaison D'après le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{p} \times p!$ façons de choisir un arrangement d'où l'égalité $\binom{n}{p} \times p! = A_n^p$. □

Exemples

1. $\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!9!} = 10$
2. $\binom{10}{9} = \frac{10!}{9!1!} = 10$
3. Le nombre de façons de choisir 4 personnes dans une assemblée de 10 est $\binom{10}{4}$,

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 210$$

4. Le nombre de mots de 7 lettres possédant 5 S et 2 E est $\binom{7}{2}$.

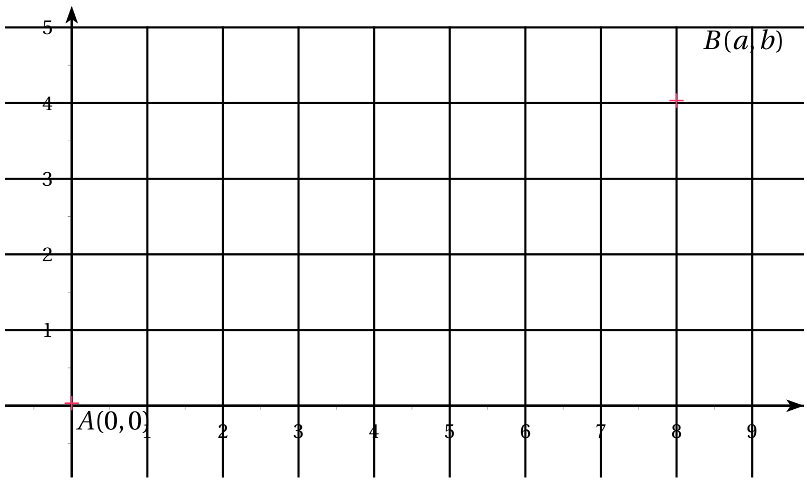
$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

Exercices

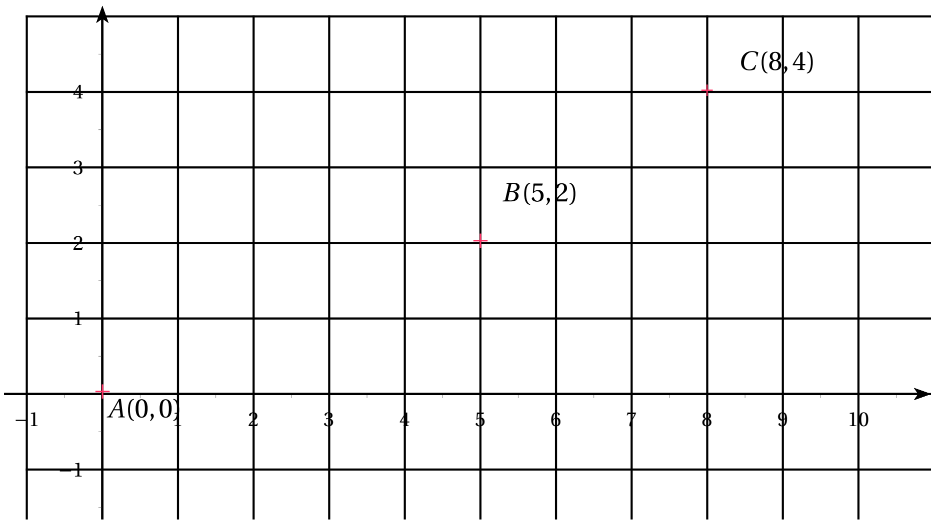
Exercice 24. Combien de comités de 3 membres peut-on élire dans une assemblée de 20 personnes ?

Exercice 25. Combien de résultats contenant n « Pile » peut-on dénombrer lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce de monnaie ?
Donner une valeur approchée de ce nombre en utilisant la formule de Stirling, qui consiste à prendre pour valeur approchée de $n!$: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ pour de « grandes » valeurs de n.

Exercice 26. Établir le résultat général suivant :
Le nombre de trajectoires de plus court chemin tracées sur la quadrillage reliant $A(0;0)$ à $B(a,b)$ est $\binom{a+b}{a}$, (ou encore $\binom{a+b}{b}$).



Exercice 27. Montrer que le nombre de trajectoires reliant A à C en passant par B sur le quadrillage ci dessous est $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2}$.



Exercice 28. Parmi 8 hommes et 6 femmes, combien peut-on former de comités de 5 personnes comprenant :

a) 4 hommes exactement ?

b) 4 hommes au moins ?

c) au moins deux femmes ?

Exercice 29. A l'écrit d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

a) Combine y-a-t-il de choix possibles ?

b) Même question sachant que deux exercices sont obligatoires. ?

Fiche 5

Dénombrement propriétés des combinaisons

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992

I. Propriétés des combinaisons

Théorème 6
Ces propriétés résultent immédiatement de la définition ou de la formule explicite des combinaisons à l'aide des factorielles.

— Pour tout n entier naturel, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

— Pour tout n entier naturel non nul, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$

— Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p avec $p \leqslant n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Remarques
La démonstration de la dernière égalité peut être obtenue de manière algébrique en appliquant la formule donnant les combinaisons à l'aide des factorielles. On peut aussi l'obtenir par une démonstration ensembliste. En effet à chaque partie de p élément est associée de manière unique son complémentaire qui est une partie de $n-p$ élément. Cette correspondance est bijective et on peut donc conclure que le nombre de parties à p éléments, d'un ensemble en comportant n, est aussi le nombre de parties à $n-p$ éléments.

II. Deuxième formule génératrice, la formule de Pascal

Théorème 7
Pour tout couple d'entiers naturels, vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on dispose de l'égalité suivante,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : Démonstration ensembliste.
Soit E un ensemble de cardinal n, avec $n \geqslant 2$. Soit a un élément de E fixé. L'ensemble des parties de E de cardinal p est la réunion disjointe de

— l'ensemble des parties de E de cardinal p ayant a parmi leurs éléments,

— l'ensemble des parties de E de cardinal p n'ayant pas a parmi leurs éléments,

Or, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ éléments dans le premier ensemble et $\binom{n-1}{p}$ dans le deuxième ensemble. la formule de Pascal est obtenu en appliquant le principe additif. □

III. Triangle de Pascal

La formule de Pascal permet de calculer toutes les coefficients binomiaux dans un tableau comme ci-dessous.
On commence par border la diagonale et la première colonne de 1. Puis n applique la formule de Pascal.

n^p	0	1	2	3	4	5	6	7	.
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	

Dans le triangle ci-dessus : le nombre 6 en rouge est $\binom{4}{2}$, c'est la somme des deux nombres écrits en rouge à la ligne précédente, $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$.

Exercices

Exercice 30. Déterminer mentalement,

a $\binom{10}{0}$

b $\binom{10}{10}$

c $\binom{10}{1}$

d $\binom{10}{9}$

e $\binom{10}{2}$

f $\binom{10}{8}$

Exercice 31. On considère le programme écrit dans le langage Python ci-dessous.

```
1 def Coefficients(n):
2     L=[1,1]
3     M=L
4     for i in range(2,n+1):
5         M=M+[1]
6         for k in range(i-1):
7             M[k+1]=L[k+1]+L[l]
8         L=M
9     return L
```

Le but de ce programme est d'afficher la ligne n du triangle de Pascal.

1. Corriger l'erreur qui est présente à la ligne 7 pour que le programme fonctionne.
2. Utiliser ce programme pour indiquer la valeur numérique de $\binom{15}{5}$.

Exercice 32. Prouver le résultat suivant : « Le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$. »

Exercice 33. Démontrer la relation suivante

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2,$$

1. en calculant de deux manières le nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires.
2. en dénombrant de deux manières, les trajectoires les plus courtes relaint $(A(0,0)$ à $B(n,n)$ sur un réseau.

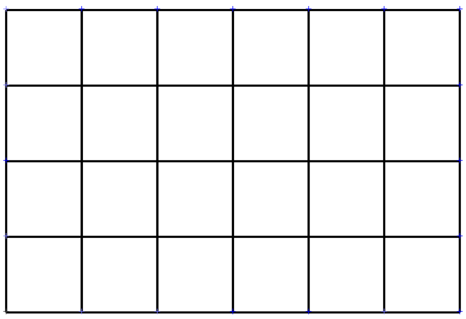
Fiche 6

Exemples d'emploi de partition

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992
Le princie de base permettant de déterminer le cardinal d'un nensemble fini est de trier ses éléments en fonction d'un critère bine déterminé, autrement dit d'en effectuer une partition. Le dénombrement repose alors sur l'organisation des données (arbres, tableaux). Nous en donnons quelques exemples.

Exercice résolu

Combien de rectangles ont leurs côtés matérialisés dans le réseau quadrillé ci dessous ?



1. Détermination de la partition. : Notons $R_{n,p}$ l'ensemble des rectangles ayant n colonnes et p lignes, avec $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $1 \leqslant p \leqslant 4$. Notons aussi $u_{n,p} = \text{card}(R_{n,p})$. Les $R_{n,p}$ forment une partition de l'ensemble à dénombrer.
2. Calcul de $u_{n,p}$. Soit n et p fixés ($1 \leqslant n \leqslant 6$, $1 \leqslant p \leqslant 4$). On peut choisir n colonnes consécutives de $6-n+1$ façons, et p lignes consécutives de $4-p+1$ façons. Le principe multiplicatif donne alors $u_{n,p} = (6-n+1)(4-p+1)$.
3. Organisation des données. Le tableau à « double entrée » rassemble les résultats.

p^n	6	5	4	3	2	1
4	1	2	3	4	5	6
3	2	4	6	8	10	12
2	3	6	9	12	15	18
1	4	8	12	16	20	24

On en déduit que le nombre cherché est

$$\sum_{p=1}^{4}\sum_{n=1}^{6} u_{n,p} = (1+2+\ldots+6)(1+\ldots+4)$$

Soit 210 rectangles.

4. Remarque. Une méthode plus rusée pour remplir le tableau consiste à remarquer les relations de récurrence : $u_{n-1,p} = u_{n,p} + 5 - p$ et $u_{n,p-1} = u_{n,p} + 7 - n$, qui permet de remplir toutes les cases connaissant $u_{6,4} = 1$, et mettent en évidence le caractère arithmétique des suites $n \mapsto u_{n,p}$ et $p \mapsto u_{n,p}$.
5. Remarque finale. Une autre méthode consiste à repérer que construire un rectangle revient à :
   - choix de deux cotés verticaux parmi les 7 droites $\binom{7}{2}$,
   - choix de deux cotés horizontaux parmi les 5 droites $\binom{5}{2}$,

   En appliquant le principe multiplicatif, on obtient

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 21 \times 10$$

6. Résumé. L'exemple précédent qui ne requiert que des connaissances modestes, rassemble l'essentiel des techniques du dénombrement.
   (a) Trier et décomposer. C'est à dire réaliser une partition et au besoin, décomposer la procédure de dénombrement de chaque sous-ensemble de la partition en « sous-procédures » simples.
   (b) Organiser les données. On peut avoir recours à des arbres, des tableaux, ou au raisonnement par récurrence lorsqu'il s'agit de prouver une formule générale.

exercices

Exercice 34. Un péage automatique d'autoroute n'accepte que des pièces de 2 euros, 1 euro, $0,50$ euro, $0,20$ euro et ne rend pas la monnaie. de combien de façons peut-on s'acquitter un paiement de 5 euros.

Exercice 35. Directement dérivés de l'art de combinatoire cher à Leibnitz, ils sont engendrés par dix sonnets de quatorze vers, entièrement conformes aux règles prosodiques. Chacun de ces dix sonnets est imprimé sur une page échancrée en bandelettes, de telle sorte que chaque vers, porté par l'un des volets ainsi découpés, peut être remplacé par le vers de même rang de l'un des 9 autres poèmes. Au total, le lecteur peut effectivement composer les 10^{14} poèmes annoncés. Vérifier ce résultat.

Exercice 36. Pour fabriquer un jeu de construction, on dispose de cubes de bois identiques et de deux couleurs : rouge et vert. toutes les faces seront peintes d'une couleur quelconque. Combien de cubes différents peut-on peindre ?

Fiche 7

Dénombrement de « tirages »

D'après MATH Terminales C et E - Terracher - 1992 Un bon nombre de situations aléatoires font intervenir directement un tirage de boules dans une urne ou peuvent s'y ramener par analogie. Les exemples qui suivent présentent donc un modèle de référence pour l'étude de ces situations avec plusieurs significations possibles du mot « tirage ».

Exercice résolu

En se ramenant à des tirages de boules numérotées dans une urne, résoudre chacun des problèmes suivants.

1. Combien peut-on former d'entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?
2. Huit coureurs s'affrontent pour trois médailles. Combien y-a-t-il de palmarès possibles ?
3. Combien de grilles distinctes existent au Loto ? Une grille est données en entourant 6 numéros parmi les 1,2,...,49.

1. Tirages successifs avec remise. Soit E l'ensemble des entiers de trois chiffres dont le cardinal est 900, et A la partie de E formée des nombres contenant au moins l'un des chiffres : 0, 3, 6 et 9. Alors qu'un dénombrement direct de A semble délicat, il paraît plus simple de dénombrer $\overline{A}$, la partie de E des nombres écrits à l'aide des seuls chiffres 1, 2, 4, 5,7 ,8. Un élément de $\overline{A}$ peut être considéré comme un tirage ordonnée de 3 boules dans l'urne contenant les boules 1,2,5,4,8 et 7 avec remise de la boule tirée après que l'on ait noté son numéro. Il y a $6\times6\times6$ tirages. Ainsi $\text{card}(\overline{A}) = 216$ et par suite
$$\text{card}(A) = \text{card}(E) - \text{card}(\overline{A}) = 684.$$
2. Tirages successifs sans remise. Si l'on numérote les 8 coureurs de 1 à 8,un palmarès correspond à un tirage ordonné de 3 boules distinctes dans l'urne composée des 8 boules, sans remise de la boule tirée. Il y a 8 choix possibles pour la première boule, 7 pour la deuxième, 6 pour la troisième. le nombre cherché est donc $8\times7\times6 = 336$.
3. Tirages simultanés sans remise. Une grille peut s'identifier à un tirage de 6 boules dans une urne contenant 49 boules, ou encore à une combinaison de 6 éléments parmi 49 éléments. le nombre de grilles est donc $\binom{49}{6} = 13983816$.

exercices

Exercice 37. Combien existe-t-il de nombres de quatre chiffres écrits avec

1. au moins un chiffre pair ?

2. au moins un chiffre impair ?

Exercice 38. Le problème du Duc de Toscane. On lance 3 dès numérotés de 1 à 6. Y a -t-il autant de résultats donnant pour somme 9 que de résultats donnant pour somme 10 ?

Exercice 39. De combien de façons différentes peut-on répartir quatre personnes sur une rangée de sept chaises ?

Exercice 40. Parmi toutes les mains de 5 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes, dénombrer celles contenant

1. deux as et seulement deux as
2. deux coeurs et deux seulement ?

Fiche 8

Dénombrement-Problèmes d'approfondissement »

la formule de Vandermonde

On considère deux ensembles disjoints A et B non vides, tels que $\text{Card}A = a$ et $\text{Card}B = b$. Soit $E = A \cup B$.

1. Quel est le cardinal de E ? Pour tout entier naturel n inférieur ou égal à $a+b$, combien E admet-il de sous-ensembles de cardinal n ?
2. Soit k un entier naturel inférieur ou égal à a. Combien A admet-il de sous-ensembles de cardinal k ? Combien B admet-il de sous-ensembles de cardinal $n-k$?
3. En faisant varier k de 0 à a, déduire de ce qui précède la valeur de

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Combinaisons avec répétitions

1. (a) Écrire tous es triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x + y + z = 5$. Combien y en a-t-il ?
   (b) Déterminer le nombre de façons de ranger cinq boules indiscernables dans trois tiroirs numérotés.
   (c) Déterminer le nombre de suites de sept caractères comportant cinq fois le chiffre 0 et deux fois le chiffre 1.
   (d) Que peut-on remarquer ? expliquer pourquoi.
2. (a) Soit (n, p) un couple d'entiers naturels. Déterminer le nombre de p uplets $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ d'entiers naturels tels que $b_1 + b_2 + \dots + b_p = n$.
   (b) Déterminer le nombre de p uplets $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ d'entiers naturels non nuls tels que $b_1 + b_2 + \dots + b_p = n$.

Fiche 1

Raisonnement
Le raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence simple

Théorème 8
Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, on peut procéder de la façon suivante.

— Initialisation. On établit la propriété pour $n = 0$.

— Hérédité. On fixe un entier naturel n tel que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie.

Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

Remarques

— Il se peut que l'on demande de prouver la validité d'une propriété $\mathscr{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. L'initialisation consiste alors en la vérification de $\mathscr{P}_1$.

Exemples de mise en oeuvre

1. Somme des carrés des n premiers entiers.
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Nous allons établir que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Utilisons le principe de la démonstration par récurrence.
   Pour n entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Initialisation. La vérification de $\mathscr{P}_1$ est immédiate, $1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times2\times3}{6} = 1$.
   Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc,
   $$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   Alors,
   $$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2.$$
   D'où, grâce à $\mathscr{P}_n$:
   $$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2.$$

Après réduction au même dénominateur et factorisation par $n+1$,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1)).$$

Mais,

$$n(2n+1)+6(n+1)=2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3).$$

En fin de compte, on obtient $\mathscr{P}_{n+1}$:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion, on a démontré que :

— $\mathscr{P}_1$ est vraie,

— que que soit l'entier non nul n, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de la démonstration par récurrence, on peut conclure que, quel que soit l'entier naturel n non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

2. Une inégalité. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

Initialisation. On a $2-\frac{1}{1}=1$ donc $1\leqslant 2-\frac{1}{1}$
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}..$$

En ajoutant $\frac{1}{(n+1)^2}$ aux deux membres de l'inégalité, il vient :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comparons alors les deux nombres $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$ et $2-\frac{1}{n+1}$ en étudiant le signe leur différence.
$\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=-\frac{1}{n(n+1)^2}$.
Le dernier membre de l'égalité est négatif, il en résulte que $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Cette dernière inégalité est exactement la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ Conclusion, on a démontré que :

— $\mathscr{P}_1$ est vraie,

— que que soit l'entier non nul n, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de la démonstration par récurrence, on peut conclure que, quel que soit l'entier naturel n non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exercices

Exercice 41. On considère la propriété « $3^n \geqslant 1+2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Montrer que la propriété est initialisée.
2. Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.
   (a) Écrire l'hypothèse de récurrence.
   (b) Écrire la propriété au rang $n+1$ (on simplifiera le membre de droite de l'inégalité).
   (c) Multiplier les deux membres de l'inégalité de la question a) par 3 puis les simplifier.
   (d) Justifier que $3+6n \geqslant 3+2n$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. Rédiger intégralement le raisonnement par récurrence permettant de justifier la propriété souhaitée.

Exercice 42. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 43. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_n = -\frac{1}{3}w_{n-1} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer par récurrence que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 44.
1. Montrer par récurrence que $3^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 7$.
2. Montrer que $n! \leqslant n^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 45. Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 46. Somme des impairs.
On a créé une feuille de tableur comme ci-dessous :

	A	B	C
1	1	1	
2	3	4	
3	5	9	
4	7	16	
5	9	25	
6	11	36	

Dans la colonne A, on a écrit les premiers nombres impairs. En B1, on a écrit 1. Dans la cellule B2 est écrite la formule « =B1+A2 » qu'on a recopiée vers le bas.

1. Conjecturer une formule pour la somme des premiers nombres impairs : $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ pour $n \geqslant 1$.
2. Démontrer cette égalité par récurrence.

Exercice 47. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}.$$
2. En déduire la somme des 101 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison 50.

Exercice 48.

1. Calculer $4!$ puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3!$.
2. Calculer $5!$ puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4!$.
3. Conjecturer une expression de $\sum_{k=1}^{n-1} k.k!$ en fonction de $n!$ pour $n \geqslant 2$.
4. Démontrer cette égalité.

Exercice 49. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_n = 3v_{n-1} - 2n + 6$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. La suite (v_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Montrer par récurrence que $v_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 50. On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 51. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_n = \frac{1}{5}w_{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Montrer que $w_n = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{8}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 52. Avec un tableur
On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et par la relation de récurrence $w_n = 2w_{n-1} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On donne ci-dessous la feuille de tableur donnant les premiers termes de la suite (w_n).

	A	B	C
1	n	w(n)	
2	0	4	
3	1	5	
4	2	7	
5	3	11	
6	4	19	
7	5	35	

1. Quelle formule a été écrite en B3 et recopiée vers le bas pour obtenir ces résultats ?
2. On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par $r_n = w_n - 3$.
   Conjecturer une formule explicite pour (r_n) puis pour (w_n).
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 53. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer une expression explicite de u_n.
2. Démontrer cette égalité en utilisant une démonstration par récurrence.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^3$.
   (a) Montrer que $v_0 = u_0$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) satisfait la relation de récurrence de la suite (u_n).

Remarques
Les suites (u_n) et (v_n) ont même premier terme et satisfont la même relation de récurrence, cela implique que (u_n) et (v_n) sont la même suite sans avoir à utiliser une démonstration par récurrence.

Thème 2 Géométrie dans l'espace

Fiche 1

Géométrie
Vecteurs de l'espace

I. Vecteurs de l'espace-translations

Définition 7
On dit que deux couples de points de l'espace $(A;B)$ et $(C;D)$ sont deux représentants du même vecteur si, et seulement si, les deux segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Figure page 23 Sortais

Théorème 9
Si $(A;B)$, $(C;D)$ et $(E;F)$ sont trois couples de points de l'espace, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Démonstration : Preuve admise. □

Figure page 23 Sortais

Remarques
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est noté $\overrightarrow{0}$. Il est appelé le vecteur nul.

Propriété 2
- Étant donné un point O de l'espace et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. le point M est appelé l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Si deux couples de points $(A;B)$ et $(C;D)$ sont deux représentants du même vecteur $\overrightarrow{u}$ NON NUL alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles. La direction commune de ces droites est appelée la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

II. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Addition de deux vecteurs

Théorème 10
Si A est un point de l'espace si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs,notons B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et C le point défini par $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi défini est indépendant du choix du point A.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 8
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi défini est appelé somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}.$$

La relation obtenue à l'aide des représentants s'écrit

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Cette dernière égalité est appelée **relation de Chasles**.

Théorème 11
Soit A,B et C trois points de l'espace, les deux énoncés suivants sont équivalents,

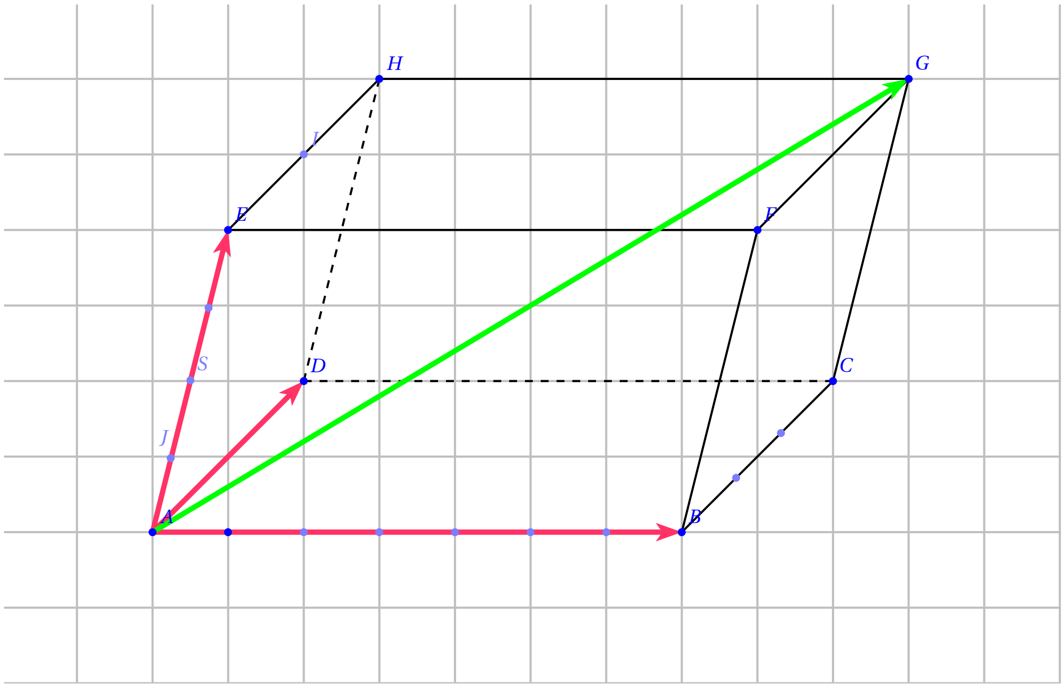
— D est le point de l'espace défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

— D est le point de l'espace tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 9
L'équivalence ci-dessus est appelée **règle du parallélogramme**.



La figure ci dessus entend souligner la configuration qu'il est possible d'associer dès lors que l'on s'intéresse à la somme de trois vecteurs :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Multiplication d'un vecteur par un réel

Théorème 12
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel strictement positif, soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$, Soit M le point de la demi droite d'origine A passant par B tel que $AM = k \times AB$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ne dépend pas du représentant choisi du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 10
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini dans la propriété précédente est appelé produit du réel positif k par le vecteur $\overrightarrow{u}$, on note

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$$

figure

Théorème 13
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel strictement négatif, soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$, Soit M le point de la droite (AB) tel que A appartienne au segment $[MB]$ et $AM = |k| \times AB$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ne dépend pas du représentant choisi du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Preuve admise. □

Définition 11
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini dans la propriété précédente est appelé produit du réel négatif k par le vecteur $\overrightarrow{u}$, on note

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$$

figure

Définition 12
On convient que,

— quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$,
$$0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

— quel que soit le réel k,
$$k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Définition 13
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** si, et seulement si, l'un deux est le produit de l'autre par un réel.

Définition 14
Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont dits de même sens si $k > 0$, de sens contraires si $k < 0$.

III. Propriétés des opérations

Propriétés de l'addition

Théorème 14
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de l'espace, on a

- ⋆ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$, on dit que l'addition est commutative.
- ⋆ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, on dit que l'addition est associative.
- ⋆ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{u}$ est un élément neutre pour l'addition.
- ⋆ Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{x}$ vérifiant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
  Le vecteur $\overrightarrow{x}$ noté $(-\overrightarrow{u})$, il est appelé vecteur opposé de $\overrightarrow{u}$.
  On dispose de l'égalité suivante
  $$(-1)\overrightarrow{u} = (-\overrightarrow{u})$$

Démonstration : Preuve admise. □

propriétés de la multiplication par un réel

Théorème 15
Quels que soient les réels k, k' et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace

- ⋆ $k.(k'.\overrightarrow{u}) = (kk').\overrightarrow{u}$
- ⋆ $(k+k').\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{u} + k'.\overrightarrow{u}$
- ⋆ $k.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k.\overrightarrow{u} + k.\overrightarrow{v}$
- ⋆ $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- ⋆ $(-k).\overrightarrow{u} = k.(-\overrightarrow{u}) = -(k.\overrightarrow{u})$.
- ⋆ $k.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \leftrightarrow k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- ⋆ L'équation $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ admet une unique solution qui est $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u})$, notée aussi, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

IV. Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

premières définitions

Définition 15
si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tout vecteur pouvant s'écrire sous la forme $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$ où λ et μ sont deux nombres réels.
Les réels λ et μ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarques
On peut étendre cette définition à plus de deux vecteurs, ainsi $2\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, les coefficients sont 2, $\frac{1}{2}$ et 1.

Définition 16
On dit qu'une famille finie de vecteurs est une famille de vecteurs **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs permettant d'obtenir le vecteur nul est la combinaison dont **tous** les coefficients sont nuls.

Propriété 3
Les deux énoncés suivants sont équivalents

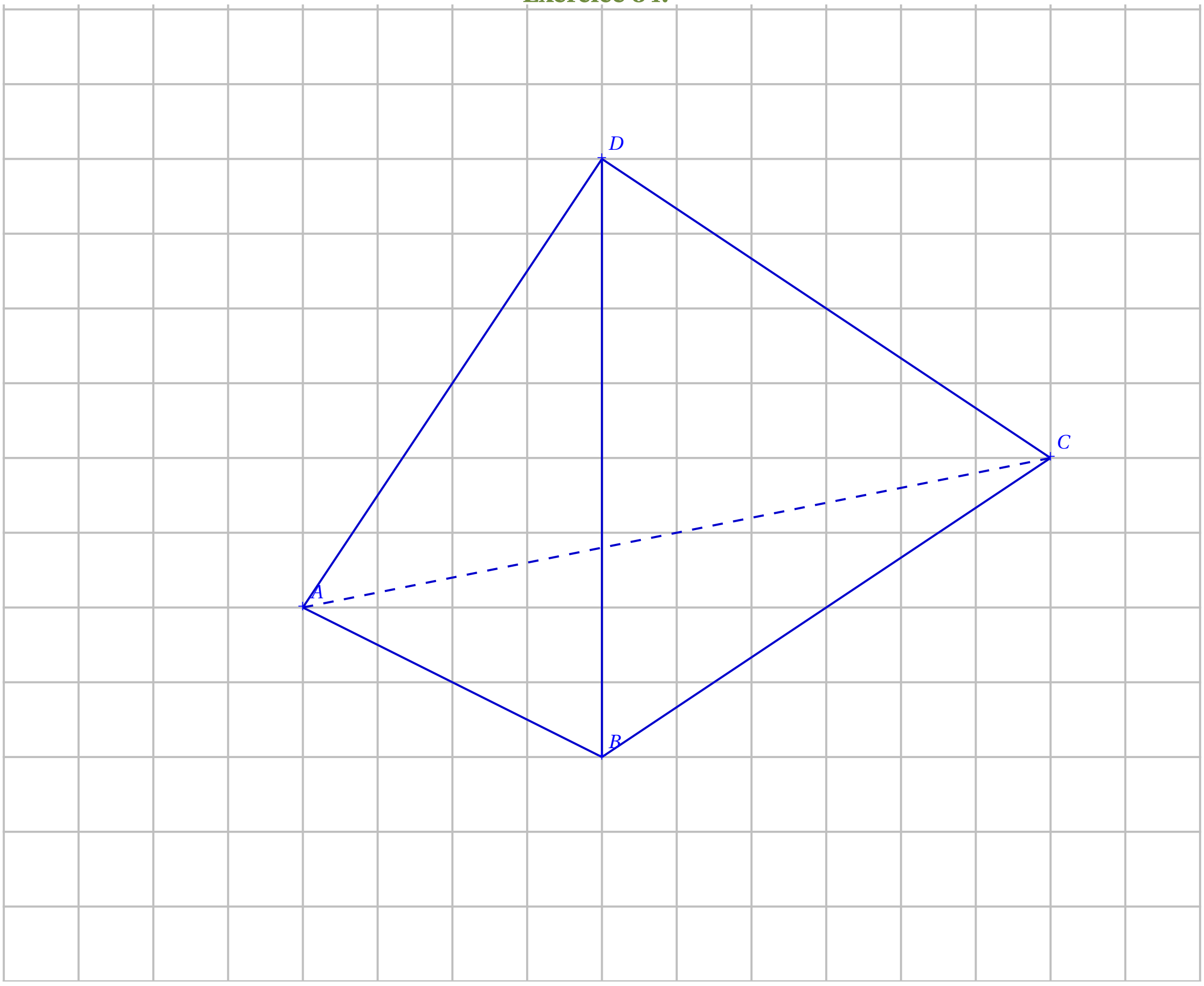
- les **deux** vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement indépendants,
- les **deux** vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 4
Les deux énoncés suivants sont équivalents

- les **trois** vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants,
- aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres.

Exercices

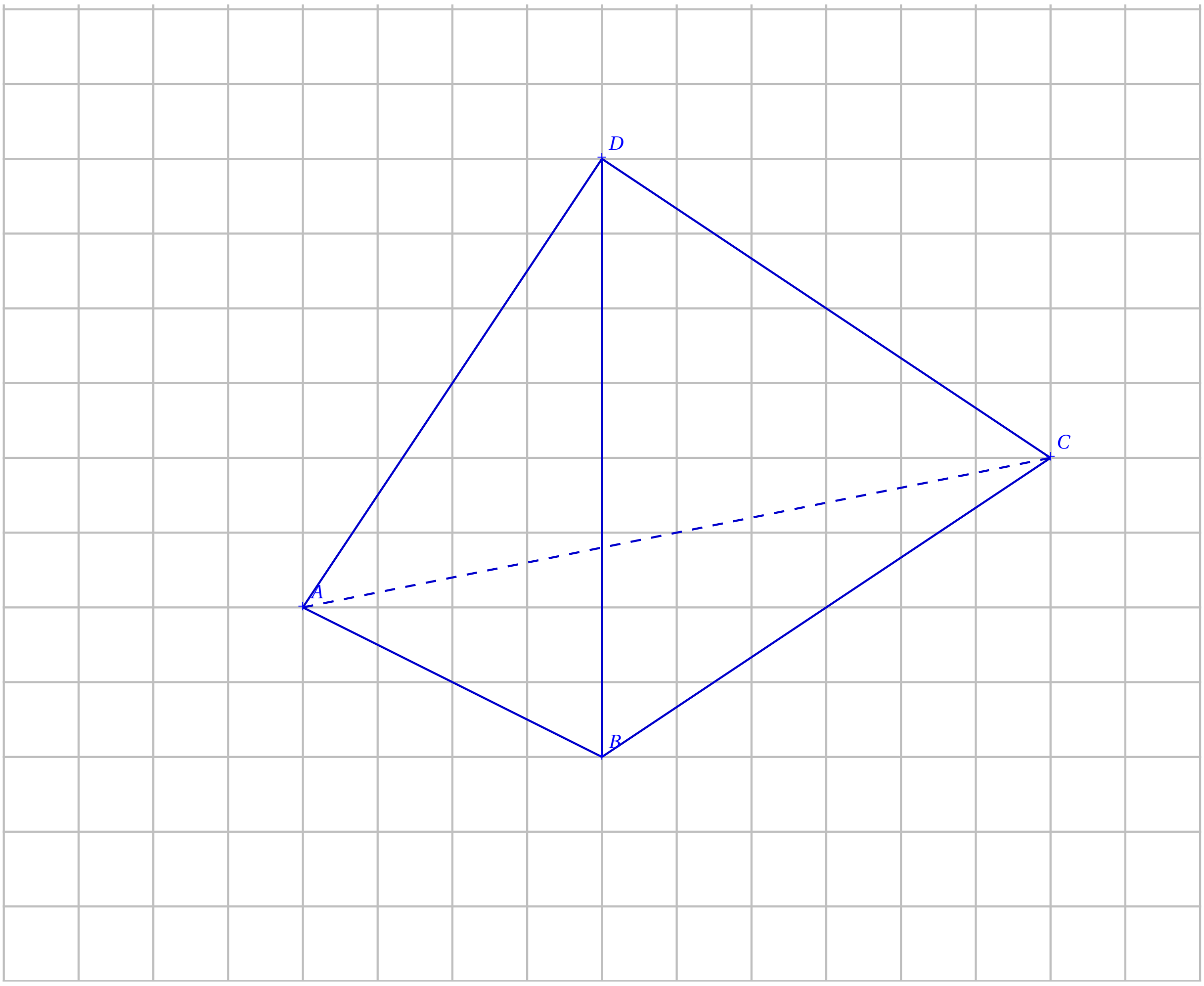
Exercice 54.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points R et S définis par

1. $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AS} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

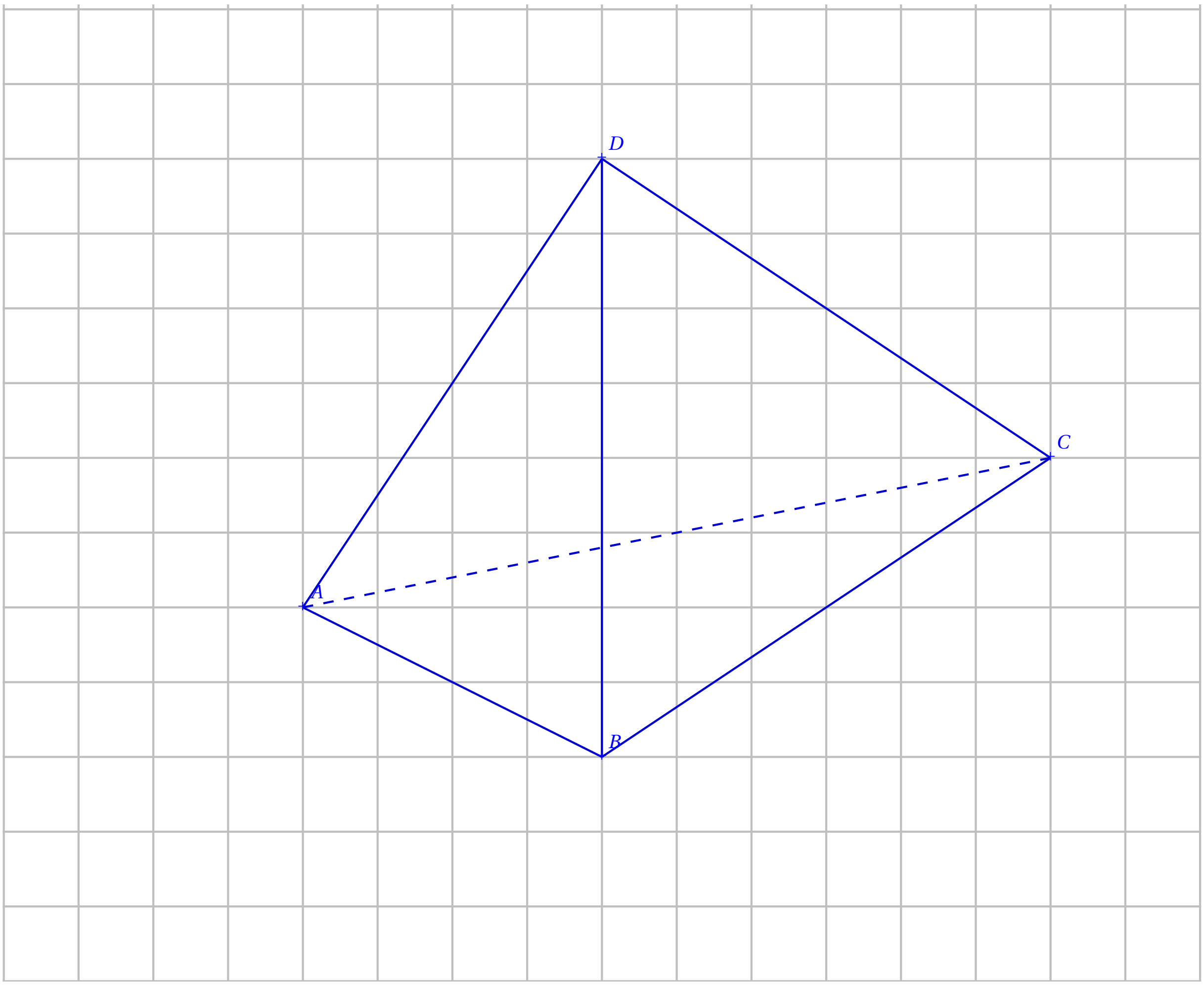
Exercice 55.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points E et F définis par

1. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

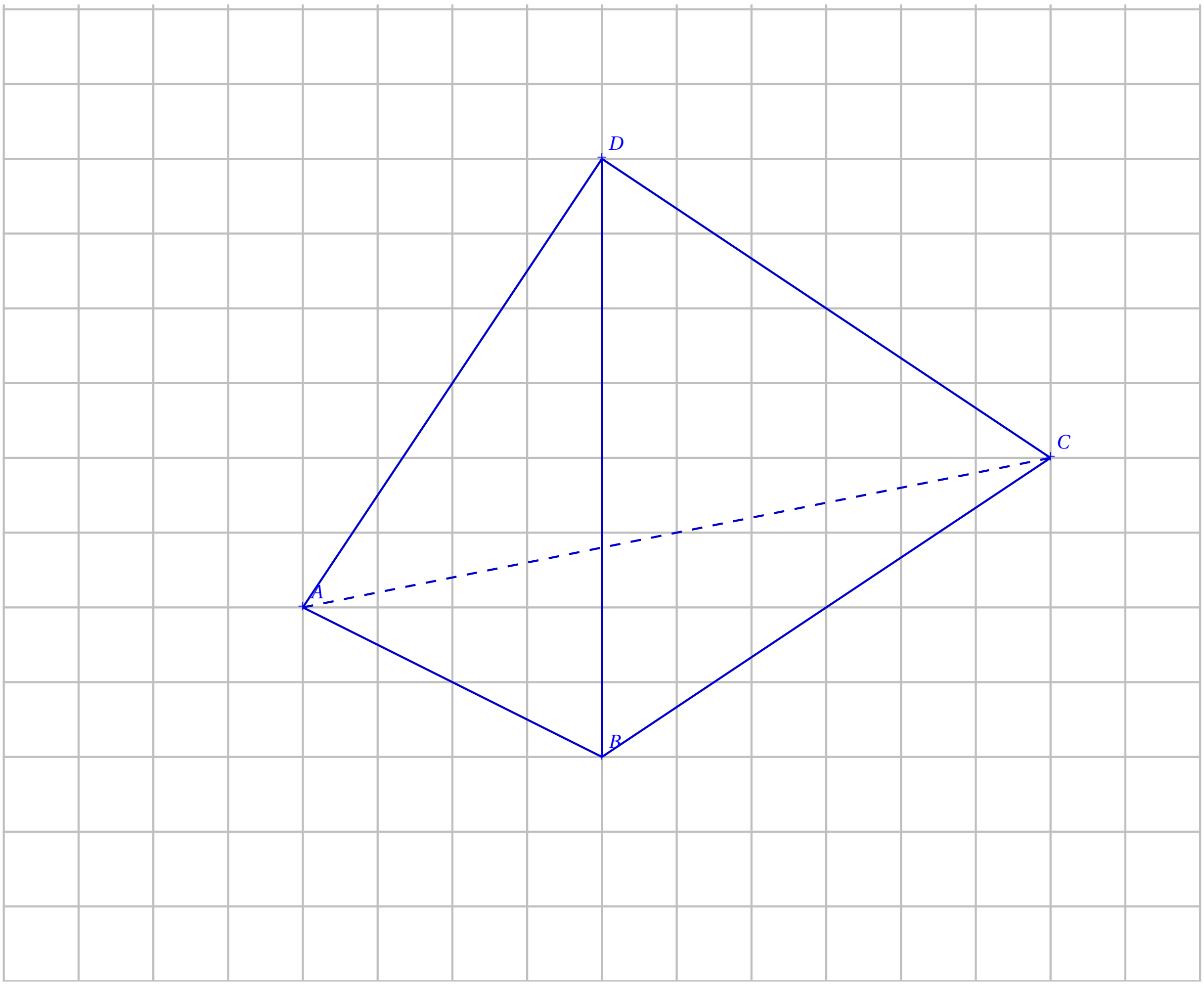
Exercice 56.



$ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé. Placer les points K et L définis par

1. $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Exercice 57.



1. Le point G est défini par l'égalité vectorielle

$$6\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CB}$$

   (a) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{CB}$.

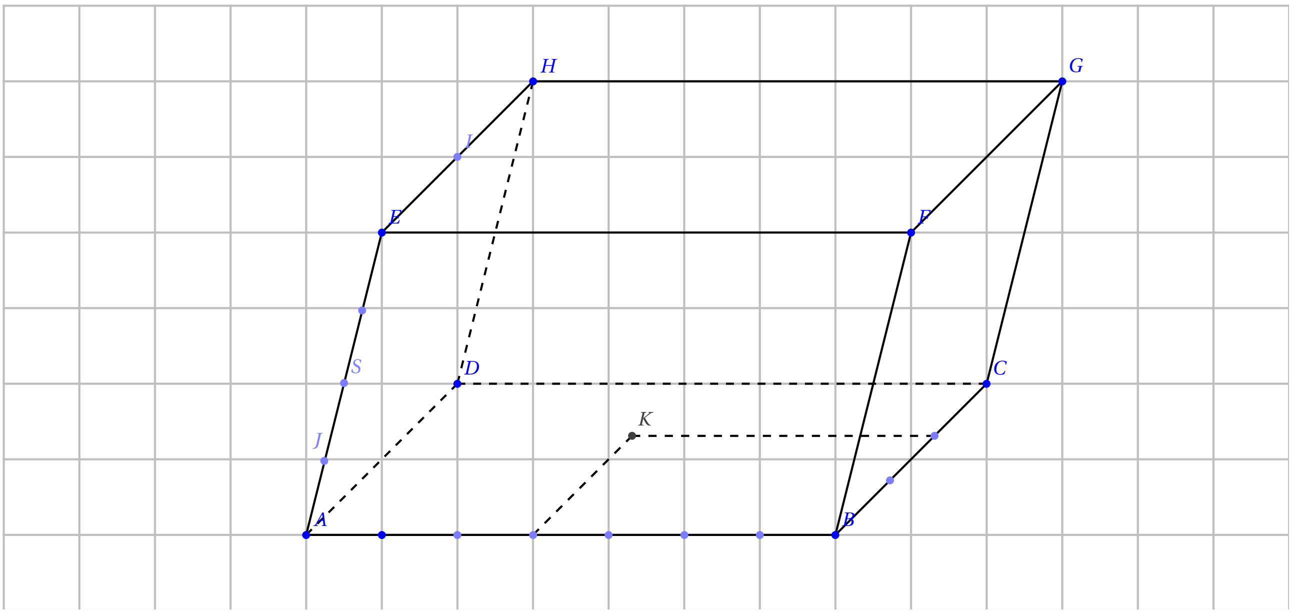
   (b) Placer G sur la figure.

2. Le point H est défini par $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{0}$.

   (a) Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$

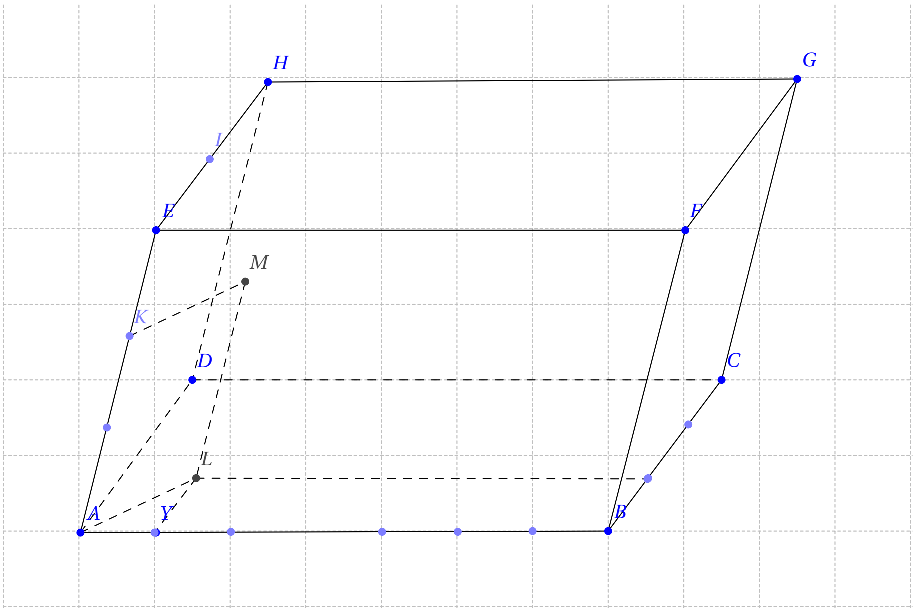
   (b) Placer le point H sur la figure.

Exercice 58. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières.



1. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EH}$.
3. les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?
4. les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?

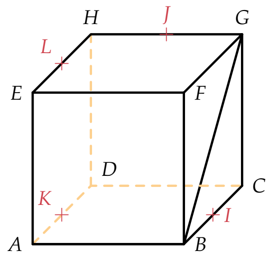
Exercice 59. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. les graduations sur chaque arête sont t régulières. De plus, $BILJ$ et $ALMK$ sont des parallélogrammes.



1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. les vecteurs $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont ils linéairement indépendants ?

Exercice 60. Dans un tétraèdre $ABCD$, I est le milieu de $[AB]$ et J est le mileiu de $[CD]$. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



Exercice 61. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$
3. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$

Exercice 62. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
3. $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

Exercice 63. Les points A,B, C et D étant distincts et tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, à tout point M de l'espace on associe le point M' tel que $AMDM'$ soit un parallélogramme. Comparer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{M'C}$.

Exercice 64. On considère un point O, trois points A, B , C et A', B' et C' leurs symétriques respectifs par rapport à O. Pour tout point M de l'espace, évaluer la somme suivante en fonction de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}$$

Exercice 65. Les points A, B et C sont distincts. préciser, dans chaque cas, s'il est possible de déterminer un point M tel que :

1. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$
2. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$
4. $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$
6. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

combinaison linéaire de deux vecteurs exemples de construction combinaison linéaire de trois vecteurs etc

Fiche 2

Géométrie
Droites de l'espace

I. Vecteurs directeurs d'une droite.

Définition 17
Si d est une droite de l'espace, on dit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ qu'il est un vecteur directeur de d si c'est un vecteur non nul, et si, quel que soit le point A de d, le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ est un point de d.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ dirige la droite d, ou encore que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de la direction de d.

II. Vecteurs colinéaires.

Définition 18
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires si l'un des deux le produit de l'autre par un réel.

Propriété 5
Si $\overrightarrow{u}$ n'est pas le vecteur nul, alors $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$

Démonstration :

III. Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.

Propriété 6
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, et si A est un point de d alors pour tout point $M \in d$ il existe t $\in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$

Propriété 7
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, et si A est un point de d alors la droite d est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Définition 19
On note $d(1,\overrightarrow{u})$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exercices

Exercice 66. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

1. Réaliser une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. En déduire que A , K et G sont alignés.

Exercice 67. $ABCDEFGH$ est un cube. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AE}$.

1. Réaliser une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
5. En déduire que L , K et G sont alignés.

Exercice 68. $ABCD$ est un tétraèdre. Les points E, F et G sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Réaliser une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que E , F et G sont alignés.

Exercice 69. Représenter un tétraèdre $ABCD$ et les droites $d(A,\overrightarrow{u})$,$d(B,\overrightarrow{v})$ avec :
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$. Ces droites sont elles sécantes ?

Exercice 70. Dans un parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ on pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$. Identifier les droites : $d(B',\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, $d(C',\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, $d(C,\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$ et $d(D,\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Exercice 71. On considère une pyramide $SABCD$ dont la base $ABCD$ est un parallélogramme et où I, J, K et L sont les milieux des segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$. Enfin, on note : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{JK}$.

1. Identifier chacune des droites suivantes :
   (a) $d(K,\overrightarrow{v})$
   (b) $d(A,\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$
   (c) $d(B,\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$
2. Compléter par un vecteur exprimé à l'aide de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$
   (a) $(SA) = d(S,...)$
   (b) $(SB) = d(S,...)$
   (c) $(SC) = d(S,...)$
   (d) $(SD) = d(S,...)$
3. Donner en fonction de de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur des droites (AK), (BL) et (CI).

Fiche 3

Géométrie
Plans de l'espace

Version 2

I. Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.

Définition 20
On appelle direction d'un plan l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan.

Propriété 8
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs **linéairement indépendants** (non colinéaires) de la direction d'un plan alors tout vecteur de la direction du plan est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On dit que le couple $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ est une base de la direction du plan.

Propriété 9
Soit A un point d'un plan $\mathscr{P}$, et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ une base de la direction de ce plan, pour tout point M du plan, il existe deux nombres réels s et t tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}.$$

Démonstration :

Propriété 10
Soit A un point d'un plan $\mathscr{P}$, et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ une base de la direction de ce plan, le plan est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ où $(s\ ;\ t)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

Démonstration :

II. Vecteurs coplanaires.

Définition 21
Les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \ldots\ \overrightarrow{w}$ de l'espacesont dits coplanaires lorsqu'un point O quelconque, et les points A, B,C,...définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$,..., sont coplanaires.

Remarques

— Nous admettons que cette définition ne dépend pas du point O choisi.

— Deux vecteurs sont toujours coplanaires, il existe toujours au moins un plan contenant AO,A et B.

— Pour les mêmes raisons, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, quel que soit $\overrightarrow{w}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Théorème 16
Soit $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\overrightarrow{w}$ un vecteur quelconque. Alors il est équiavlent de dire :

— les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires

— il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Propriété 11
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Les seuls réels a,b,et c pour lesquels $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ sont tels que $a = b = c = 0$.

Propriété 12
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires. L'écriture$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$ est unique. Autrement dit l'égalité

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v} + z'\overrightarrow{w}$$

ne peut avoir lieu que si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Exercices

Exercice 72. Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$.
3. En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Exercice 73. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède, I, J ,K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$. On considère les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

et
$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, G et N sont coplanaires.

Exercice 74. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont coplanaires.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

Exercice 75. $ABCDEFGH$ est un cube.
On considère le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

1. Que peut-on dire des points D, M, K et H ?
2. Montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF}$.
3. Montrer que si $t = \frac{4}{5}$, les points D, M et K sont alors alignés.

Exercice 76. On donne un tétraèdre $ABCD$ et l'on note : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
Montrer que tous les plans définis ci après sont des faces du tétraèdre et les identifier.

1. plan $(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
2. plan $(C, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$.
3. plan $(A, -\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$.
4. plan $(A, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} - v)$.

Exercice 77. On considère trois points A, B et C de l'espace. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ sont ils coplanaires ?

Exercice 78. Existe-t-il cinq points de l'espace A,B, C, D, E non coplanaires tels que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$?

Exercice 79. On considère le parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$. Préciser dans chaque cas si les vecteurs sont coplanaires ou non.

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$
2. $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD})$
3. $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{C'B'})$
4. $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'B'})$

Méthode :

Pour tester si les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, on peut considérer la relation $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, a, b et c étant des réels que l'on essaie de déterminer. Deux cas sont à envisager :

- Il n'y a que la solution $a = b = c = 0$, les vecteurs ne sont pas coplanaires.
- Il existe un autre triplet que $(0, 0, 0)$, dans ce cas les vecteurs sont coplanaires.

Dans les exercices suivants $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Exercice 80. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calculer $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Qu'en déduire sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$?

Exercice 81. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u_3} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ ne sont pas coplanaires.

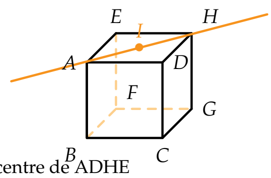
Exercice 82. Soit $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$. Examiner la coplanarité des vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{u}$.

Fiche 4

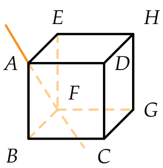
Géométrie
Positions relatives

I. Positions relatives de deux droites

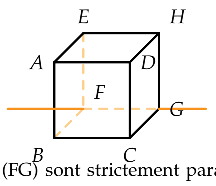
— Deux droites sont dites coplanaires s'il existe au moins un plan qui les contient toutes les deux, plus précisément, elles peuvent être



I centre de ADHE
(AH) et (AI) sont confondues
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont **colinéaires**
L'intersection des deux droites est la droite elle même

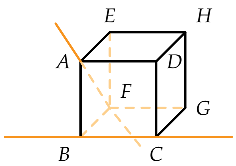


(AD) et (AF) sont sécantes en A
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires
L'intersection des deux droites est un singleton



(AD) et (FG) sont strictement parallèles
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires
L'intersection des deux droites est l'ensemble vide

— deux droites sont dites non coplanaires si il n'existe aucun plan les contenant toutes les deux



(BC) et (AF) sont non coplanaires
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires
L'intersection des deux droites est l'ensemble vide

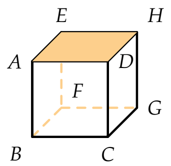
Propriété 13
Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et une droite de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires**.

II. Positions relatives de deux plans

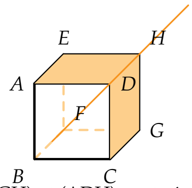
Définition 22
On dit que deux plans sont parallèles si ils ont la même direction. Ainsi toute base $(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v})$ de la direction d'un plan est aussi une base de la direction d'un plan qui est lui est parallèle.

Propriété 14
Si deux plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants selon une droite.

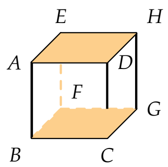
Démonstration : propriété admise. □



Les plans (EAD) et (ADH) sont confondus
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de la direction de (EAD) et de (ADH)
L'intersection des deux plans est le plan lui même



Les plans (CGH) et (ADH) sont sécants selon la droite (DH)
Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ n'est pas dans la direction du plan (ADH)
L'intersection des deux plans est la droite (DH)



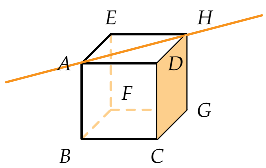
Les plans (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles
Les deux plans ont la même direction et leur intersection est vide

Propriété 15
Un plan $\mathscr{P}_\infty$ de l'espace dont la direction a pour base $(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \overrightarrow{v_1})$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}_\epsilon$ de l'espace dont la direction a pour base $(\overrightarrow{u_2}\ ;\ \overrightarrow{v_2})$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$,$\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}$ sont coplanaires.

III. Positions relatives d'une droite et d'un plan

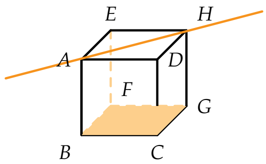
Propriété 16
Soit $\mathscr{P}$ et $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ une base de sa direction. Soit d une droite et $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d, alors

— si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires alors d et $\mathscr{P}$ sont sécants en un point.



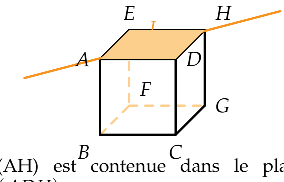
La droite (AH) est sécante en H au plan (DCG)
$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont linéairement indépendants

— si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires alors d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.



La droite (AH) est strictement parallèle au plan (BCG)

$\overrightarrow{AH}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{BG}$



(AH) est contenue dans le plan (ADH)

$\overrightarrow{AH}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et de $\overrightarrow{AE}$

Exercices

Pour les exercices suivants, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède ; I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$.

Exercice 83. Donner la position relative des deux droites citées :

1. (DB) et (EF) ;
2. (IJ) et (AF) ;
3. (IC) et (AB) ;
4. (JF) et (EH).

Exercice 84. Donner la position relative des deux plans cités :

1. (DCG) et (AEF) ;
2. (IJA) et (HDC) ;
3. (IJE) et (CKL).

Exercice 85. Donner la position relative de la droite et du plan cités :

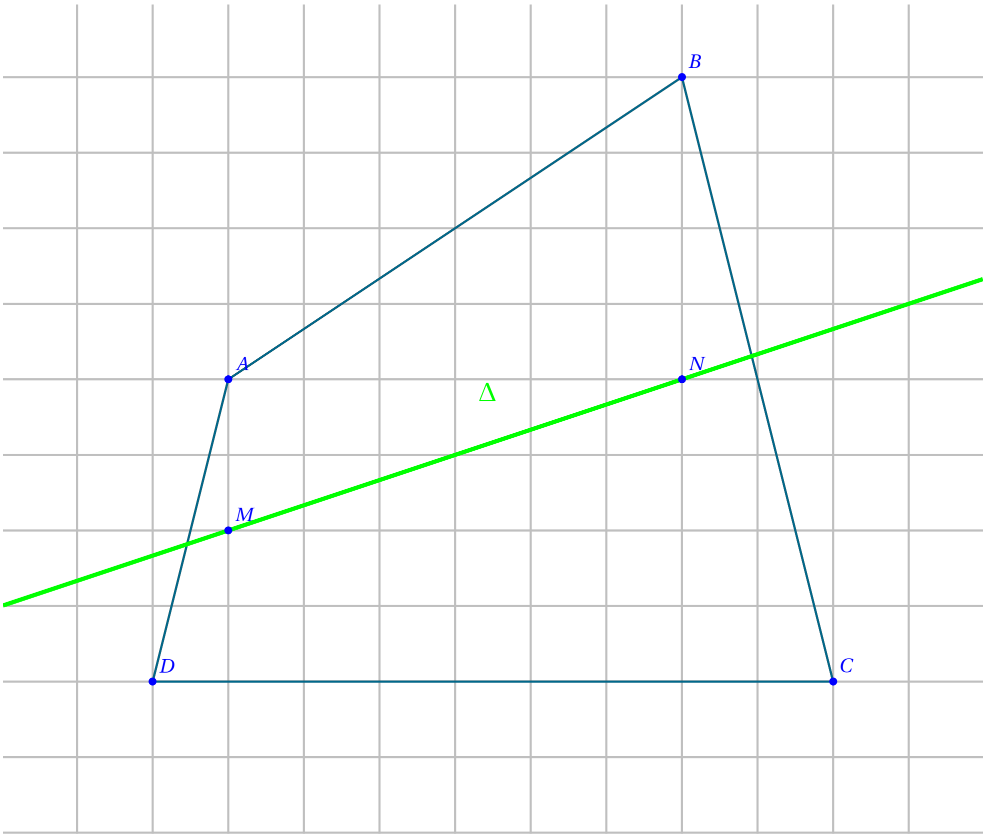
1. (IJ) et (ABF) ;
2. (IJ) et (BCG) ;
3. (KE) et (ABF).

Exercice 86. Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non-coplanaires de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{u'}$ et O un point de l'espace. Montrer que le plan $(O, \vec{u}, \vec{u'})$ est le seul plan de l'espace passant par O et parallèle aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice 87. On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$ et l'on désigne par $\mathscr{P}$ le plan passant par le milieu de $[AB]$ et parallèle aux droites (AA') et (BD').

1. La droite $(B'D)$ est-elle parallèle à ce plan ?
2. Montrer que $\mathscr{P}$ coupe en leur milieu quatre arêtes du cube.

Exercice 88. En pliant légèrement le quadrilatère (en carton) $ABCD$ suivant la droite Δ, peut-on poser sur une table l'objet de l'espace ainsi construit, de façon que les quatre points A, B, C et D soient en contacts avec la table ?


B
A
N
Δ
M
D
C

Fiche 5

Géométrie
Bases, repères de l'espace, coordonnées

I. Bases et repères

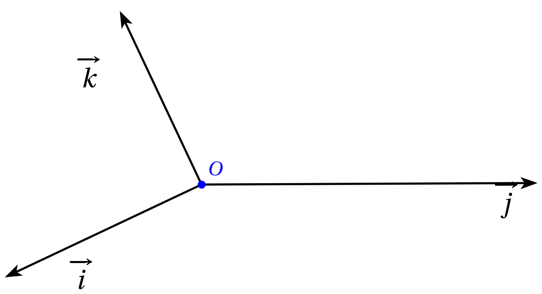
Définition 23

— On appelle base des vecteurs de l'espace, tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.

— Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base.

— On introduit souvent les points I ,J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

Représentation
La représentation d'un repère donnée par la figure ci-dessous est choisie de façon tout à fait arbitraire, elle est cependant d'usage fréquent.



Définition 24

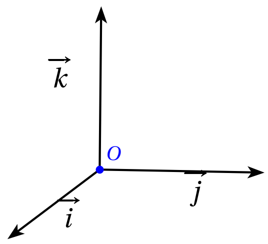
— La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et , $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

— Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dit orthogonal si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthogonale.

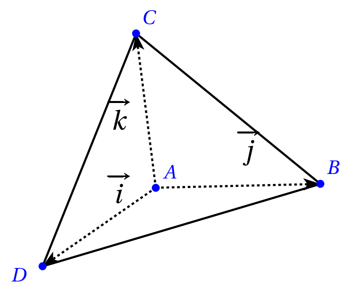
— La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dite orthonormale si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthogonale et si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et , $\vec{k}$ sont unitaires (de norme 1).

— Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est dit orthonormal si La base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormale.

Représentation
En utilisant la convention précédente et les règles de la perspective cavalière, il est fréquent de représenter un repère orthonormal de la manière ci-dessous.



Remarque
A tout repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace se trouve associé un quadruplet (O, I, J, K) de points de l'espace non coplanaires.
Réciproquement il sera commode d'associer à tout quadruplet de points non coplanaires (A, B, C, D) le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.



II. Coordonnées

Mise en place des coordonnées

Un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace étant donné, ainsi que les points I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$,$\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Considérons un point M de l'espace.

— Notons M' le point d'intersection de la droite passant par M dirigée par $\vec{k}$ avec le plan (OIJ).

— Notons M_3 le point défini par $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{M'M}$ Le quadrilatère $OM'MM_3$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$

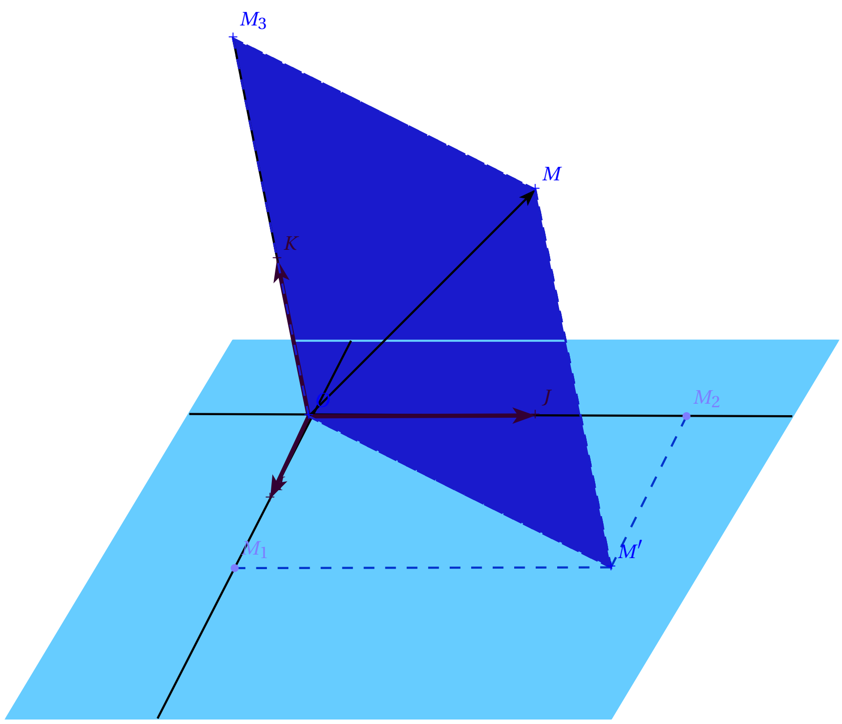
— Le point M_3 appartient à la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{OM_3} = z\,\vec{k}$

— Le point M' appartient au plan $0IJ)$ passant par O et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM_3} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

— En remplaçant dans 'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3}$ on obtient,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

— Cette écriture de $\overrightarrow{OM}$ est unique.



On a démontré le théorème suivant

Théorème 17
Un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace étant donné, pour tout point M, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce triplet est appelé triplet des coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. x est appelé l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa cote.

Comme pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, nous obtenons la version vectorielle de ce théorème

Théorème 18
Une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ étant donnée, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Ce triplet est appelé triplet des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. x est appelé l'abscisse de $\overrightarrow{u}$, y son ordonnée et z sa cote.

Remarque
Un repère étant fixé, pour exprimer que le point M a pour coordonnées (x, y, z), on utilise indifféremment les notations $M(x, y, z)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

De même, pour signifier que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, on utilise $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ ou $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Situations de référence, exemples

Axes et plans de coordonnées

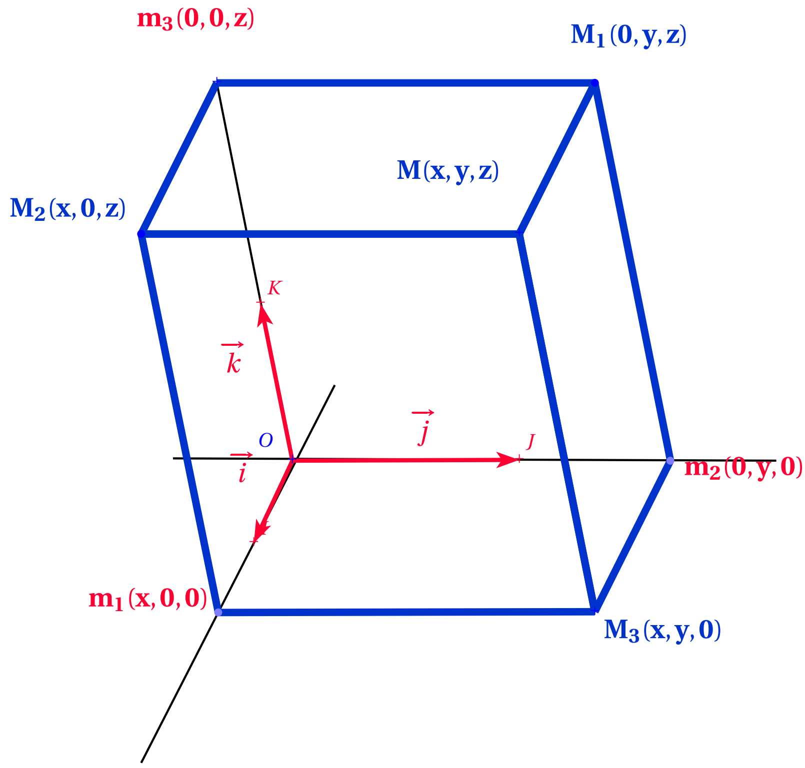
Les droites (OI), $OJ)$ et (OK) globalement appelées axes des coordonnées sont désignées respectivement par axe (Ox), axe (Oy) et axe (Oz).
Les plans (OIJ), (OJK) et (OKI) sont à leur tour désignés par plan (xOy), plan (yOz) et plan (zOx).
Le tableau ci-dessous exprime la condition traduisant le fait qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à l'un des plans (ou l'un des axes) de coordonnées.

plans	caractérisation	axes	caractérisation
(xOy)	$z = 0$	(Ox)	$z = 0$ et $y = 0$
(yOz)	$x = 0$	(Oy)	$z = 0$ et $x = 0$
(xOz)	$y = 0$	(Oz)	$x = 0$ et $y = 0$

Par exemple, étant donné un point $M(x, y, z)$ la condition $z = 0$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, c'est à dire que $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont coplanaires ou encore que M appartient au plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est à dire au plan (xOy).

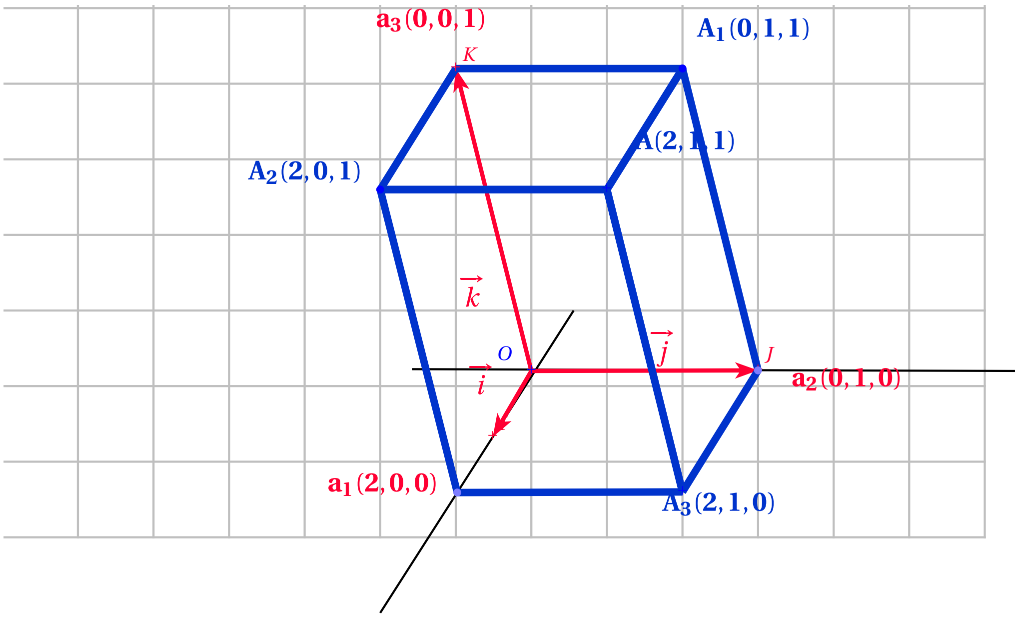
Parallélépipède associé à un point

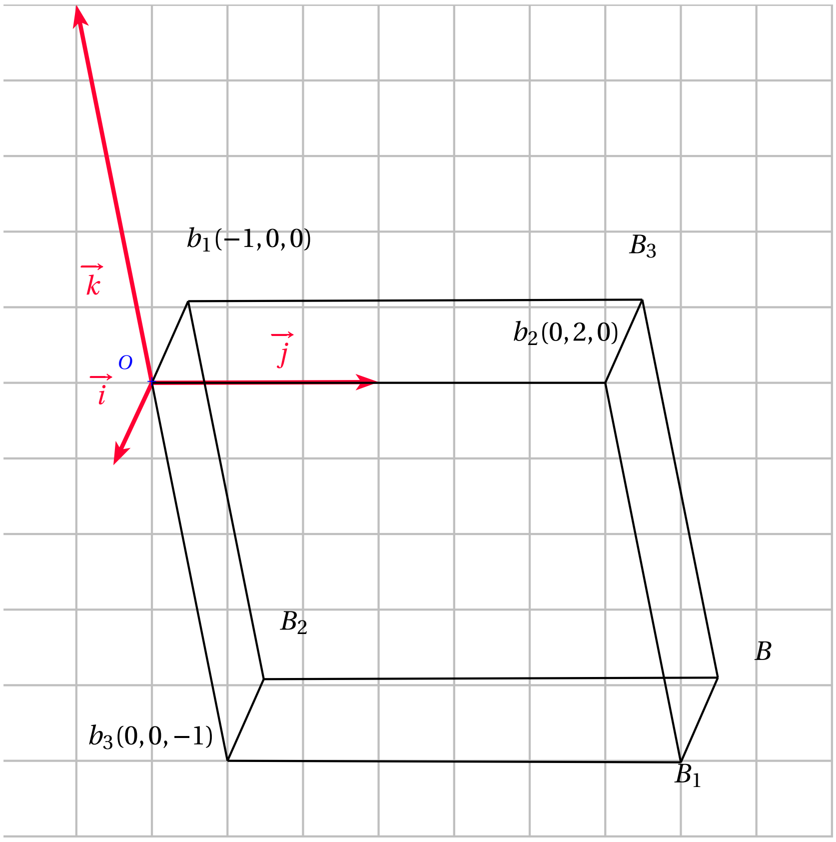
La configuration du parallélépipède à $M(x, y, z)$ est à maîtriser parfaitement : elle facilite certaines représentations graphiques et permet de retenir les résultats précédents.



Exemples

Placer les points $A(2,1,1)$ et $B(-1,2,-1)$. Dans chaque cas on reconstitue le parallélépipède associé en plaçant les points sur les axes des coordonnées : a_1, a_2 et a_3 et b_1, b_2 et b_3.





III. Propriétés des coordonnées

Elles sont analogues à celles du plan et peuvent être obtenues par ailleurs en usant des mêmes procédés : calcul vectoriel, relation de Chasles et unicité de l'écriture $x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$. Soulignons les résultats essentiels :

Théorème 19

- **Avec les vecteurs**
  Soit $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ deux vecteurs.
  - $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$
  - $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x',\ y = y',$ et $z = z'.$
  - $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\ , y + y',\ z + z').$
  - $\alpha\vec{u}$ (α réel) a pour coordonnées $(\alpha x, \alpha y, \alpha z).$
- **Liaison points-vecteurs**
  Soit $A(x, y, z)$ et $B(x', y', z')$ deux points de l'espace,
  le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x' - x,\ y' - y,\ z' - z).$
- **Avec les points**
  Soit $A(x, y, z)$ et $B(x', y', z')$ deux points de l'espace,
  - $A = B \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$
  - Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2}, \dfrac{z + z'}{2}\right).$

Exemples

Configuration

Les points $A(1,-2,1)$, $B(3,-1,0)$, $C(2,1,-2)$ et $D(0,0,-1)$ sont ils les sommets d'un parallélogramme ?
Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
Nous avons $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$ et $\overrightarrow{DC}(2,1,-1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

Alignement

Les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,\frac{3}{2})$ et $C(3,2,1)$ sont ils alignés ?
Etudions la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Nous avons $\overrightarrow{AB}(1,1,-\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AC}(2,2,-1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ s'obtiennent en multipliant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ par 2 donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**, donc les points A, B et C sont **alignés**.

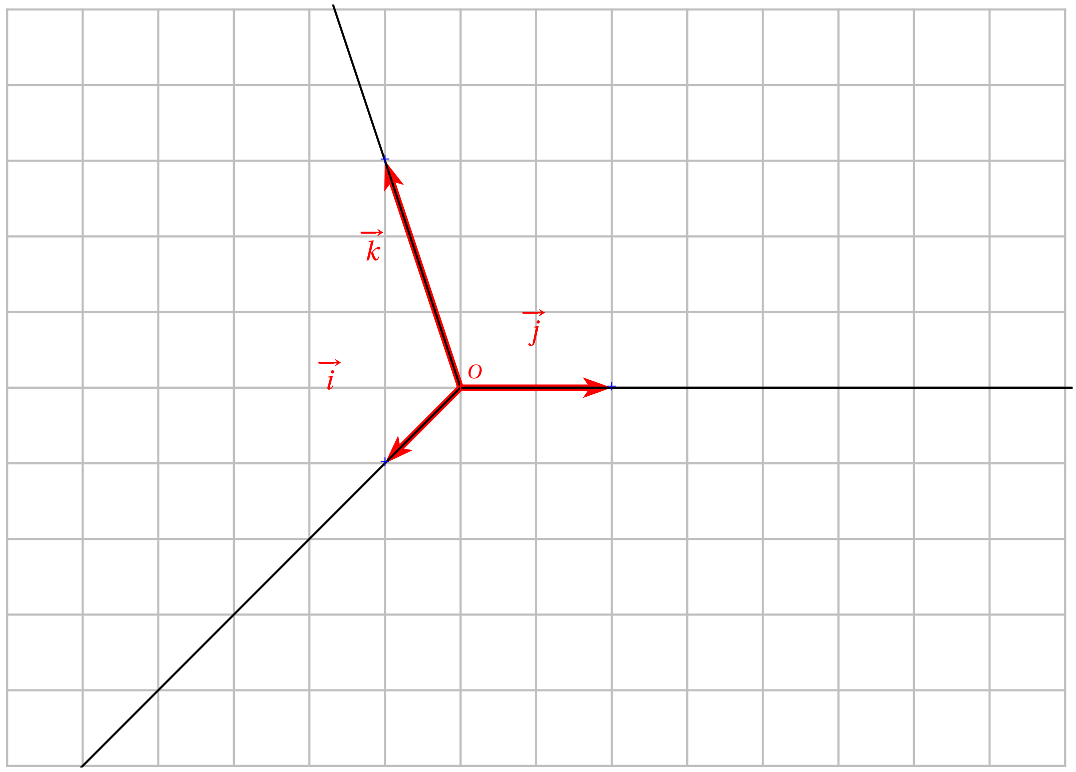
Coplanarité

Les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,\frac{3}{2})$,$D(-1,3,2)$, et $E(-1,-7,4)$ sont ils coplanaires ?
Nous avons $\overrightarrow{AB}(1,1,-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AD}(-2,3,0)$ et $\overrightarrow{AE}(-2,-7,2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, on peut appliquer la règle algébrique qui stipule alors que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. Le passage aux coordonnées conduit au **système** $\begin{cases} x-2y=-2 \\ x+3y=-7 \\ -\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$ qui admet pour couple solution (x,y), le couple $(-4,-1)$. Ainsi les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires. En conclusion les points A, B, D et E sont **coplanaires**.

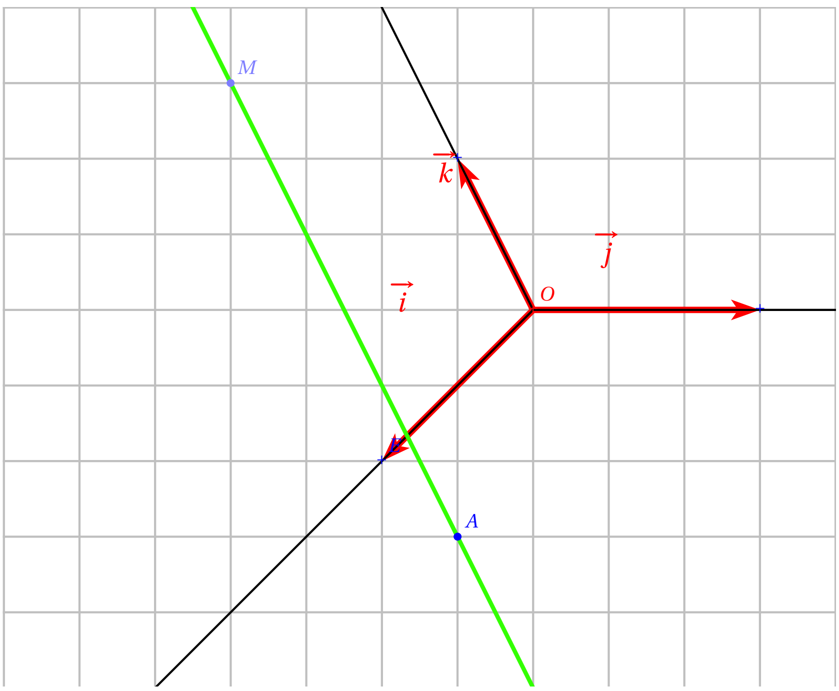
Exercices

Coordonnées

Exercice 89. Représenter les points suivants $A(3,2,1)$, $B(-1,-1,-1)$, $C(-1,2,-1)$ et $D\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$.



Exercice 90. Dans la figure ci-dessous $(AM)//(OK)$ et A appartient au plan (OIJ). Déterminer graphiquement les coordonnées de M.



Calculs de coordonnées

Dans les exercices suivants à partir de données initiales et d'une condition géométrique ou vectorielle, calculer les coordonnées de M.

Exercice 91. Données initiales : $A(1,-3,2)$, $B(1,-5,0)$, $C(1,0,1)$
Conditions : $\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Exercice 92. Données initiales : $A(1,0,3)$, $B(-1,-1,-4)$, $C(8,-2,5)$
Conditions : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$.

Exercice 93. Données initiales : $A(1,0,4)$, $B(3,-2,5)$, $C(1,1,1)$
Conditions : $ABMC$ est un parallélogramme.

Exercice 94. Données initiales : $A(-1,3,8)$, $B(0,-5,-6)$
Conditions : B est le milieu de $[AM]$.

Application à la colinéarité

Exercice 95. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

1. $A(1,-2,3)$, $B(0,4,1)$, $C(4,-20,9)$
2. $A(-1,-5,3)$, $B(3,-2,6)$, $C(4,-6,1)$
3. $A(1,2,5)$, $B(2,4,10)$, $C(-1,-2,-6)$

Exercice 96. Les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont ils alignés ? $A(1,-2,6)$, $B(2,5,-3)$, $C(4,-1,-3)$, $D(-6,-1,1)$, $E(0,3,-4)$, $F(1,-2,5)$.

Exercice 97. Étudier si les droites (AB), (CD) sont parallèles : $A(-3,1,4)$, $B(-2,-1,7)$, $C(-4,-1,-2)$, $D(-2,-5,4)$.

Application à la coplanarité

Exercice 98. On donne $A(2,0,-1)$, $B(1,-4,8)$ et $C(7,-12,22)$. Calculer $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. En déduire que les points O, A, B et C sont coplanaires.

Exercice 99. Étudier si les points A,B, C et D sont coplanaires.

1. $A(4,5,2)$, $B(-3,-1,7)$, $C(9,5,-3)$ et $D(1,2,0)$
2. $A(3,0,2)$, $B(1,1,1)$, $C(2,2,2)$ et $D(-2,5,1)$
3. $A(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},\sqrt{5},0)$, $C(\sqrt{5},\sqrt{7},0)$ et $D(\sqrt{7},\sqrt{11},0)$

Exercice 100. Soit $\overrightarrow{u}(-2,3,-1)$ et $\overrightarrow{v}(1,-1,-2)$

1. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{w}(4,-2,-18)$?
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w'}(-3,1,-1)$ sont ils coplanaires ?

Exercice 101. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{v}(-1,1,-2)$, et $\overrightarrow{w}(1,-2,-1)$ sont ils coplanaires ?

Exercice 102. Montrer que $A(1,1,1)$, $\overrightarrow{u}(0,-1,1)$, $\overrightarrow{v}(-2,-1,3)$, et $\overrightarrow{w}(-1,-1,-1)$ est un repère de l'espace.

Fiche 6

Géométrie
Produit scalaire dans l'espace

I. Définition du produit scalaire

Remarque
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires :

— s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

— s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui contient donc, par construction, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 25
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Règle fondamentale :

Toutes les propriétés du produit scalaire établies en Géométrie plane s'applique dans l'espace à des points et des vecteurs **coplanaires**. On dispose,par exemple, on dispose des propriétés suivantes.

Propriété 17

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$. Ainsi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

II. Propriétés algébriques

Propriété 18 (Symétrie et bilinéarite)
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

— $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

— $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Remarque
Seul le premier point recquiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

III. base orthonormée-repère orthonormé

Définition 26

— Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs est dite orthonormée si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

— Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

III.1. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété 19
Supposons que le vecteur $\vec{u}$ ait pour coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors

- $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$
- $\vec{v} \cdot \vec{j} = y$
- $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$

III.2. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 20

— Dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = xx' + yy' + zz'$$

— Dans une base orthonormée, la norme du vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ e

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

— La distance entre les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

III.3. Développements

Propriété 21
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

III.4. Formules de polarisation

Propriété 22
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

IV. Exercices

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 103. Soit a l'arête du cube $ABCDEFGH$. Calculer dans chaque cas $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u} = \overrightarrow{EB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$
2. $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{HF}$
3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$
4. $\vec{u} = \overrightarrow{EA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CH}$

Exercice 104. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Établir l'équivalence :

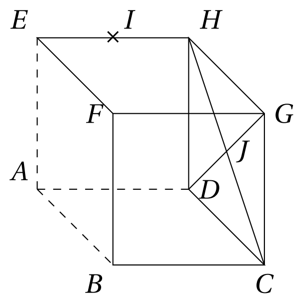
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Exercice 105. Démontrer la relation $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

Exercice 106. Dans un repère orthonormé de l'espace :

1. Rappeler la formule de la norme d'un vecteur ;
2. Énoncer la formule de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et la démontrer.

Exercice 107. On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

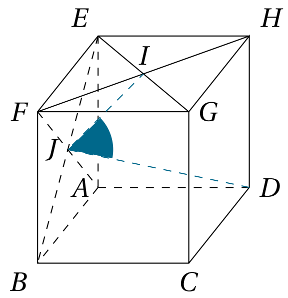


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2. $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3. $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5. $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6. $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

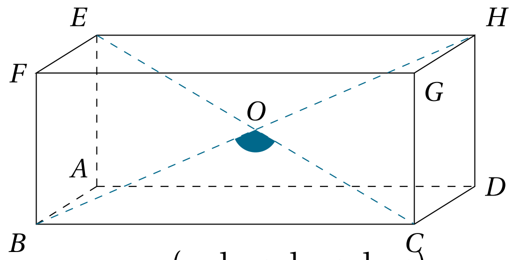
Calculs d'angles

Exercice 108. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J celui de la face $ABFE$.



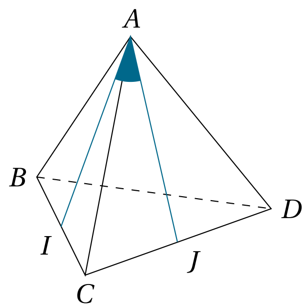
En se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, calculer, au degré prés, une mesure de l'angle $\widehat{IJD}$.

Exercice 109. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ au centième de degré prés.

Exercice 110. On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1. (a) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
   (b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré prés.

Exercice 111. Refaire l'exercice précédent en traitant le cas général d'un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$.

Exercice 112. On donne dans l'espace quatre points A,B, C et D non coplanaires. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CD]$.

1. Peut-on avoir $I = J$?
2. Existe-il des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?
3. Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$
4. Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que
$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$
5. Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

Fiche 7

Géométrie
Produit scalaire dans l'espace

I. Orthogonalité

Définition 27
On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Théorème 20
- Orthogonalité de deux droites. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Orthognalité droite- plan. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.
  - Pour tous les points M et N de $\mathscr{P}$ $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.
  - Pour tout couple $(\vec{v}, \overrightarrow{v'})$ de vecteurs de $\mathscr{P}$, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{v'} = 0$$

II. Vecteur normal à un plan

Définition 28
Étant donné un plan $\mathscr{P}$, tout vecteur directeur d'une droite orthogonal à $\mathscr{P}$ est appelé un vecteur normal à $\mathscr{P}$

Théorème 21
- Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul. l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ un plan. Quel que soit le point A de $\mathscr{P}$ et le vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On dit que le plan est le plan passant par A et de vecteur normal à $\vec{n}$.

III. Projection orthogonale

Définition 29
Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d.

Propriété 23
Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M à la droite d.

Définition 30
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathscr{P}$.

Propriété 24
Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M au plan e $\mathscr{P}$.

Le problème

Soit $\mathscr{P}$ un plan défini comme le plan passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Etant donné un point M de l'espace, on note M' et m les projetés orthogonaux de M sur $\mathscr{P}$ et sur la droite $d(A, \overrightarrow{n})$. Il s'agit d'exprimer $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{Am}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$.

Une méthode

Nous avons $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{Am}$. Exploitons les propriétés de la figure :

1. $m \in d(A, \overrightarrow{n})$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{Am} = t\overrightarrow{n}$
2. $M' \in \mathscr{P}$, $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Il en découle $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + t\overrightarrow{n}$ puis $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = t \left\| \overrightarrow{n} \right\|^2$. Nous en déduisons successivement

$$t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|^2}$$

donc

$$\overrightarrow{Am} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|^2} \overrightarrow{n}$$

et

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|^2} \overrightarrow{n}$$

IV. Exercice

IV.1. Orthogonalité

Exercice 113. Démontrer que si un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $(\mathscr{P})$, alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exercice 114. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 115. Même exercice que le précédent avec les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} k+1 \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

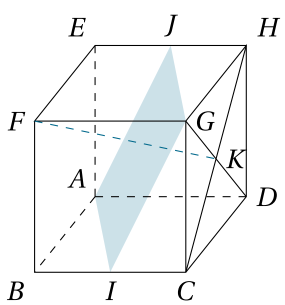
Exercice 116. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les deux points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 117. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les quatre points $A(-1;1;2)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;3;1)$ et $D(-8;2;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 118. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



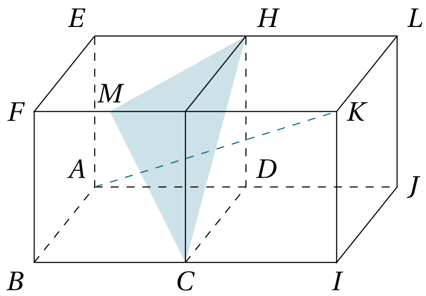
Sans utiliser de repère :

1. démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

2. (a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;
   (b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;
   (c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

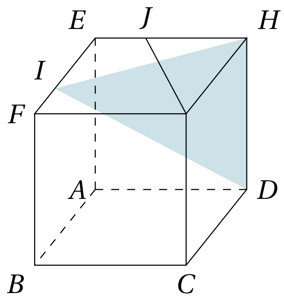
Exercice 119. Reprendre l'exercice précédente en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

Exercice 120. On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.
3. Conclure.

Exercice 121. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).
4. Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{13};\dfrac{7}{13};1\right)$ dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice 122. $ABCDEFG$ est un cube. Montrer que la grande diagonale (AG) coupe les triangles équilatéraux EBD et FCH en leurs centres respectifs I et J et que de plus $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$.

Exercice 123. Montrer que, quels que soient les points A, B, C et D de l'espace :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

En déduire que si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont formés de droites orthogonales, il en est de même du troisième couple.

Exercice 124. Un tétraèdre $ABCD$ est tel que (AB) est orthogonale au plan (BCD).

1. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le triangle ACD est rectangle en C si et seulement si le triangle BCD est rectangle en C.

Exercice 125. Soit un tétraèdre $ABCD$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si,
$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$
2. Démontrer que si dans un tétraèdre $ABCD$ les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales d'une part et les arêtes (BC) et (AD) d'autre part sont orthogonales alors les arêtes (BD) et (AC) sont aussi orthogonales.
3. On suppose les conditions de la question 2 satisfaites. Soit A' le projeté orthogonal de A sur la face (BCD). Démontrer que A' est l'orthocentre du triangle BCD.
Soit B', C' et D' les projetés respectifs de B, C et D sur la face opposée. Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.
Remarque
Un tel tétraèdre où les hauteurs sont concourantes est appelé tétraèdre orthocentrique.

Exercice 126. Dans un tétraèdre $ABCD$, soit A' le projeté orthogonal de A sur (BCD).

1. Comparer $\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$, puis $\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{BD}$ avec $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$.
2. En déduire que si A' est l'orthocentre de BCD alors le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique.

Exercice 127. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête a et O le point défini par $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$. O est appelé le centre du tétraèdre.
K est le milieu de $[BC]$ On appelle centre de gravité du triangle BCD le point A' vérifiant $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{0}$. De même B' est le centre de gravité de ACD,C' celui de ABD et D' celui de ABC.
On appelle médiane du tétraèdre toute droite joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée.
On appelle bimédiane du tétraèdre toute droite joignant les milieux de deux arêtes opposées.

1. Démontrer que A' appartient à BCD. On admettra qu'il en est de même pour les centres de gravité. Ils appartiennent au plan contenant le triangle.
2. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Deux quelconques des arêtes opposées sont orthogonales.
   (b) Chaque médiane est orthogonale à la face opposée
   (c) le point O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.
   (d) Exprimer en fonction de a, les longueurs DK, DA' et AA'.
   (e) On note V le volume du tétraèdre et R le rayon de la sphère circonscrite. Donner en fonction de a l'expression de V et celle de R.
   (f) Évaluer $\cos\widehat{AOB}$ et $\cos\widehat{AKD}$ et donner une valeur apporchée de ces deux angles en degré, à 0,01° près.
   (g) Soit Ω le milieu de $[AA']$. Montrer que le repère (Ω, B, C, D) est orthogonal et que $\left\|\overrightarrow{\Omega B}\right| = \left\|\overrightarrow{\Omega C}\right| = \left\|\overrightarrow{\Omega D}\right|$

Fiche 8

Géométrie Analytique
Plans de l'espace

Dans tout le chapître l'espace est muni d'un repère ORTHONORME $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. Équation cartésienne d'un plan défini par un vecteur normal et un point

I.1. Étude préliminaire

Le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et admettant le vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal, peut être défini comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
La traduction analytique de cette relation donne $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,soit en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a ou b ou c non nul.
Réciproquement, étant donnés trois réels a,b, c dont l'un au moins est non nul, montrons que l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.
Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{P}$, (il en existe, pourquoi ?) : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.
Alors, $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Ainsi

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

> **Théorème 22**
> Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul. Les plans orthogonaux à $\vec{n}$ sont les plans dont une équation cartésienne est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d réel.

Remarque
Le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal à $\vec{k}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{i}, \vec{j})$ est $z = 0$.
Le plan $(0, \vec{i}, \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{j}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{i}, \vec{k})$ est $y = 0$.
Le plan $(0, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{i}$, une équation cartésienne de$(0, \vec{j}, \vec{k})$ est $x = 0$.

Exemple
Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(-2, 1, 3)$ et orthogonal à (BC) avec $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $(3,3,-3)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,1,-1)$, colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, est donc également un vecteur normal à ce plan. Traduisons analytiquement la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$, avec $M(x,y,z)$. On obtient $(x+2)+(y-1)-(z-3)=0$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x+y-z+4=0$.

II. Distance d'un point à un plan

Théorème 23
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $M(x_0,y_0,z_0)$ un point de l'espace. La distance du point M_0 au plan $\mathscr{P}$ est calculée par

$$\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration : Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, on peut écrire $\left\|\overrightarrow{n}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Soit A un point quelconque du plan $\mathscr{P}$, notons (x_1,y_1,z_1) ses coordonnées. On dipose de l'égalité $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. On a démontré dans la fiche précédente que la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est $\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)=ax_0+by_0+cz_0-(ax_1+by_1+cz_1)=ax_0+by_0+cz_0+d.$

On obtient la formule de l'énoncé en remplaçant $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|$ et $\left\|\overrightarrow{n}\right\|$ par leurs expressions analytiques.□

Exemple
Calculer la distance du point $M_0(5,2,-3)$ au plan d'équation cartésienne $x+4y+8z+2=0$
Appliquons simplement le résultat du théorème :

$$d(M_0,\mathscr{P})=\frac{|1\times5+4\times2+8\times(-3)+2|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{81}}=1$$

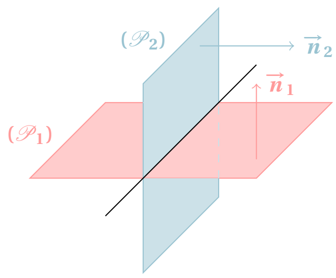
III. Plans parallèles

Propriété 25
Les plans $\mathscr{P}\ :\ ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}'\ :\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont **parallèles** si, et seulement si, (a,b,c) et (a',b',c') sont **proportionnels**.

Démonstration : Deux plans sont parallèles si, et seulement si, un vecteur normal à l'un est aussi normal à l'autre. Si et seulement si les vecteurs obtenus par à partir des équations respectives des deux plans sont colinéaires. □

IV. Plans perpendiculaires

Définition 31
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.



Propriété 26
Les plans $\mathscr{P}\ :\ ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}'\ :\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa'+bb'+cc'=0$.

V. intersection de deux plans

Les plans $\mathscr{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\overrightarrow{n'}$ sont sécants si, et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires. Dans ces conditions, leur droite d'intersection est dirigée par un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

VI. Exercices

Exercice 128. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(3,-1,2)$ et $\overrightarrow{n}(1,0,-4)$.

Exercice 129. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{n}(1,1,-2)$.

Exercice 130. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(5,-1,-6)$ et $\overrightarrow{n}(1,1,1)$.

Exercice 131. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(-2,1,2)$ et $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$.

Exercice 132. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(\sqrt{2},3,0)$ et $\overrightarrow{n}=-3\overrightarrow{k}$.

Exercice 133. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal avec $A(3,4,5)$ et $\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$.

Exercice 134. Dans chaque cas,vérifier que l'équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal à ce plan.

1. $3x-5y+z-1=0$

2. $x = y$
3. $3z - x - 3 = 0$
4. $y = 1 - 2x$

Exercice 135. Dans chaque cas donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ (déterminer d'abord un point et un vecteur normal)

1. $\mathscr{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$ où $A(-1,3,1)$ et $B(0,5,-3)$
2. $\mathscr{P}$ est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3,0,4)$, $B(-1,1,1)$ et $C(2,0,0)$.

Exercice 136. On donne les points $A(3,-1,4)$ et $B(0,5,1)$. Montrer que (AB) est orthogonale au plan d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$.

Exercice 137. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(1,-1,1)$ et $\mathscr{P} : 2x + y - z - 3 = 0$.

Exercice 138. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(2,1,0)$ et $\mathscr{P}$ le plan passant par 'origine du repère et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-1,-1)$.

Exercice 139. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(0,0,0)$ et $\mathscr{P}$ le plan médiateur segment $[AB]$ où $A(-4,2,1)$ et $B(5,3,-7)$

Exercice 140. Calculer la distance du point M au plan $\mathscr{P}$ avec $M(-4,4,-9)$ et $\mathscr{P} : \dfrac{x}{2} + y + \dfrac{z}{3} - 6 = 0$.

Exercice 141. Prouver que la distance d de M à Δ droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$ vérifie la relation

$$d^2 = AM^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n})^2}{\|\overrightarrow{n}\|^2}$$

Exercice 142. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ ayant pour coordonnées $(1,1,1)$, on désigne par D la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{n}$ et par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à D passant par O. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, démontrer que les points $A(1,0,2+\sqrt{3})$ et $B(4+3\sqrt{2},1,1)$ sont à égale distance de la droite D et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 143. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $A(0,0,0)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{v}(0,1,-1)$

Exercice 144. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $A(1,-2,-1)$, $\overrightarrow{u}(-1,3,4)$ et $\overrightarrow{v}(0,0,2)$.

Exercice 145. Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donner une équation cartésienne du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $A(2,1,-1)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{v}(-1,-2,1)$.

Exercice 146. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (ABC) :

$$A(1,-1,3),\ B(2,5,-1),\ \text{et } C(-3,4,0)$$

Exercice 147. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan $3x - y + z - 5 = 0$ passant par le point $A(-1,1,1)$.

Exercice 148. Prouver que les points $A(0,2,-1)$, $B(-1,1,-2)$ et $C(1,0,3)$ définissent un plan parallèle au plan d'équation $2x - y - z + 4 = 0$

Exercice 149. Étant donnés deux plan $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ de l'espace, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{P}_\infty$ contient une droite orthogonale à $\mathscr{P}_\epsilon$
2. $\mathscr{P}_\epsilon$ contient une droite orthogonale à $\mathscr{P}_\infty$
3. $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\epsilon$ sont perpendiculaires.

Exercice 150. Les plans d'équations $3x - y + 2z - 1 = 0$ et $x + 5y + z - 2 = 0$ sont ils perpendiculaires ?

Exercice 151. Soit λ un réel fixé. Montrer que l'équation :

$$\lambda x + (\lambda + 1)y + z - 1 = 0$$

est l'équation d'un plan P perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$ et que P passe par $A(1, -1, 2)$.

Exercice 152. Montrer que chacune des équations ci-après est celle d'un plan parallèle ou perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées (xOy), (xOz) et (yOz).

1. $3x - z + 1 = 0$
2. $y - 5 = 0$
3. $y + 2z = 1$
4. $x = y$
5. $z + 4 = 0$
6. $2x + 5 = 0$

Exercice 153. Montrer que les plans d'équations $3x - 2y - z - 5 = 0$ et $5x + y + 2z - 4 = 0$ sont sécants selon une la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ avec $A(1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{u}(3, 11, -13)$.

Exercice 154. Prouver que les plans d'équations $x - y + 1 = 0$ et $z - x - 1 = 0$ se coupent selon une droite contenue dans le plan d'équation $y - z = 0$.

Fiche 9

Géométrie Analytique Droites de l'espace

I. Droites de l'espace

I.1. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, $\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. En bref $D = \mathscr{D}(A, \vec{u})$. La droite D peut être décrite comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$,t étant un nombre réel quelconque. Ainsi $M(x, y, z)$ appartient à D signifie : il existe un réel t tel que $x = x_0 + t\alpha$, $y = y_0 + t\beta$ et $z = z_0 + t\gamma$. Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition 32
Le système de relations $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\vec{u}$ supposé non nul).

Remarques

- La notation $(t \in \mathbb{R})$ a pour vocation de rappeler que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point associé $M(x, y, z)$ décrit la droite $\mathscr{D}(A, \vec{u})$.
- La lettre t est le paramètre de la représentation mais d'autres lettres peuvent être utilisées.

Exemple

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(-1, 2, -3)$ et $B(1, -1, 1)$. La droite (AB) n'est autre que la droite $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Or $\vec{u}\,(2, -3, 4)$, donc une représentation paramétrique de la droite est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{9.1}$$

Notons que la droite (AB) est aussi la droite $\mathscr{D}(B, \vec{u})$ d'où la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{9.2}$$

Cet exemple rend visible qu'une même droite peut avoir plusieurs représentations paramétriques. En effet posons $s = t - 1$ dans le système de ralation (1) et observons que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, il en est de même pour s. Dans ces conditions

$$\begin{cases} x = -1+2(1+s) \\ y = 2-3(1+s) \\ z = -3+4(1+s) \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{9.3}$$

Ce qui donne après réduction

$$\begin{cases} x = 1+2s \\ y = -1-3s \\ z = 1+4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{9.4}$$

On retrouve le système (2) à la lettre près utilisée comme paramètre.

I.2. Système de deux équations linéaires

Exemple
Considérons les plans $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ d'équations :

$$\mathscr{P}_\infty \ : \ 2x+y-z-2=0 \ \text{ et } \mathscr{P}_\in \ : \ x+3y+7z-11=0,$$

de vecteur normal respectif $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$ et $\overrightarrow{n_2}(1,3,7)$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathscr{P}_\infty$ et $\mathscr{P}_\in$ sont sécants selon une droite que nous appellerons $\mathscr{D}$.
L'équivalence qui en résulte est

$$M(x,y,z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z-2=0 \\ x+3y+7z-11=0 \end{cases}$$

conduit à dire que $\mathscr{D}$ est définie par le système des deux équations linéaires.

De manière générale,

Définition 33
Lorsque (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points $m(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

est une droite que l'on dit « définie par le système des deux équations linéaires ».

Exemple
Donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le système $\begin{cases} 2x+y-z-2=0 \\ x+3y+7z-11=0 \end{cases}$.

Utiliser l'une des coordonnées comme paramètre.

Multiplions la seconde équation par 2 et effectuons la différence avec la première équation, nous obtenons $-5y-15z+20=0$, soit $y=-3z+4$.
Reportons dans la première équation, il vient $2x+(-3z+4)-z-2=0$, soit $x=2z-1$.

Une représentation paramétrique de la droite D est $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

I.3. Intersection d'une droite et d'un plan

Le problème posé

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et D la droite passant par $A(x_0,y_0,z_0)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$. En premier lieu, il est clair que D et $\mathscr{P}$ sont sécants si, et seulement si, $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ ne sont pas orthogonaux, c'est à dire si, et seulement si, $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$. Il s'agit, sous une telle hypothèse, d'obtenir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ et D.

Exemple type

Déterminer le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+2y-z+2=0$ et de la droite $\mathscr{D}(A,\overrightarrow{u})$ avec $A(2,1,-4)$ et $\overrightarrow{u}(3,-2,4)$.

Noter qu'avec $\overrightarrow{n}(1,2,-1)$ normal à$\mathscr{P}$, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=-5$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}\neq 0$.

Soit $M(x,y,z)$ le point de D défini par $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=-4+4t \end{cases}$, t est réel. Le point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $x+2y-z+2=0$, c'est à dire :

$$(2+3t)+2(1-2t)-(-4+4t)+2=0.$$

Soit, $-5t+10=0$, d'où $t=2$. En reportant la valeur de t dans la représentation paramétrique de D, on détermine les coordonnées du point d'intersection de D et de $\mathscr{P}$ soit $(8,-3,4)$.

II. Exercices

Exercice 155. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A,\overrightarrow{u})$ avec $A(-1,2,5)$ et $\overrightarrow{u}(-1,1,4)$.

Exercice 156. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(5,0,-1)$ et $B(8,-3,2)$.

Exercice 157. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à (AB) passant par C avec $A(1,0,-3)$, $B(-3,1,0)$ et $C(-1,6,2)$.

Exercice 158. Donner une représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan d'équation $2x-z+1=0$ passant par $A(-2,1,0)$

Exercice 159. On considère la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-t\sqrt{2} \\ y=2t-1 \\ z=t\sqrt{2}-1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}(1,-\sqrt{2},-1)$ est il un vecteur directeur de D ?
2. La droite D est elle contenue dans le plan d'équation $3x+\sqrt{2}y+z-2+\sqrt{2}=0$?
3. Montrer que la plan orthogonal à D passant par le point $A(\sqrt{2},2,-\sqrt{2})$ contient l'origine du repère.
4. On donne le point $C(5,-2,-7)$ et $D(1,-4\sqrt{2},1)$, montrer que le milieu du segment $[CD]$ appartient à la droite D.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à D passant par le point $P(-1,0,-\sqrt{2})$. Cette droite passe-t-elle par le point $Q(\sqrt{2}-1,-2,-2\sqrt{2})$?

Exercice 160. Après avoir vérifié que le système de deux équations linéaires définit une droite , donner une représentation paramétrique de la droite D définie par ce système

1. $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} 2 + y - 5z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$.
4. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} (\beta^2 + \gamma^2)x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z = 0 \\ (\beta + \gamma)x - \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases}$. $(\alpha, \beta, \gamma$ trois réels non nuls avec $\beta \neq \gamma$.

Exercice 161. Montrer que le plan P d'équation $3x + 2y - z + 1 = 0$ est sécant avec chacun des axes de coordonnées et calculer les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 162. Soit a,b et c trois réels non nuls et P l eplan d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection A,B et C de P avec les axes (Ox), (Oy) et (Oz) ?

Exercice 163. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Dans chaque cas, examiner si $\mathscr{D}$ est sécante avec le plan$P$ et, si oui, calculer les coordonnées du point d'intersection.

1. $P = (xOy)$
2. $P = (xOz)$
3. $P = (yOz)$
4. $P\ :\ 2x + y - z = 0$
5. $P\ :\ -x + 2y - z + 1 = 0$
6. P ets le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$ passant par $A(-1, 0, 1)$
7. P orthogonal à D passant par $I(1, 0, 0)$

Exercice 164. Déterminer le projeté orthogonal de O sur le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$

Exercice 165. On considère les plans $P_1\ :\ x - y + z - 3 = 0$ et $P_2\ :\ 2x + y - 2 = 0$.

1. Montrer que les deux plans sont sécants selon une droite D
2. Soit A le point de coordonnées de $(1, 1, 1)$. Donner une équation cartésienne du plan P contenant la droite D et perpendiculaire à P_1.
3. Calculer la distance de A à P_1 de A à P puis en déduire la distance de A à D.

Exercice 166. Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, et A le point de coordonnées $(1, -1, 2)$.

1. Déterminer le réel t de façon que le point M de D qui lui est associé vérifie (AM) orthogonal à D.
2. En déduire la distance de A à la droite D.

Exercice 167. On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C((0, 0, c)$ où a, b, c sont des réels non nuls. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) et en déduire que la distance h du point O à ce plan vérifie

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Fiche 10

Géométrie Problèmes de BAC

I. Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points $A(8\,;\,0\,;\,8)$,$B(10\,;\,3\,;\,10)$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équations paramétriques :

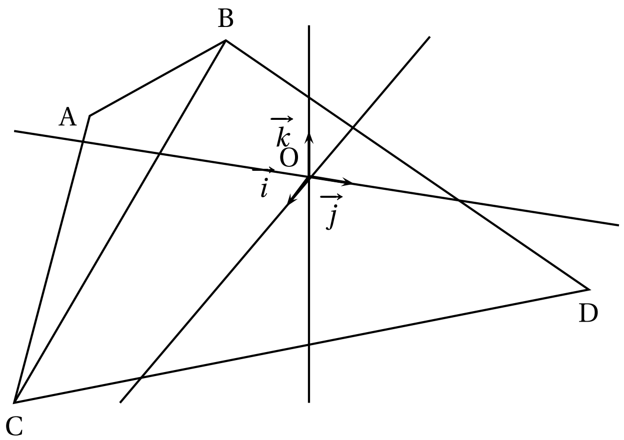
$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. (a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
   (b) Démontrer que $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires.
2. (a) Le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
   (c) Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{P}$ est indépendante de M.
   (d) Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (xOy).
3. La sphère $\mathscr{S}$ est tangente à $\mathscr{P}$ au point C$(10\,;\;1\,;\,6)$. Le centre Ω de $\mathscr{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathscr{P}$, du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

II. Exercice 2

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

Partie B

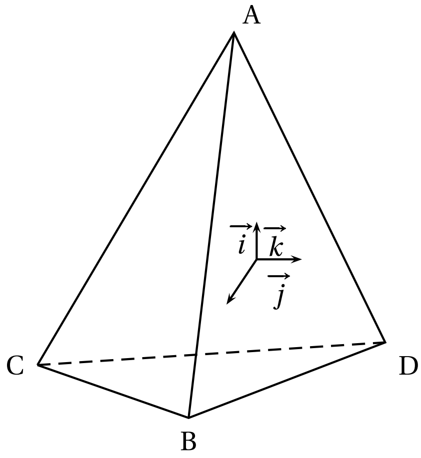
1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   (b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

III. Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(0\,;\,0\,;\,3),\ \mathrm{B}\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1\right),\ \mathrm{C}\left(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1\right),\ \mathrm{D}\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right).$$

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



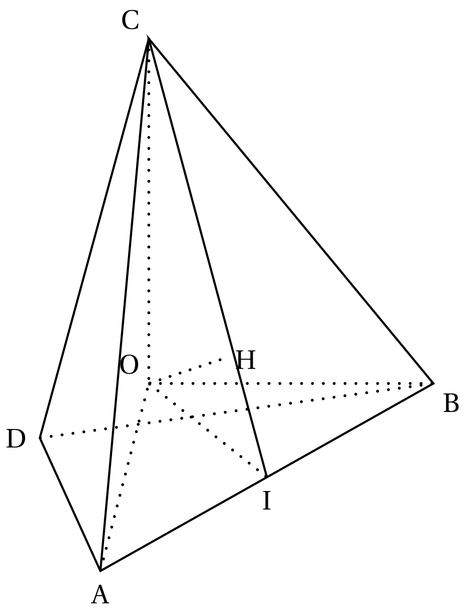
Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

IV. Exercice 4 version du Bac métropole 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par
$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   (a) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   (b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $\text{OH} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   (c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

V. Exercice 4 Version proposée par l'A. P. M. E. P.

OABC est un tétraèdre tel que :

— OAB, OAC, OBC, sont trois triangles rectangles en O.

— OA = OB = OC.

Le dessin fourni en annexe sera complété au fur et à mesure de l'avancement du problème, et rendu avec la copie.
(Je propose que seul le tétraèdre OABC soit représenté, avec une disposition qui permette ultérieurement de bien distinguer les points O et K, les droites (CK) et (CO), les droites (AK) et (AO), et de placer le repère dans la disposition habituelle).

1. On nomme K le point du plan ABC qui est le point de concours des trois médiatrices du triangle ABC. Montrer que K est aussi l'isobarycentre de A, B, C.
2. On choisit la distance OA comme unité de longueur, et on munit l'espace du repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right)$, qui est alors orthonormé.
   (a) Déterminer les coordonnées de K.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal au plan ABC.
   (c) Calculer la distance de O au plan ABC.
3. On rappelle que, dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est défini de deux façons équivalentes :

   — c'est le plan orthogonal au segment et passant par son milieu

   — c'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à égale distance des deux extrémités du segment.

   (a) Montrer que le plan médiateur P du segment [AB] est le plan COK.
   Déterminer le plan médiateur Q du segment [BC].

(b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace situés à égale distance des trois points A, B, C.

4. Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK}$, et soit Ω l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
   (a) Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].
   (b) Montrer que Ω est le centre d'une sphère S contenant les quatre sommets du tétraèdre ABCO (S se nomme sphère circonscrite au tétraèdre).
5. Les unités d'aire et de volume étant celles attachées au repère, calculer :
   - l'aire du triangle ABC ;
   - la mesure de la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD ;
   - le volume du tétraèdre ABCD ;
   - le volume de la sphère S.

Thème 3 Analyse-Suites

Fiche 1

Analyse- SUITES DE RÉELS
Suites arithmétiques et géométriques

I. Résumé

Le tableau ci-dessous rassemble les principaux résultats obtenus en classe de première.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Caractérisation par une formule explicite	$u_n = r \times n + b$	$u_n = k \times q^n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
S= somme des N termes consécutifs	$S = \begin{pmatrix} moyenne \\ des\ termes \\ extrêmes \end{pmatrix} \times N$	$S = \begin{pmatrix} premier \\ terme \end{pmatrix} \times \dfrac{1-q^N}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

II. Exemples

Calculer les sommes $A = 5+9+13+\ldots+61$ et $B = 5^2+5^3+\ldots+5^{10}$.

- A est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4, le nombre de termes est $\dfrac{61-5}{4}+1 = 15$ et la moyenne des termes extrêmes est 33. Donc $A = 33 \times 15 = 495$.
- B est la somme de neuf termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 5.
  Donc $B = 5^2 \times \dfrac{1-5^9}{1-5}$ soit $B = 12207025$.

Les résultats relatifs à la somme de termes consécutifs résultent de deux formules sommatoires suivantes qu'il est important de connaître :

$$1+2+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$1+q+\ldots+q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q}\ (si\ q \neq 1)$$

III. Suites arithmético-géométriques

Définition 34
On appelle suite arithmético-géométrique une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme : quel que soit l'entier n, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent des réels.

Remarque

— si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique

— si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.

III.1. Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le cas où $a \neq 1$

— Rechercher une suite constante (c) vérifiant la relation de récurrence.

— Prouver que la suite $(u_n - c)$ est géométrique de raison a

— Exprimer le terme général de la suite $(u_n - c)$ en fonction de n

— Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

III.2. Exemple

Soit (C_n) la suite définie par $C_{n+1} = 1,005 \times C_n - 400$, de premier terme 50000. Exprimer le terme général de cette suite en fonction de n.

— Résolvons l'équation d'inconnue x, $x = 1,005 \times x - 400$. Après quelques prouesses techniques, on obtient $-0,005x = -400$ donc $x = 80000$. La suite (α_n) de premier terme 80000, vérifiant la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = 1,005 \times \alpha_n - 400$ est une suite constante.

— Prouvons que la suite $(C_n - \alpha)$ est géométrique de raison a :
Soit n un entier naturel,

$$\begin{array}{cccc} C_{n+1} & = & 1,005\times C_n - 400 & \\ \alpha & = & 1,005\times\alpha - 400 & \\ \text{Soustrayons} & \text{la} & \text{deuxième égalité} & \text{à la première} \\ C_{n+1}-\alpha & = & 1,005(C_n-\alpha) & \end{array}$$

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, $C_{n+1}-\alpha = 1,005(C_n-\alpha)$. La suite $(C_n - 80000)$ est donc géométrique de raison $1,005$. Le premier terme est $C_0 - 80000$ c'est à dire -30000.

— Exprimons le terme général de la suite $(C_n - 80000)$ en fonction de n :
$C_n - 80000 = (C_0 - 80000)\times 1,005^n$. On obtient $C_n - 80000 = -30000\times 1,005^n$

— Exprimons alors le terme général de (C_n) en fonction de n.
De l'étape précédente, on déduit que, pour tout entier naturel n, $C_n = 80000 - 30000\times 1,005^n$

IV. Exercices

Exercice 168. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite arithmétique de raison r, vérifiant :

1. $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{3}{2}$
2. $u_5 = 1$ et $u_{11} = 8$
3. $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{100} = 2$

Exercice 169. n désigne un entier naturel, dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n. (u_n) est une suite géométrique de raison q, vérifiant :

1. $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$
2. $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$
3. $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = 24573$

Exercice 170. Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique et préciser la raison.

1. $u_n = 3^{n+2}$
2. $u_n = 5^{1-3n}$
3. $u_n = (-1)^n \times 6^{2n+3}$
4. $u_n = 2 + (2 + 2^2 + \ldots + 2^n)$

Exercice 171. Calculer les sommes :

1. $A = 8 + 13 + 18 + \ldots + 2018 + 2023$
2. $2^2 + 2^5 + 2^8 + \ldots + 2^{20}$
3. $x + x^2 + \ldots + x^n$ (lorsque $x \neq 1$, puis $x = 1$).

Suites arithmético-géométriques

Exercice 172. Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite en fonction de n.

— $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 5$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n - 300$

— $u_0 = 10000$ et $u_{n+1} = 0,90u_n + 300$

Exercice 173. TOTORO va voir son banquier pour obtenir un crédit de 10000 euros. Celui-ci lui propose de rembourser une somme de 400 euros par mois avec un taux mensuel de 0,05%. Combien de temps va mettre TOTORO pour rembourser son crédit ?

Fiche 2

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement global d'une suite

Suites monotones

Définition 35
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est non monotone si elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Techniques d'étude :
Trois techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

1. **La technique fonctionnelle**.
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
2. **Les techniques algébriques**.
   Elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
   — soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
   — soit en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier n, $u_n > 0$.
   — le raisonnement par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition 36
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que , pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que , pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.
- La suite (u_n) est non bornée si elle n'est pas majorée ou elle n'est pas minorée.

Les techniques précédentes s'appliquent encore ici.

- suites $u_n = f(n)$: si f est majorée sur $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) l'est aussi.
- suites $u_{n+1} = f(u_n)$: on peut raisonner par récurrence
- méthodes algébriques. Exemple si on conjecture un majorant M de la suite (u_n) alors on peut chercher à étudier algébriquement le signe de $u_n - M$.

Exercices

Suites croissantes, décroissantes

Exercice 174. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n^2 - 5n$
3. $u_n = 3n + (-1)^n$
4. $u_n = n - 3^n$

Exercice 175. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$
2. $u_n = 0,1^n \times n^2$
3. $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n}$

Exercice 176. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la fonction f $(u_n = f(n))$.

1. $u_n = n + \cos(n)$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
3. $u_n = n^2(3 - n)$

Exercice 177. Étudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
2. $u_0 = \dfrac{7\pi}{22}$ et $u_{n+1} = u_n^2$

Suites majorées, minorées

Exercice 178. Montrer que chacune des suites ci-après est majorée et en déterminer un majorant.

1. $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \ldots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$
2. $u_n = 10 + 2\cos(n)$
3. $u_n = 9 + 3 + 1 + \ldots + 3^{-n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Exercice 179. Dans chacun des cas suivants, étudier les bornes éventuelles de la suite (u_n) à l'aide du sens de variation de la fonction f. ($u_n = f(n)$).

1. $u_n = n^2 - 10n - 3$
2. $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + 1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

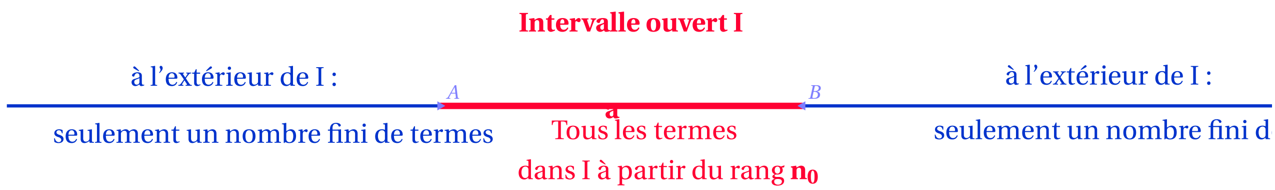
Exercice 180. Montrer, par récurrence, que $2 \leqslant u_n \leqslant 3$. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Fiche 3

Analyse- SUITES DE RÉELS Comportement asymptotique

I. Suites convergentes

Définition 37
Soit (u_n) une suite numérique et a un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- Lorsque (u_n) admet pour limite a, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
- Lorsqu'une suite admet une limite finie a, on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, elle est divergente.
- Si une suite est convergente, sa limite est unique. Preuve en exercice.

I.1. Suites de référence

Propriété 27
Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$...admettent pour limite 0

II. Suites ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 38
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 39
On dit que (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

II.1. Suites de référence

Propriété 28
Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2...admettent pour limite $+\infty$

II.2. Suites divergentes

Elles sont de deux types, une suite divergente peut être :

— soit avoir une limite infinie

— soit de ne pas avoir de limite comme $(-1)^n$ (cf exercice)

III. Exercices

Exercice 181. Unicité de la limite.

1. On suppose qu'une suite (u_n) admet deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, on a donc $\alpha > 0$. Montrer que la définition de la limite appliquée à deux intervalles bien choisis conduit à une contradiction.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 182. En utilisant les définitions du cours montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ ne peut avoir de limite.

Exercice 183. Démontrer que si une suite (u_n) est convergente alors elle est bornée.

Fiche 4

Analyse- SUITES DE RÉELS
Opérations sur les limites

I. La somme

Théorème 24
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite de la somme $(u_n + v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
a est$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	x
a est$-\infty$	$-\infty$	x	$-\infty$

II. Le produit

Théorème 25
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $(u_n \times v_n)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	ab	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$	$\pm\infty$ $(a \neq 0)$
a est$+\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
a est$-\infty$	$\pm\infty$ $(b \neq 0)$	$+\infty$	$+\infty$

III. Le quotient

Théorème 26
On admet le théorème : Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$ avec a et b désignant deux réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du produit $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée dans certains cas par le tableau ci-dessous

	b est réel $(b \neq 0)$	b est $+\infty$	b est $-\infty$
a est réel	$\dfrac{a}{b}$	0	0
a est$+\infty$	$\pm\infty$	x	x
a est$-\infty$	$\pm\infty$	x	x

IV. Exemples

Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2. $v_n = n(3 - n)$

3. $\boldsymbol{w_n = \dfrac{1}{n^2 - 5}}$

La suite (u_n) :

On a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ car ce sont des suites de référence, donc, en utilisant le théorème sur la limite d'une somme, $\lim u_n = +\infty$.

La suite (v_n) :

On a $\lim(-n) = -\infty$ donc $\lim(3-n) = -\infty$ (limite d'une somme). Comme $v_n = n(3-n)$, le résultat sur le produit fournit $\lim v_n = -\infty$.

La suite (w_n) :

Il est clair que $\lim(n^2 - 5) = +\infty$, le résultat sur le quotient fournit alors $\lim w_n = 0$.

V. Formes indéterminées

Les théorèmes précédents ne disent rien :

— sur la somme lorsque $a = +\infty$ et $b = -\infty$

— sur le produit lorsque $a = \pm\infty$ et $b = 0$

— sur le quotient lorsque $b = 0$ ou lorsque a et b sont infinis tous les deux.

Ces situations dont certaines sont appelées formes indéterminées seront étudiées en exercice.

VI. Exercices

Opérations algébriques

Exercice 184. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide des théorèmes concernant les opérations sur les limites,

1. $u_n = 3n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = 1 - n^5$
3. $u_n = (1-3n)(n^2 + n - 2)$

Formes indéterminées

Exercice 185. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = 3n^2 - n + 5$. Mettre en facteur n^2.
2. $u_n = 8n - n^3$. Mettre en facteur n^3.

Exercice 186. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - n}{1 - n^2}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. $u_n = \dfrac{n}{2n^2 + 1}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
3. $u_n = \dfrac{(n+3)(-2n+1)}{3n+5}$. Mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Exercice 187. Dans les questions qui suivent, étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide de la transformation d'écriture proposée.

1. $u_n = \sqrt{n} - n$. Mettre en facteur le terme dominant.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{2n+1}$. Mettre en facteur le terme dominant.

Exercice 188. Déterminer la limite de (u_n) avec $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Fiche 5

Analyse- SUITES DE RÉELS THÉORÈMES DE COMPARAISON

I. Théorèmes des comparaison

Théorème 27
On résume les théorèmes dans le tableau ci-dessous :

- les quatre premiers déterminent le comportement à l'infini d'une suite (x_n) par comparaison à d'autres suites (u_n), (v_n) dont le comportement est connu.
- le dernier résultat autorise le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse 1 : une inégalité à partir d'un certain rang	Hypothèse 2 : Comportement à l'infini	Conclusion
$u_n \leqslant x_n$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim x_n = +\infty$
$x_n \leqslant u_n$	$\lim u_n = -\infty$	$\lim x_n = -\infty$
$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers le même nombre ℓ	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$\lvert x_n - \ell \rvert \leqslant u_n$	$\lim u_n = 0$	(x_n) converge et $\lim x_n = \ell$
$x_n \leqslant y_n$	$\lim x_n = \ell$ $\lim y_n = \ell'$	$\ell \leqslant \ell'$

II. Comportement asymptotique de q^n (q réel)

Théorème 28

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante et a pour limite 1.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

Ce résultat sera démontré en exercice. Il permet le cas échéant, de déterminer la limite d'une suite géométrique, ou de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple

Etudier la limite de la suite (S_n) : $S_n = 1 + x + \ldots + x^n$ avec $-1 < x < 1$. Utilisons la formule sommatoire

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

III. Exercices

III.1. Théorème de comparaison

Exercice 189. Énoncer et démontrer le théorème de la première ligne du tableau.

Exercice 190. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \cos(n) - n$
2. $u_n = 2n + (-1)^n$

Exercice 191. Étudier la limite se la suite (u_n) à l'aide d'un des théorèmes de comparaisons

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{3 - \sin n}{n}$

III.2. Suites géométriques

Exercice 192.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \text{ Inégalité de Bernoulli}$$

2. En déduire que, si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

3. A l'aide des théorèmes de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Exercice 193. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 1,01^n$
2. $u_n = 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Exercice 194. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
2. $u_n = 1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{6}{5}\right)^n$
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = 0,8 + 0,8^2 + \ldots + 0,8^n$
5. $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{3}{7}\right)^{2n}$

Exercice 195. Étudier la limite se la suite (u_n)

1. $u_n = 3,77..7$ (n chiffres 7)
2. $u_n = 0,6767..67$ (n séquences 67)
3. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$
5. $u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$

Fiche 6

Analyse- SUITES DE RÉELS
Comportement asymptotique des suites monotones

I. Suites monotones non bornées

Théorème 29

— Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim u_n = +\infty$

— Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim u_n = -\infty$

Démonstration : Soit (u_n) une suite croissante, non majorée et M un réel quelconque. M n'est pas un majorant de (u_n) donc il existe au moins un terme de rang n_0 tel que $u_{n_0} > M$. La suite (u_n) étant croissante, tous les termes de rangs supérieurs à n_0 sont dans l'intervalle $]M, +\infty[$, ce qui se traduit par $\lim u_n = +\infty$. □

II. Le théorème de la convergence monotone

Théorème 30

— Si une suite de **nombres réels** est croissante et majorée alors elle est convergente vers un réel.

— Si une suite de **nombres réels** est décroissante et minorée alors elle est convergente

Démonstration : Admis. □

Commentaires :
Ce résultat, est difficile à établir car il découle de la construction des nombres réels, est capital en Analyse, il livre un résultat asymptotique sur une suite à partir de son comportement global. Cependant, s'il affirme la convergence d'une suite, ce théorème reste muet sur la la valeur de la limite.

Exemple
Le nombre d'Erdös
On pose $u_1 = 0,2$, $u_2 = 0,23$, $u_3 = 0,235, \dots$ $u_7 = 0,2357111317$ u_n s'écrit avec la juxtaposition des n premiers nombres premiers. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
Par définition la suite (u_n) est croissante, majorée par 1 donc elle converge. Sa limite est un nombre réel mystérieux imaginé par le mathématicien Paul Erdös en 1945. Cherchez donc qui est Paul Erdös !

III. Exercices

Exercice 196. Montrer que la suite de terme général $n!$ est croissante et non majorée. Conclure sur la limite de cette suite.

Exercice 197. On pose $u_1 = 1,38$, $u_2 = 1,3388$, …, $u_n = 1,33\dots388\dots8$ (n chiffres 3 suivis de n chiffres 8).

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Montrer que, pour tout n, $0 \leqslant u_n - \dfrac{4}{3} \leqslant 10^{-n}$
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 198. On pose $u_1 = 0,1$, $u_2 = 0,12$, $u_3 = 0,123$, …, $u_n = 0,123\dots$ u_n est obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers 1,2, …,n après la virgule. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (Pour ceux que cela intéresse Nombre de Champernowne...)

Fiche 7

Analyse- SUITES DE RÉELS
Problèmes : Exemples d'études de suites

I. problème 1

Page 18 TERACHER NEW

II. Exemple 1

Etudier la suite de terme général $u_n = 2^n - n$

Observations

Écrire un programme en Python permettant d'afficher les premiers termes de la suite.

Rédaction

— Conjecturer le sens de variation valider votre conjecture par une démonstration.

— Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n)

III. Exemple 2

Etudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

On établira pour $k \geqslant 2$, l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Recherche d'une idée

Rédaction

IV. Exemple 3

Etudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Représentation graphique et conjectures

Rédaction

- Sens de variation
- Comportement asymptotique

V. Exercices

Exercice 199. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)
2. Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 13$, $u_n \geqslant 2^n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 200. En utilisant le résultat du problème 2, démontrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots + \dfrac{1}{n^4}$ est convergente.

Exercice 201. Considérons à présent la suite (H_n) de terme général $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. On se propose de démontrer par l'absurde que cette suite a pour limite $+\infty$.

1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul,
$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$
2. Démontrer que si on suppose que la suite n 'a pas pour limite $+\infty$ alors la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ a pour limite 0. On reviendra à la définition de la limite pour justifier la limite de la suite (H_{2n}).
3. Conclure.

Exercice 202. Approfondissements (***) Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $T_1 = 1$ et $T_{n+1} = T_n$ si n ne possède pas le chiffre 9 dans son écriture décimale, $T_{n+1} = T_n + \dfrac{1}{n}$ sinon. Démontrer que (T_n) converge.

Exercice 203. On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4$.

1. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16$$
3. Démontrer que (u_n) converge et a pour limite 16.

Fiche 8

Analyse- SUITES DE RÉELS Approfondissements -suites adjacentes

I. Exemple traité ensemble

Soit deux suites de réels (a_n) et (b_n) vérifiant :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$,

— la suite (a_n) est croissante,

— La suite (b_n) est décroissante,

1. Démontrer que ces deux suites sont convergentes.
2. Démontrer que si on suppose de plus que la limite de la différence $a_n - b_n$ est nulle alors elles convergent vers la même limite.

Remarque
Deux suites de réels vérifiant l'une est croissante, l'autre est décroissante et la limite de leur différence étant nulle, sont appelées suites adjacentes. Dans ce cas, on peut démontrer qu'elles convergent vers la même limite.

II. exercices

Exercice 204. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 205. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admet que $e - 1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
   En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
2. Démontrer que e est irrationnel.

Exercice 206. 1. Soient $x, y, z \geq 0$. Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ (mettre $x + y + z$ en facteur).

2. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{3}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Fiche 9

Analyse- SUITES DE RÉELS
Problèmes

I. Problèmes de seuils cf Hyperbole

II. Algorithme de Babylone 86 page 38 Terracher

III. Approximation du nombre d'or 87 page 38 Terracher

IV. La méthode d'Archimède 88 page 38 Terracher

V. Problèmes de Seuil Hyperbole

Thème 4 Analyse-Équations différentielles

Fiche 1

Analyse- Équation différentielle L'équation différentielle $y' = ay + b$

I. Généralités

— Une fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y = ay + b$ est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout x de I

$$f'(x) = af(x) + b$$

Sans précision, on prendra $I = \mathbb{R}$. En dehors des notations fonctionnelles habituelles, on autorise l'écriture : « $y = \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ », étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction.

— Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$, c'est trouver toutes les solutions.

— Un peu de vocabulaire :

— L'équation $y' = ay + b$ est dite du premier ordre linéaire à coefficients constants

— $y' = ay$ est l'équation sans second membre associée. La locution « sans second membre » se conçoit mieux si l'on écrit $y' - ay = b$, l'équation sans second membre associée est alors $y' - ay = 0$.

II. Résolution de l'équation $y' = ay$ (a réel).

L'équation $y' = ay$ est l'équation de référence dans ce chapitre. Nous en donnons ci-dessous les solutions.

Théorème 31
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante arbitraire.

Démonstration : — D'une part, il est évident que $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

— Réciproquement, si y est une solution de $y' = ay$, posons $z(x) = \mathrm{e}^{-ax}y(x)$, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$z'(x) = -a\mathrm{e}^{-ax}y(x) + \mathrm{e}^{-ax}y'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

Donc, pour tout x réel, $z'(x) = 0$. Ainsi, il existe une constante C telle que, pour tout x réel, $z(x) = C$. On en déduit que pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-ax}y(x) = C$, donc, pour tout x réel, $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. Ce qui démontre le théorème annoncé. □

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ Ici $a = -\dfrac{3}{2}$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$.

III. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels)

Théorème 32
On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ (1) (a et b réels et a non nul), et on associe l'équation sans second membre associée $y' = ay$. Alors :

— il existe une fonction constante g, solution particulière de (1) : $g(x) = -\dfrac{b}{a}$

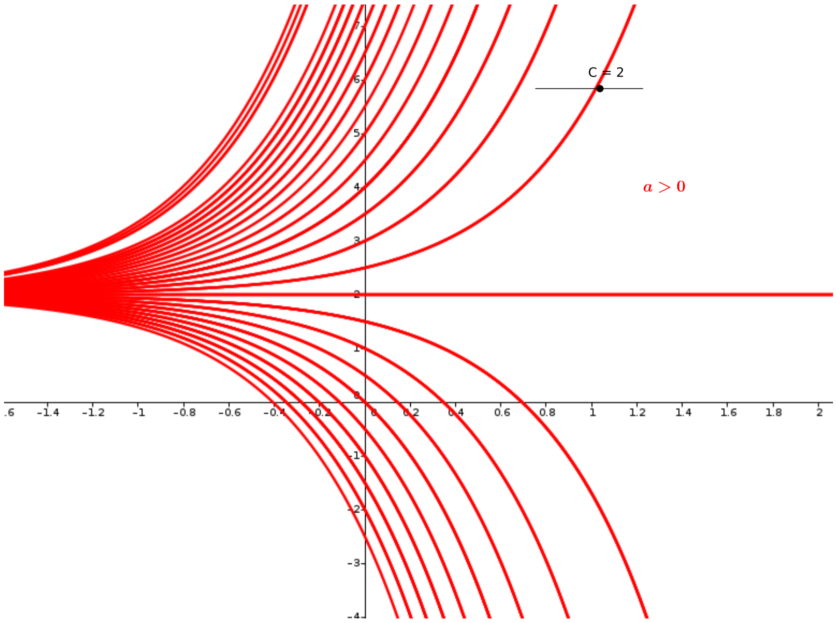
— l'ensemble des solutions de (1) s'obtient en ajoutant g à une solution quelconque de l'équation sans second membre.
Ces solutions sont donc les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$. ($C$ réel quelconque).

Démonstration :
La fonction g $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de (1), la vérification est aisée.
La condition « f est solution de (1) » est équivalente à ,pour tout x, $f'(x) - af(x) = b$, soit encore à $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$.
La dernière égalité s'écrit encore $(f-g)' = a(f-g)$. Ainsi, f est solution de (1) est équivalente, $f - g$ est solution de $y' = ay$. Cette dernière condition se traduit par, pour tout x réel, $f(x) - g(x) = Ce^{ax}$. En conclusion, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$. □

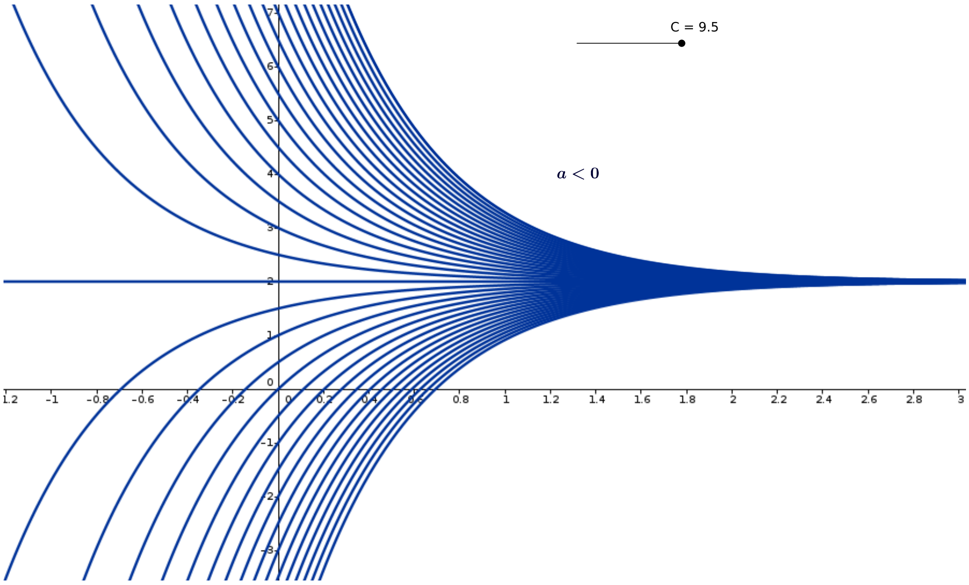
le point de vue graphique

Voici les courbes des solutions de solutions de l'équation $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = -4$

$a > 0$



$a < 0$



Remarque
Si $a = 0$, les solutions de (1) sont les fonctions affines $x \mapsto bx + k$.

> **Théorème 33**
> Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. (x_0 et y_0 réels donnés).

Exemple
Déterminer la fonction f, solution de $y' = -0,5y + 1$ telle que $f(0) = 4$.
La solution générale de l'équation est $x \mapsto Ce^{-0,5x} + 2$. La condition $f(0) = 4$ donne $C = 2$. Donc $f(x) = 2e^{-0,5x} + 2$.

IV. Exercices

Exercice 207. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \dfrac{3}{2}y$
2. $-y' + y = 0$
3. $7y' + 8y = 0$

Exercice 208. Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels), et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - 5 = y$
3. $3y' - 2y + 1 = 0$
4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$
5. $y' = 100(y - 3)$
6. $y' = 0,1(100 - y)$
7. $y' = 2002(8 - 5y)$

Exercice 209. Démontrer le théorème 3 du cours « Il existe un unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés) ».

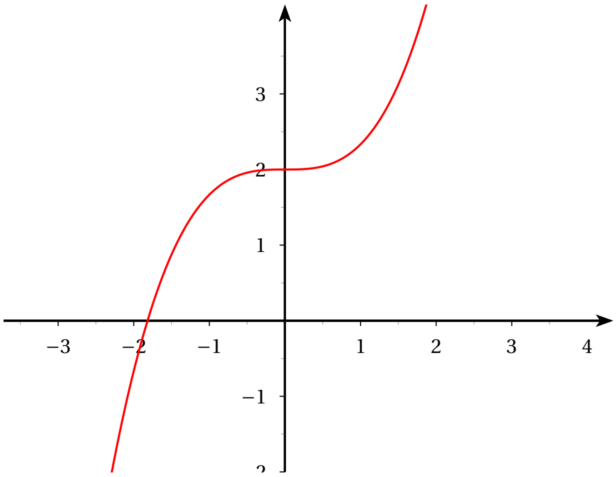
Exercice 210. Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée, et donner l'allure de sa représentation graphique.

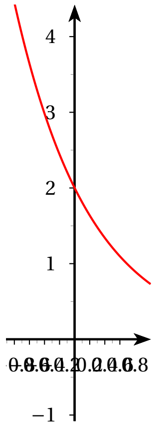
1. $y' = 4y - 3$, $y(0) = -1$
2. $y' = -y + 1$, $y(2) = 6$
3. $y' + 0,03y = 5$, $y(0) = 200$
4. $y' = 500 - 0,1y$ $y(10) = 0$

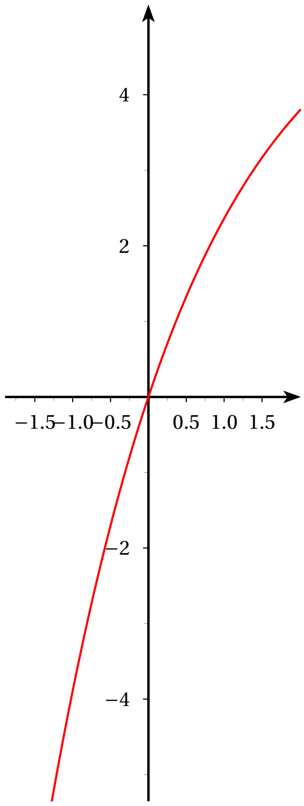
Exercice 211. On considère les équations différentielles suivantes :

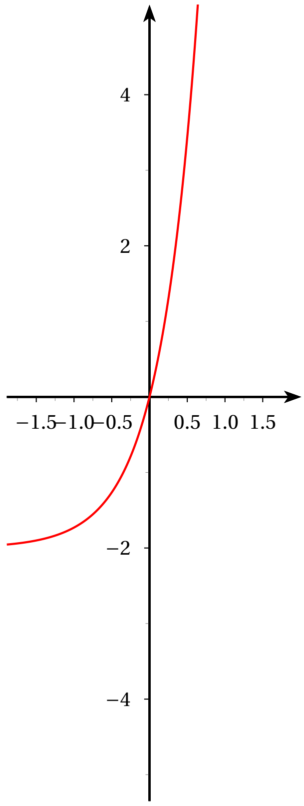
1. $y' = x^2$,
2. $y' = 3 - 0,5y$,
3. $y' + 0,03y = 5$
4. $y' - 2y = 4$
5. $y' = -y$

Les figures ci-après donnent sommairement l'allure des courbes représentatives d'une solution (1), (2), (3) et (4). Associer à chaque courbe son équation différentielle.









Exercice 212. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (5x+2)e^{3x}$$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = 3y + 5e^{3x}$$

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Fiche 2

Analyse- Équation différentielle Équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$

Il s'agit d'étudier certaines équations différentielles se ramenant à la forme $y' = ay + b$.

I. Exercice résolu

On considère les équations différentielles :

$$y' - 2y = 1 - 6x \tag{2.1}$$

$$y' = y(5 - y) \tag{2.2}$$

1. Montrer que (1) admet une solution affine et résoudre (1).
2. Déterminer les solutions strictement positives de (2) en posant $z = \dfrac{1}{y}$

II. Résolution de l'exercice

1. Posons $g(x) = ax + b$, g est solution de (1) si, pour tout x réel,

$$a - 2(ax + b) = 1 - 6x.$$

Cette égalité implique $a = 3$ et $b = 1$. On vérifie que la fonction $x \mapsto 3x + 1$ est solution de l'équation (1).
On en déduit les équivalences suivantes : y est solution de (1) $\Leftrightarrow y' - 2y = 1 - 6x$
$\Leftrightarrow y' - 2y = g' - 2g$
$\Leftrightarrow (y - g)' - 2(y - g) = 0$
Ainsi, pour tout x réel, $y(x) - g(x) = Ce^{2x}$ (C est réel)
Les solutions de (1) sont les fonctions $x \mapsto 3x + 1 + Ce^{2x}$ (C est réel)

2. $z = \dfrac{1}{y}$, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $y > 0$ et
$z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{y(5-y)}{y^2} = -\dfrac{5}{y} + 1$ donc $z' = -5z + 1$. On en déduit facilement $z(x) = \dfrac{1}{5} + Ce^{-5x}$, puis $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$.
Remarque : si $C < 0$, on peut avoir $z(x) \leqslant 0$ (donc $y(x) \leqslant 0$) pour certaines valeurs de x. La condition $y(x) > 0$ impose $C \geqslant 0$.

III. Exercices

Exercice 213. Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = e^x$, en montrant d'abord qu'il existe une solution particulière de la forme $g : x \mapsto ae^x$.

Exercice 214. On considère l'équation différentielle $y' = -y^2$. En posant $z = \dfrac{1}{y}$, montrer que l'équation admet des solutions strictement positives sur $[0, +\infty[$.

Exercice 215. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x - 5$.

1. Montrer que (E) admet une fonction affine $g : ax + b$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 216. On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$.

1. Montrer que (E) admet une fonction polynôme du second degré $g : ax^2 + bx + c$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 217. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : (ax + b)e^{-2x}$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 218. On considère l'équation différentielle $y' + y = \sin x$.

1. Montrer que (E) admet une fonction de la forme $g : \lambda \sin x + \mu \cos x$ comme solution.
2. résoudre (E).

Exercice 219. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = xe^x \tag{2.3}$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)e^x$$

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1)

   (b) Montrer que v est solution de l'équation (2) si, et seulement si $u + v$ est solution (1)

   (c) En déduire l'ensemble (1)

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 220. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = e^{2x} \tag{2.4}$$

1. Démontrer que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$, est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E)
5. Déterminer la fonction solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 221. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive, vérifiant l'équation différentielle $y' = ky(A-y)$ où A et k sont des réels donnés ($k \neq 0$ et $A > 0$)

1. On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle du type $z' = az + b$ (On exprimera a et b en fonction de k et de A).
2. En déduire qu'il existe une constante B telle que l'on ait, pour tout x réel
$$y(x) = \frac{A}{1+Be^{-kAx}}.$$
Préciser le signe B compte tenu de la condition $y(x) > 0$ pour tout x.
3. Donner l'allure de la courbe représentative d'une solution en distinguant les deux cas
   (a) $k > 0$
   (b) $k < 0$

Exercice 222. On considère les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde et vérifiant $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$ et, pour tout x $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$.

1. On pose, pour tout x réel, $z(x) = e^x y(x)$.
   (a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.
   (b) Montrer que pour tout x réel, $z''(x) + 2z'(x) = 0$.
   (c) En déduire que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z' = 4 - 2z$.
   (d) Exprimer alors $z(x)$ en fonction de x.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution fonction y vérifiant les hypothèses de départ, et exprimer $y(x)$ en fonction de x.

Fiche 3

Analyse- Équation différentielle Situations menant à une équation différentielle

I. Problème Sciences PO 2012

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie quelques-uns de ces modèles.

I.1. Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1. **Modèle discret**
   Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n de l'étude P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

   $$P_{n+1} - P_n = kP_n.$$

   (a) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.

   (b) Indiquer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.

   (c) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.

   (d) Interpréter les résultats des questions **b.** et **c.** en termes d'évolution de population.

2. **Modèle continu**
   On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle k telle que,pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.

   (a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $P(t)$ en fonction de t, k et P_0 la population à l'instant $t = 0$.

(b) Quel est le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction P ? On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de k.

(c) On se place maintenant dans le cas où $k > 0$. On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale.
Exprimer λ en fonction de k.
Si la population double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle ? Justifier.

(d) On suppose toujours que $k > 0$. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;\,T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
En déduire la population moyenne sur l'intervalle $[0\,;\,\lambda]$ en fonction de P_0.

3. **Comparaison des deux modèles**
On suppose que la population initiale est de 1 000 individus et que $k = 0,1$.
Comparer les résultats obtenus après 10 ans puis après 100 ans pour chacun des deux modèles.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas très réaliste. Le taux d'accroissement de la population va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources. Il faut donc introduire un facteur d'autorégulation M tenant compte de la capacité d'accueil du milieu.
Dans ce qui suit, on étudie donc les modèles de Verhulst et de Gompertz qui permettent de décrire l'accroissement de la population comme « proportionnel » à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.

I.2. Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telle que, pour tout entier naturel n,

$$P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$$

1. Si la suite (P_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?
2. On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{k}{rM}P_n$. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = r\,u_n\,(1 - u_n).$$

3. Dans cette question 3., on suppose que $r = 1,8$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ et croissante.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

   (c) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population P_n ? Justifier.

4. Dans cette question 4., on suppose que $r = 3,2$ et $u_0 = 0,8$.
   (a) Sur le graphique fourni en annexe on a représenté, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3,2x(1-x)$ et la droite d'équation $y = x$.
   Sur ce graphique, construire, sur l'axe des abscisses, les 4 premiers termes de la suite (u_n). On laissera les traits de construction apparents.
   (b) Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la suite (u_n) ?
   (c) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs arrondies à 10^{-5} près des 6 premiers termes de la suite. Ces résultats confirment-ils la conjecture émise précédemment ?

5. Dans cette question 5., on suppose que $r = 5$ et u_0 est un réel strictement positif. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > 1$.
   (a) Démontrer que $u_{p+1} < 0$ puis que, pour tout $n \geqslant p+1$, $u_n < 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. On pourra, pour cela, étudier le signe de la fonction $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$. En déduire que, s'il existe, l'entier p est unique.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas minorée.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (e) Si $U_0 = 0,8$, que peut -on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$? Justifier.
   (f) Démontrer que si $u_0 = 0,5$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Même question avec $u_0 = 0,1$.
   En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799\,999$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
   Que peut-on dire de la validité du modèle dans ces différents cas ?

I.3. Modèle de Verhulst continu

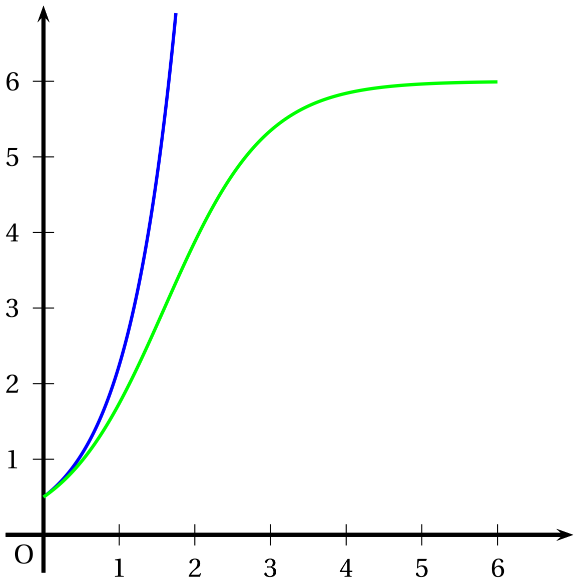
On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky(1-y)$.

1. On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $Q = \dfrac{1}{P}$.
   (a) Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $\quad y' = -ky + \dfrac{k}{M}$.
   (b) Résoudre (E'). Justifier que les fonctions obtenues sont strictement positives quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t) = \dfrac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ où C est une constante réelle.
   (a) Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ selon le signe de C.
   (c) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
   (d) Décrire l'évolution de cette population. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.
3. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;\,T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,T]$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0\,;\,T]$.
   (b) Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que l'équation $P''(t) = 0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C > 0$. Démontrer que $t_0 = \dfrac{\ln(C)}{k}$.
   (b) C est supposé strictement positif. Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\,(t_0\,;\,P(t_0))$ appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{M}{2}$.
   (c) C est supposé strictement positif. Démontrer que, que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.
5. Dans cette question, on prend $P_0 = 0,5$, $k = 1,5$ et $M = 6$. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions $t \mapsto 0,5\mathrm{e}^{1,5t}$ et $t \mapsto \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1,5t}}$ définies sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (a) On considère la fonction d définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $d(t) = 0,5\mathrm{e}^{1,5t} - \dfrac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1,5t}}$.
   Résoudre l'inéquation $d(t) < 0,1$.
   Que peut-on dire de ces deux courbes au voisinage de l'origine O ?
   (b) À l'aide du graphique ci-dessous, décrire, dans le cas du modèle de Verhulst continu, l'évolution de la population quand son effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M.



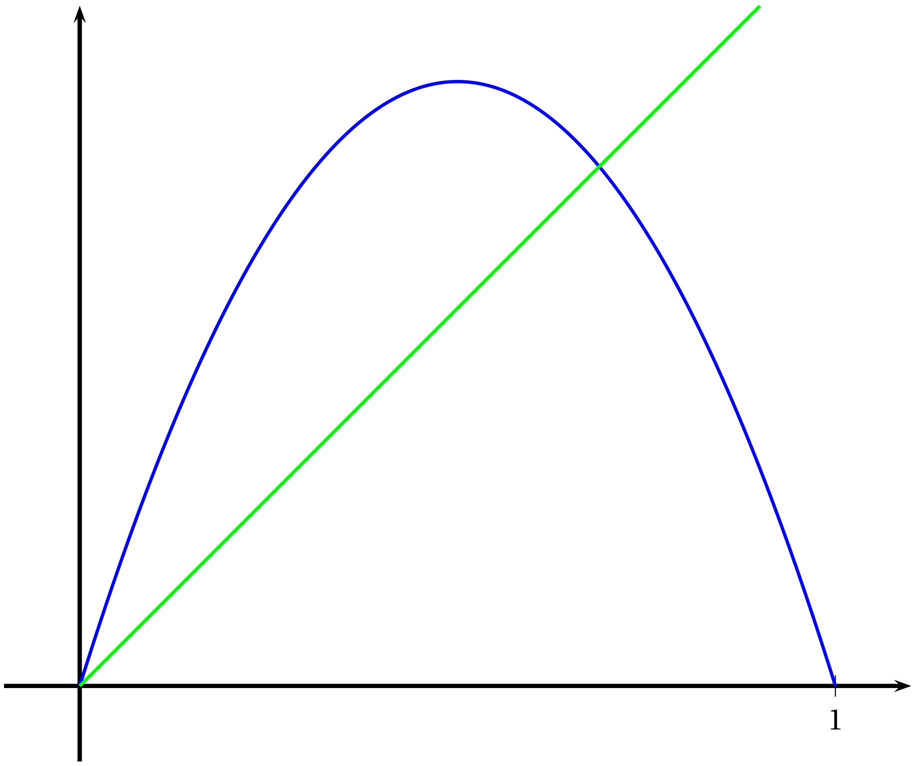
I.4. Modèle de Gompertz

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes k et M avec M strictement positive telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on ait :

$$P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1. On considère la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $Q = \ln(P)$.
   - (a) Démontrer qu'une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln(\frac{M}{y})$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
   - (b) Résoudre l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
   - (c) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $P(t) = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.
3. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?
4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1 000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers 1 d'individus, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 2000$.
   - (a) Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression « population en voie d'extinction ».
   - (b) Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

Annexe



II. Problème posé au bac

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant
$t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue

période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$\text{(E)} \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\text{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. (a) Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\text{M}}.$$

   (b) Résoudre (E′).

   (c) Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\dfrac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\text{M}}{1 + C\text{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

   (b) Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
   Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\text{M}}{2}$.

   (c) Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\text{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
   Exprimer t_0 en fonction de a et C.

   (d) Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;1)$ et $(0{,}5\,;2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.
2. Sachant que $g(0) = \text{N}_0$ et que $\text{M} = 100\ \text{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

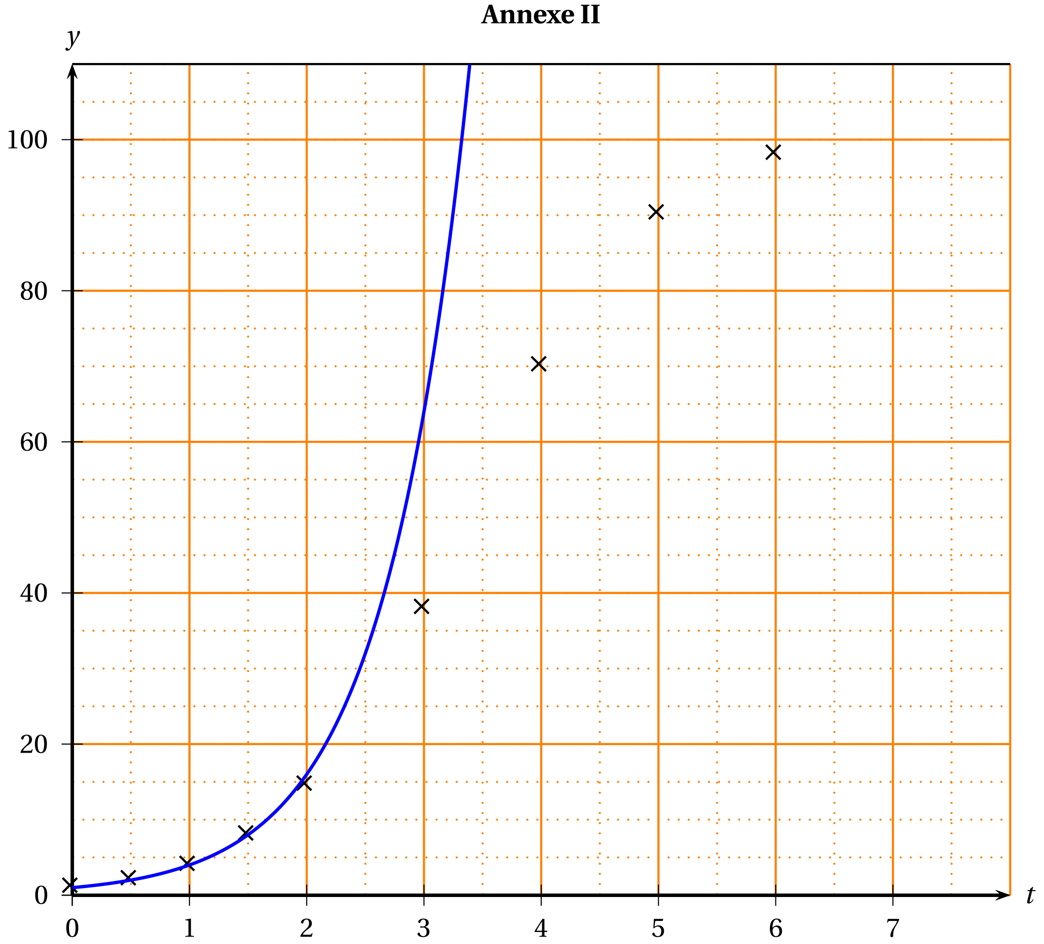
3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II



Fiche 4

Analyse- Équation différentielle Quelques modèles d'évolution

Dans les sciences appliquées, certains phénomènes évolutifs (évolution de populations, lois de croissance ou de décroissance...) peuvent être entièrement ou partiellement décrits à l'aide de ce que les spécialistes englobent dans la locution « théorie des systèmes dynamiques ». Notre objectif reste modeste : il s'agit de présenter quelques modélisations simples de phénomènes complexes à l'aide d'outils discrets (les suites) et continus (les fonctions et équations différentielles).

I. Exercice 1 résolu ensemble

Le modèle de Verhulst : loi logistique continue.
Pour certaines populations vivant dans un milieu clos (comme des bactéries en culture), on constate que la croissance est quasiment exponentielle au début, mais est freinée dès que la surpopulation se fait sentir (manque de nourriture ou d'oxygène, interactions dues à la promiscuité..). Le mathématicien belge Pierre Verhulst propose, vers 1840, le modèle suivant : on suppose que la taille de la population ne peut pas dépasser une valeur maximale, et on note $f(t)$ la fraction de ce maximum à l'instant t, alors la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y' = \lambda y(1-y) \tag{4.1}$$

1. Résoudre l'équation (1) en posant $z = \dfrac{1}{y}$.
2. Sachant que $\lambda > 0$ et $f(0) = 0,01$, exprimer $f(t)$ en fonction de t et représenter graphiquement la fonction f.

II. Exercice 2 résolu ensemble ?

Loi logistique discrète.
Vers 1950, l?Écologie naît en tant que science. pour décrire l'évolution annuelle d'une population dans une région donnée, certains mathématiciens, comme Stephen Smale, proposent le modèle suivant : on suppose que, dans la région, la population ne peut dépasser un seuil maximal. Si l'on note x_n la proportion de ce maximum lors de l'année n alors $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, où r est une constante positive.

1. Montrer que $0 \leqslant r \leqslant 4$.
2. On suppose que $x_0 = 0,2$. observer et commenter l'évolution de la suite (x_n) lorsqu'on fait varier r entre 0 et 4 à l'aide d'une simulation écrite en Python, et d'une figure réalisée sous geogebra de la courbe représentative de la fonction f.

III. Exercices

Thème 5 Analyse-
Limite-continuité-dérivation

Fiche 1

Analyse- Fonctions
Limites d'une fonction

I. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Nous considérons des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[M, +\infty[$, et nous adoptons une définition analogue à celle énoncée pour les suites.

Définition 40

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

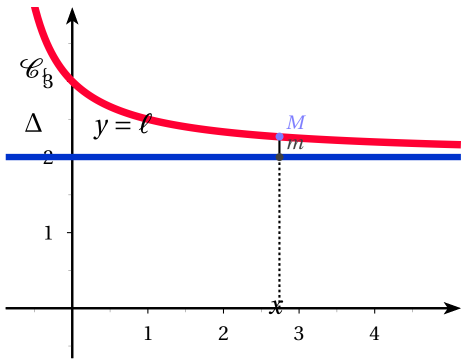
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est négatif et $|x|$ est assez grand. Nous noterons

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique : asymptote horizontale

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) la distance Mm tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



limites en $+\infty$ des fonctions usuelles

Le théorème ci-dessous nous livre les limites en $+\infty$ pour un grand nombre de fonctions usuelles.

Théorème 34

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

— Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$:
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

Démonstration : Admis. □

Remarque
Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en $+\infty$. C'est le cas de la fonction sin par exemple. Résultat admis.

II. Limite en un réel a

On considère une fonction définie sur un intervalle contenant a ou sur un intervalle de borne a du type $]\ldots, a[$ ou $]a, \ldots[$.

Définition 41

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a . Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a. Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a. Nous noterons

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Limite à gauche et à droite en un réel a

Définition 42

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a à gauche, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur à a . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a à gauche, si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur à a. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a à gauche si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant inférieur. Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

— Soit ℓ un réel, nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a à droite, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a . Nous noterons

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\ell$$

— Nous disons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a à droite, si tout intervalle du type $[A+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a. Nous noterons

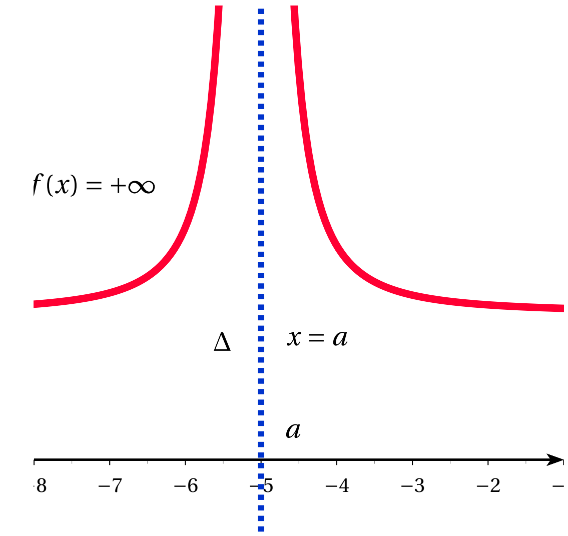
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

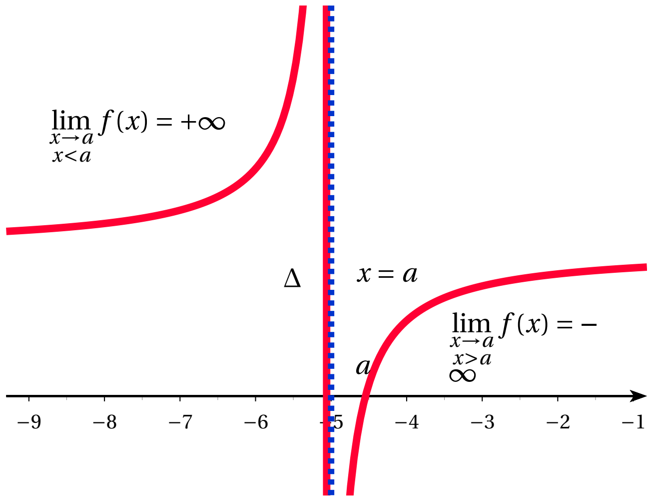
— Nous disons que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a à droite si tout intervalle du type $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez voisin de a en étant supérieur à a. Nous noterons

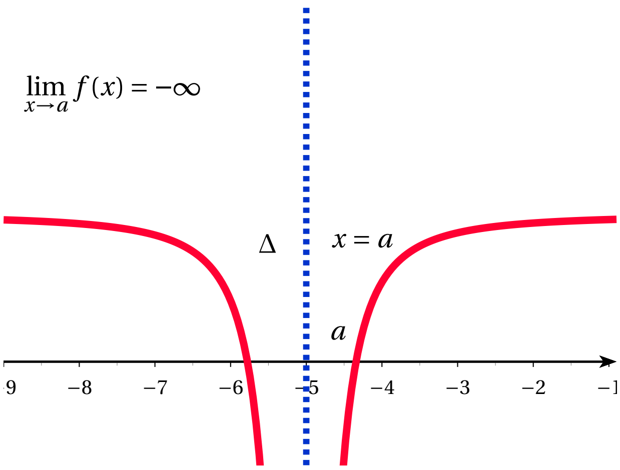
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

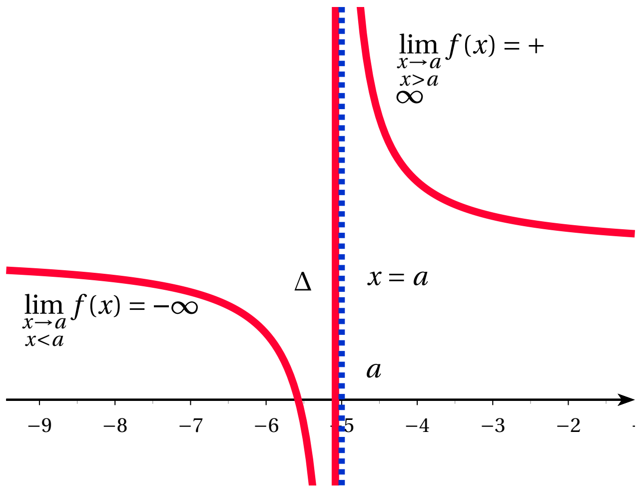
Asymptote parallèle à (Oy)

Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $+\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Cette définition se généralise aux limites à gauche et limites à droites.









Limites des fonctions usuelles en a

Théorème 35

- **Fonction usuelle définie en a**

  Lorsque la fonction f est une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions :

  si f est définie en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

- **Fonction non définie en a**

  - exemples fondamentaux :
    - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$
    - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$
    - $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$

- Si pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ et si g est une fonction usuelle définie en a alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$
- On rappelle que dire que f est dérivable en a signifie que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Application : $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Exemple : limite de $f : x \mapsto \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}$ en 3. Soit x un nombre différent de 3, $x^2 + 7x - 30 = (x-3)(x+10)$ donc $f(x)$ se simplifie en $f(x) = x + 10$. Nommons g la fonction $x \mapsto x + 10$, $\lim_{x \to 3} f(x) = g(3) = 13$.

III. Opérations sur les limites

Dans chaque cas, il s'agit de limites au même « point a », a réel ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$:

III.1. Limite d'une somme

Théorème 36
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $f(x) + g(x)$.)

$\lim f$ \ $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

III.2. Limite d'un produit

Théorème 37
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $f(x) \times g(x)$.)

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' = 0$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	?	?
$\ell \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	?	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

III.3. Limite d'un quotient

Théorème 38
les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci -dessous (sauf dans les cas marqués de ?, dans ce cas, il y a une indétermination que l'on cherchera à lever en transformant l'écriture de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.)

$\lim f$ \ $\lim g$	0	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	?	0	0	0
$\ell \neq 0$	?	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	?	$\pm\infty$	?	?
$-\infty$	?	$\pm\infty$	?	?

Remarque si $\ell' = 0$ on peut conclure lorsque g garde un signe constant au voisinage de a. Si besoin, on peut séparer en une étude à gauche et droite de a lorsque cela a un sens.
Exemple : $\lim\limits_{x\to 3} 1 - x = -2$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^3 = 0$ et le nombre $(x-3)^2$ est positif au voisinage de 3, donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-x}{(x-3)^2} = -\infty$

IV. Exercices

Exercice 233. Démontrer les résultats énoncés dans le théorème donnant les limites des fonctions usuelles en $+\infty$.

Exercice 234. Est-il vrai qu 'il existe A strictement positif tel que pour tout x supérieur à A, $-1 < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < 1$?

Exercice 235. Est-il vrai qu 'il existe r strictement positif tel que pour tout x strictement positif et strictement inférieur à r, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 100$?

Exercice 236. Est-il vrai qu 'il existe r strictement positif tel que pour tout x strictement inférieur à r, $\dfrac{1}{x} > 100$?

Exercice 237. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ au point a après avoir éventuellement simplifié :

1. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x^3}{x^2}$ avec $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 2}$ avec $a = -2$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$ avec $a = 0$
4. $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ avec $a = 3$

Exercice 238. Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ en $+\infty$ à l'aide des opérations sur les limites :

1. $f(x) = 3x^3 + \sqrt{x}$
2. $f(x) = -x - \sqrt{x}$
3. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = -x(x+1)$
5. $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{X}$
6. $f(x) = -5x\sqrt{x}$
7. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x}}$
8. $f(x) = (1-x)(2-x)(3-x)$
9. $f(x) = 3x^2 - x + 1$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}$

Exercice 239. « Tout polynôme a la même limite en $+\infty$ que son terme de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

Exercice 240. « Toute fraction rationnelle a la même limite en $+\infty$ que le quotient simplifié des termes de plus haut degré ». Démontrer ce résultat.

Fiche 2

Analyse- Fonctions
Limites d'une fonction- Théorèmes de comparaison

I. Théorèmes de comparaisons

Les résultats ci-dessous permettent dans certains cas, de déterminer la limite lorsque x tend vers a (a fini ou infini) d'une fonction f, par comparaison à d'autres fonctions u, v... dont le comportement est connu.

Théorème 39

- **Théorème des « gendarmes »** : Si, pour tout x « assez voisin de a » , on a l'encadrement $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, et si u et v ont la même limite ℓ en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
- **Cas d'une limite infinie** : si pour tout x « assez voisin de a », $f(x) \geqslant u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- **Cas d'une limite infinie** : si pour tout x « assez voisin de a », $f(x) \leqslant u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

II. Application à connaître absolument

On démontre grâce à ce théorème le résultat suivant :

Theorem 1. — *Inégalité : pour tout x réel,* $\exp(x) \geqslant x + 1$

— *Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

— *Croissances comparées :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

— *Encore plus fort : Pour tout n entier naturel,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Démonstration :

— Obtention de l'inégalité : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(x) - (x+1)$. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi'(x) = \exp(x) - 1$ et sa dérivée seconde est $\varphi''(x) = \exp(x)$. Ainsi, la fonction φ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On peut donc conclure que φ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi'(0) = 0$, donc φ' est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$. Le minimum de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ est donc atteint lorsque $x = 0$. Or la valeur de φ en 0 est 0. Ainsi, pour tout x réel, $\varphi(x) \geqslant 0$. Ce qui se traduit encore par, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$.

— Détermination de la limite de exp en $+\infty$. On vient de démontrer que, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$. En utilisant, le théorème de comparaison précédent, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

— Détermination de la limite de $\dfrac{\exp(x)}{x}$ en $+\infty$. On sait que, pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x+1$. Or, pour tout x réel, $x+1 > x$. Donc, pour tout x réel, $\exp(x) > x$. En particulier, pour tout x réel strictement **positif**, $\exp(x) > x$. Soit x un réel positif, en remplaçant x par $\dfrac{x}{2}$ dans l'inégalité précédente, on obtient, $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) > \dfrac{x}{2}$. Appliquons la fonction carrée aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient, $\left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, $\exp(x) > \dfrac{x^2}{4}$. Divisons enfin par x qui est strictement positif, $\dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{4}$. Il ne reste plus qu'à observer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$. Fin.

— Reprenons chaque point précédent en adaptant : soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul, en remplaçant x par $\dfrac{x}{n+1}$ dans l'inégalité $\exp(x) > x$, on obtient, $\exp\left(\dfrac{x}{n+1}\right) > \dfrac{x}{n+1}$. Appliquons la fonction puissance $n+1$ aux deux membres positifs de cette inégalité, on obtient, $\left(\exp\left(\dfrac{x}{n+1}\right)\right)^{n+1} > \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Après réduction, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, $\exp(x) > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Divisons enfin par x^n qui est strictement positif, $\dfrac{\exp(x)}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}}$. Il ne reste plus qu'à observer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ pour pouvoir conclure en utilisant le théorème de comparaison précédent que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$. Fin. □

III. Exercices

Exercice 241. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \cos x - 3x$

Exercice 242. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 243. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x c'est à dire l'unique entier p vérifiant $p \leqslant x < p+1$.

Exercice 244. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{5\lfloor x \rfloor}{x}$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x c'est à dire l'unique entier p vérifiant $p \leqslant x < p+1$.

Exercice 245. Représenter la fonction $x \mapsto x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur l'écran de votre calculatrice. Montrer cette fonction admet une limite en 0.

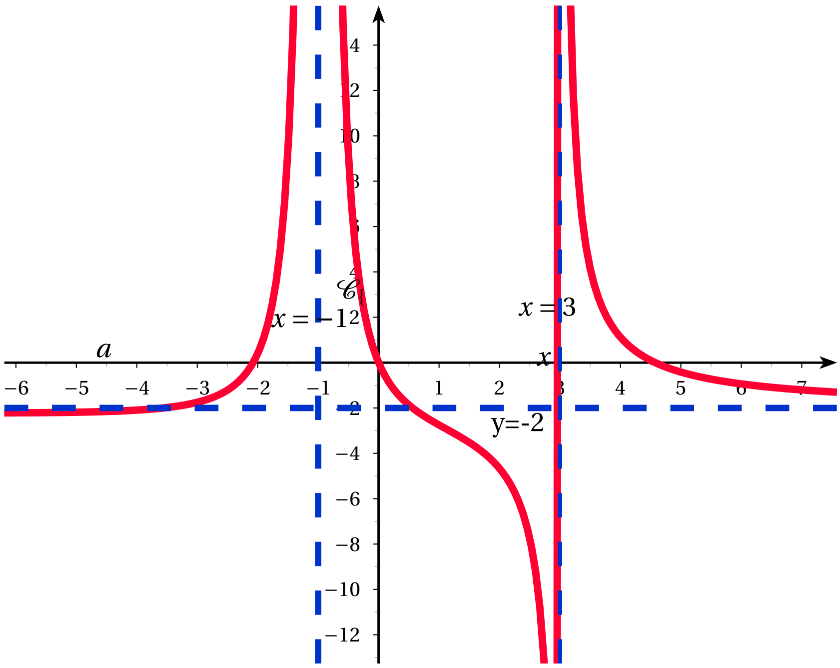
III.1. avec l'exponentielle

Exercice 246. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{-x} + e^{x}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{3}{6+2e^{-x}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$
4. $k : x \mapsto e^{x} - x$

III.2. Asymptotes

Exercice 247. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1;3\}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.



Exercice 248. Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

III.3. Asymptote oblique

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. De même, On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Exercice 249. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique et étudier sa position relative par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 - 1} - x$
3. $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{x}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}x - x^{-n}$ $(n \geqslant 1)$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{8x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{3x^2}{2 - x}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
9. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
10. $f(x) = 1 + x + 3e^{-x}$

Fiche 3

Analyse- Fonctions
Limites d'une fonction- Limite d'une fonction composée

Théorème 40
a, b et ℓ sont chacun des réels ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$,
si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

Exemple
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2+1} = 2$ et $\lim\limits_{y\to 2} \sqrt{y} = \sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2+1}} = \sqrt{2}$

.1. Application importante : limite en $-\infty$ de l'exponentielle

Théorème 41
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x) = 0$ où $n \geqslant 1$

Exercice 250. Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

1. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ en 0
4. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$ en 0
5. $f(x) = \dfrac{\exp(x^2)}{x^6}$ en $+\infty$
6. $f(x) = \exp(-x^2)x^{100}$ en $+\infty$
7. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0

.2. Exercices

Exercice 251. Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

1. $f(x) = \dfrac{-8x^2+1}{5x^2+x+1}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \dfrac{x(5-2x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{x^n}{2x^2+1}$ en $-\infty$. discuter selon les valeurs de n
4. $f(x) = x\sqrt{x} - 5x^2$ en $+\infty$
5. $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ en 9
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ en 0
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ en 2
9. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2}$ en 0
10. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x$ en $+\infty$
11. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x$ en $-\infty$
12. $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$
13. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ en $-\infty$
14. $f(x) = \dfrac{3}{6+2e^{-x}}$ en $+\infty$
15. $f(x) = \dfrac{3}{6+2e^{-x}}$ en $+\infty$
16. $f(x) = \dfrac{3e^x}{6+2e^x}$ en $+\infty$
17. $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x+1}$ en $+\infty$
18. $f(x) = \dfrac{e^x+x}{3-2e^x}$ en $+\infty$
19. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ en 0
20. $f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{x}$ en 0

Fiche 4

Analyse- Fonctions
Continuité d'une fonction

Warusfel-Vuibert- 2002

I. Fonctions continues en un point

définition

Définition 43
Soit f une fonction à valeurs réelles et a un réel. On dit que f est continue en a si a appartient à l'ensemble de définition de f et si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

Définition 44
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I si f en continue en $a$pour tout réel a appartenant à I.

Remarque
La notion de continuité est assez intuitive. elle se traduit par le fait que l'on affirme pouvoir tracer la courbe de f sans lever le crayon. Nous verrons que les fonctions usuelles sont presque toutes continues. **Donnons cependant un exemple de fonctions non continue**.

Exemple
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n a pas de limite en n donc elle n'est pas continue en n.

Composition de fonctions continues

Théorème 42
Soit f une fonction définie sur un intervalle D et continue en a et une fonction g définie sur un intervalle contenant $f(D)$ et continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Théorème 43
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et si g est une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Continuité et opérations

Théorème 44
Soit (f, g) un couple de fonctions définies sur un même intervalle et continues e a alors

— $f + g$ est continue en a

— fg est continue en a

— λf est continue en a où λ est un réel

— si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

Continuité des fonctions usuelles

Fonctions polynomiales

Théorème 45

— Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$

— Toute fonction quotient de deux fonctions polynomiales est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition

Fonctions trigonométriques usuelles

Théorème 46

— la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$

— la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$

— la fonction $\tan = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est continue sur tout intervalle de la forme $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions faisant intervenir des radicaux

Théorème 47
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Théorème 48
Pour toute fonction f continue et positive, la fonction $\sqrt{f}$ est continue.

Théorème 49
Pour toute fonction f continue, la fonction $|f|$ est continue.

image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème 50
Soit f une fonction continue en a et une suite (u_n) convergeant vers a dont tous les termes appartiennent à l'ensemble de définition de f. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$

Conséquence pour l'étude des suites définies par récurrence :

Théorème 51
Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et admettant pour limite un réel ℓ en lequel f est continue. Alors $f(\ell) = \ell$.

En général, f est continue sur un intervalle I et la continuité de f en ℓ résulte de l'appartenance de ℓ à I. ce théorème montre que les valeurs possibles de la limite de (u_n) sont à chercher parmi les **points fixes** de f. Même si l'on dans un cas où un tel point fixe est unique, il ne permet pas d'affirmer que la suite converge effectivement vers ce point fixe. Mais si, par ailleurs, on sait que la suite est convergente, par exemple en utilisant le théorème de convergence monotone, il permet de déterminer la limite.

Exemple
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f\ x \mapsto \sqrt{x+2}$. Puisque $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, la suite est définie et à valeurs positives. Une récurrence immédiate montre de plus qu'elle est majorée par 2.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = \frac{u_n+2-u_n^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n} = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$$

Puisque $u_n \leqslant 2$, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est croissante. Majorée par 2, elle converge vers une limite ℓ qui est positive et f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on a donc $f(\ell) = \ell$. Cette égalité équivaut à $\ell \geqslant 0$ et $\ell^2 = \ell + 2$. Il n'a y a qu'une seule valeur possible et la suite converge vers 2.

II. Exercices

Exercice 252. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < -1 \\ f(x) = a(x+1)^2 \text{ si } -1 \leqslant x < 0 \\ f(x) = a^2 e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$ Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 253. Calculer les limites en n, pour tout n de $\mathbb{Z}$ de $x \mapsto \left| x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2} \right|$. Cette fonction est elle continue sur $\mathbb{R}$?

Fiche 5

Analyse- Fonctions
Continuité d'une fonction sur un intervalle

Warusfel-Vuibert- 2002

I. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 52
Pour toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ et pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 53
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 54
Pour toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

II. Inversion d'une fonction continue strictement monotone

Si f est strictement monotone on peut préciser le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 55
Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Extensions au cas d'un intervalle quelconque

Théorème 56

— Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a, b]$ et pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in]a, b]$ tel que $f(c) = k$.

— Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b[$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, il existe un unique réel $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = k$.

— Pour toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a,b[$ et pour tout réel k compris entre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$, il existe un unique réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = k$.

Définition 45
Soit f une fonction définie sur A à valeurs dans B, où A et B sont des ensembles quelconques.
On dit que f est une bijection de A sur B si, pour tout $y \in B$, il existe un élément unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
La fonction qui à $y \in B$ associe son unique antécédente $x \in A$ est une bijection de B sur A appelée la bijection réciproque de f et notée f^{-1}. On dit parfois fonction $inverse$.

Exemples

— La fonction exp est continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, sa bijection réciproque est appelée fonction logarithme Népérien. Son étude sera faite en Terminale.

— La fonction cos est continue et strictement monotone de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. C'est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arcosinus. Son étude sera faite en L1.

— La fonction sin est continue et strictement monotone de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$. C'est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arcsinus. Son étude sera faite en L1.

— La fonction tan est continue et strictement monotone de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. C'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque est appelée fonction Arctangente. Son étude sera faite en L1.

— si n est un entier naturel non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. C'est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, sa bijection réciproque est appelée fonction racine n-ième. Son étude sera faite en L1.

III. Fonction continue sur un intervalle [a,b]

Théorème 57
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Remarque
Ce théorème n'est pas explicitement au programme. Cependant sa démonstration sera proposée en approfondissement.

IV. Recherche de la solution de $f(x) = 0$ par dichotomie

Une fois que l'on a prouvé que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule α dans $[a,b]$, on peut rechercher des valeurs approchées de α grâce à un algorithme dit de dichotomie.
Le principe est le suivant : on calcule l'image du centre c de l'intervalle $[a,b]$ ($c = \frac{a+b}{2}$) par la fonction f. Si $f(c) \times f(a) > 0$ alors α appartient à $[c,b]$ sinon, α appartient à $[a,c]$. Et on recommence le procédé jusqu'à obtenir la précision voulue.

V. Exercice

Exercice 254. Écrire en langage Python une fonction qui prend en argument le nom de la fonction f, les bornes de l'intervalle a et b et la précision souhaitée P, qui renvoie l'intervalle contenant la solution de l'équation $f(x) = 0$ contenue dans l'intervalle $[a, b]$ obtenue par l'algorithme de dichotomie et tel que cet intervalle soit le premier intervalle de la série dont la longueur est inférieure à la précision demandée.

Exercice 255. Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution α et la localiser entre deux entiers consécutifs. Appliquer en suite l'algorithme de dichotomie pour localiser avec une précision $0,01$.

1. $x^2 + 5x = 9$
2. $x^3 + x^2 = 7$
3. $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$
4. $\cos x - x = 0$

Exercice 256. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes. Donner pour chaque solution un encadrement d'amplitude $0,01$.

1. $5x^3 + 8x - 1 = 0$
2. $x^3 - 5x = 1$
3. $x^4 = 32x - 48$

Exercice 257. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $\alpha_n > 0$ racine du polynôme $X^n + X^{n-1} + \dots - 1$; montrer que (α_n) est décroissante, convergente et trouver sa limite.

Fiche 6

Analyse- Fonctions Continuité - Approfondissements-

Warusfel-Vuibert- 2002

Exercice 258. Démonstration du TVI dans un cas particulier. On considère les hypothèses suivantes :

— f est une fonction continue sur $[a, b]$

— $f(a) < f(b)$

— k est un réel vérifiant $f(a) < k < f(b)$

1. On note A l'ensemble des réels x de $[a, b]$ tels que $f(x) < k$ et $B = [a, b] - A$, B est alors l'ensemble des réels de $[a, b]$ tels que $f(x) \geqslant k$. Montrer que A et B sont des ensembles non vides.
2. On définit le couple (a_n, b_n) de suites de la manière suivante :
   — $a_0 = a$ et $b_0 = b$
   — a_n et b_n étant connus, on considère le centre c de l'intervalle $[a_n, b_n]$,
      — si $c_n \in A$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$
      — sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$

   (a) Démonter que pour tout n entier naturel $a_n \leqslant b_n$
   (b) Démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et $b_n \in B$
   (c) Démontrer que la suite (a_n) est croissante et majorée et que la suite (b_n) est décroissante minorée.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
   (e) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite c.
3. conclure.

Exercice 259. Démonstration du théorème si f est continue sur $[a, b]$ alors f admet un maximum sur $[a, b]$. Pour x réel de $[a, b]$, on note $E(x)$ l'ensemble des réels $f(t)$ où t décrit l'intervalle $[a, x]$. Ainsi $E(a) = \{f(a)\}$ et $E(b) = f([a, b])$
Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des majorants de$f$ sur $[a, b]$. Si $f(a)$ appartient à $\mathscr{M}$ alors c'est un maximum de pour f. Sinon, introduisons l'ensemble A des réels x de $[a, b]$ tels qu'il existe un majorant $m(x)$ de $E(x)$ qui n'appartient pas à $\mathscr{M}$ comme $a \in A$, A n'est pas vide.

1. Montrer que $[a, b] - A$ n'est pas vide. Nommons B cet ensemble.
2. On définit le couple (a_n, b_n) de suites de la manière suivante :
   — $a_0 = a$ et $b_0 = b$
   — a_n et b_n étant connus, on considère le centre c de l'intervalle $[a_n, b_n]$,

— si $c_n \in A$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

— sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$

(a) Démonter que pour tout n entier naturel $a_n \leqslant b_n$

(b) Démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et $b_n \in B$

(c) Démontrer que la suite (a_n) est croissante et majorée et que la suite (b_n) est décroissante minorée.

(d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

(e) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.

3. On se propose de montrer que $f(\ell)$ est un élément de $\mathscr{M}$.

(a) Soit μ un réel strictement supérieur à $f(\ell)$. Démontrer l'existence d'un entier n tel que pour tout $t \in [a_n, b_n]$ $f(t) \leqslant \mu$.

(b) Supposons que μ ne soit pas un majorant de f sur $[a, b]$. Démontrer que pour tout $t \in [a, b_n]$ le réel $f(t)$ est inférieur au plus grand des deux nombres $m(a_n)$ et μ. En déduire que $b_n \in A$. Que peut-on en déduire ?

(c) En déduire que pour tout p entier naturel non nul, $\dfrac{1}{p} + f(\ell)$ est un majorant de f sur $[a, b]$.

(d) En déduire que $f(\ell)$ est un majorant de f sur $[a, b]$. Conclure.

(e) Démontrer que toute fonction continue sur un segment admet un minimum sur $[a, b]$.

Exercice 260. Déterminer toutes les fonctions **continues** sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Fiche 7

Analyse- Fonctions
Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

I. Généralités

Définition 46
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite ℓ en a, c'est à dire :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$$

ou encore

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a, et on note $f'(a)$.

Remarques

1. Lorsque f est dérivable en a, nous pouvons encore écrire :
   (1) $f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x-a)$ avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$
   (2) $f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$
2. Si f est dérivable en a, il est clair d'après (1) que $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Ainsi toute fonction dérivable en a est continue en a. Toutefois la réciproque est fausse. Connaître les exemples classiques :
   — la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue et non dérivable en 0
   — la fonction $x\mapsto|x|$ est continue et non dérivable en 0

II. L'écriture différentielle

Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole Δ ; ils notent $\Delta x=x-a$ et $\Delta y=f(x)-f(a)$. Avec ces notations, l'égalité (1) s'écrit $\Delta y=f'(a)\Delta x+\Delta x\varepsilon(\Delta x)$ avec $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$\mathrm{d}y=f'(a)\mathrm{d}x \text{ ou } f'(a)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$$

C'est ce que l'on nomme la notation différentielle.

III. Interprétations

III.1. Interprétation graphique : tangente

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$. Cette tangente a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

III.2. Interprétation numérique : approximation affine

Lorsque f est dérivable en a, la fonction f admet une bonne approximation affine au voisinage de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

III.3. Interprétation cinématique : vitesse

Si $t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ est la loi horaire du mouvement d'un point mobile dans un plan muni d'un référentiel alors $\begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases}$ désignent les coordonnées du vecteur vitesse instantanée de M en t.

IV. Dérivée seconde

Définition 47
Si la fonction f est dérivable en a et si sa dérivée première est elle même dérivable en a, on dit que f est deux fois dérivable en a et la dérivée de sa dérivée en a est notée $f''(a)$ c'est la dérivée seconde de f en a.

V. Exercices

Exercice 261. A l'aide de la définition, étudier la dérivabilité au point a de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en distinguant les cas :

— $a > 0$

— $a = 0$

Exercice 262. Dans chaque cas déterminer tous les réels a tels que $f'(a) = 1$.

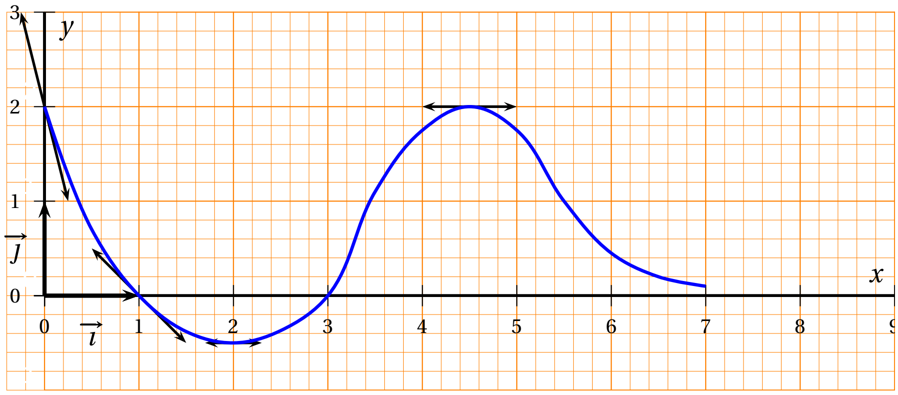
1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \sin(x)$

Exercice 263. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

1. $f(x) = 1 - 3x + x^4$, avec $a = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, avec $a = 4$
3. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ avec $a = \pi$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, avec $a = 1$

Exercice 264.



Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), on considère la courbe ci-dessus représentant une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;7]$.

Toutes les réponses aux questions suivantes seront obtenues à partir du graphique.

1. Lire $f(0)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.
2. Déterminer le signe de la fonction f et celui de sa dérivée f'.
3. Indiquer à 0,1 près des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 265.

1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.
2. En quels points de $\mathscr{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier un dessin.

Exercice 266. Justifier les approximations suivantes au voisinage de 0 :

1. $(1+x)^3 \approx 1+3x$
2. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$
3. $\exp(x) \approx 1 + x$
4. $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$
5. $\sin x \approx x$
6. $\tan x \approx x$

Fiche 8

Analyse- Fonctions
Dérivation - Compléments

Terracher- 2002

I. variations d'une fonction et extremums

Lorsqu'une fonction est dérivable en tout point d'un intervalle I, nous pouvons définir la fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ sur I. Avec la notation différentielle, f' se note encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Rappelons les résultats suivants, admis en classe de première.

Théorème 58
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

— Si la fonction dérivée est nulle sur I alors f est constante sur I

— Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I

— Si f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I

Ainsi l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée f' garde un signe constant.

Exemple
Etudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$. Ainsi

— f' est strictement positive sur $]-\infty, 0]$ sauf en 0 où elle s'annule, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

— f' est strictement négative sur $[0, 4]$ sauf en 0 et en 4 où elle s'annule, donc f est strictement décroissante sur $[0, 4]$

— f' est strictement positive sur $[4, +\infty[$ sauf en 4 où elle s'annule, donc f est strictement croissante sur $[4, +\infty[$

Nous rappelons encore le résultat suivant précisant le lien entre dérivée et extrema locaux. le résultat essentiel découle du théorème précédent.

Théorème 59
Si f dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 un réel de I.

1. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$
2. si en x_0 la dérivée f' s'annule **en changeant de signe** alors f admet un extremum local en x_0.

Remarques

1. Les abscisses des extrema d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée mais si $f'(x_0) = 0$, x_0 n'est pas forcément l'abscisse d' un extremum local, ($f(x) = x^3$ et $x = 0$)
2. Pratiquement, les abscisses des extrema locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements d'orientation des flèches.

II. Exercices

Opérations et dérivées

Exercice 267. Déterminer pour chaque question le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$
2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
3. $f(x) = 3x^7$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
6. $f(x) = -\dfrac{5}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
8. $f(x) = (2x-1)x^2$
9. $f(x) = 3x\sin x$
10. $f(x) = x\sqrt{x}$
11. $f(x) = \cos x \sin x$
12. $f(x) = \cos^3(x)$
13. $f(x) = (x+4)^3$
14. $f(x) = (x+\sin x)^2$
15. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^4$
16. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$
17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
18. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$
19. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
20. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1+\cos x}$
21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

Exercice 268. Soit n un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1. En utilisant une formule sommatoire, calculer de deux manières la dérivée de $f : x \mapsto 1 + x + x + ... + x^n$, pour $x \neq 1$.
2. En déduire que pour $x \neq 1$, une formule sommatoire de $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.
3. Applications :
   (a) Calculer les sommes :
      i. $A = 1 + 2\times 2 + 3\times 2^2 + ... + 16\times 2^{15}$
      ii. $B = 1 + 2\sqrt{3} + 3\times 3 + ... + 20\times 3^9\sqrt{3}$
   (b) Etudier la limite de $u_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + ... + \dfrac{n}{3^{n-1}}$.

Exercice 269. On pose pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, $f_n(x) = x^n\sqrt{x}$. Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Variation et extrema

Exercice 270. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et étudier les variations de f.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$
3. $f(x) = x^2(x-1)^3$
4. $f(x) = x^4 - 4x$
5. $f(x) = x(1-x)$
6. $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
9. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0,\pi]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0,\pi[$
11. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$
13. $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$
14. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
15. $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$

Exercice 271. On pose, pour $n \geqslant 2$, $f(x) = x^n$.

1. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$
2. Pour quelles valeurs de n la fonction f admet-elle un extremum local en 0.

Exercice 272. Peut-on trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante et admettant un extremum local pour toute valeur entière ?

Fiche 9

Analyse- Fonctions Dérivation - Dérivation d'une composée-tableaux récapitulatifs

Terracher- 2002

I. Dérivation d'une composée

Théorème 60
Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0, et v une fonction définie sur un intervalle J contenant $y_0 = u(x_0)$. Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en y_0, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = u'(x_0) \times v'(y_0)$.

Démonstration : Soit x un réel de I, la dérivabilité de u en x_0 entraîne $u(x) - u(x_0) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))$ où $z(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.
De même, si s est un réel de J, la dérivabilité de v en y_O entraîne $v(s) - v(y_0) = (s - y_0)(v'(y_0) + k(s))$ où $k(s)$ tend vers 0 quand s tend vers y_0.
En posant $s = u(x)$, on obtient donc,

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (u(x) - u(x_0))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Donc

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = (x - x_0)(u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Si $x \neq x_0$, en divisant par $(x - x_0)$ on obtient

$$\frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = (u'(x_0) + z(x))(v'(u(x_0)) + k(u(x)))$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$ et que $\lim\limits_{y \to y_0} k(y) = k(y_0)$ on peut conclure que $\lim\limits_{x \to x_0} k(u(x)) = 0$, de plus $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = 0$ donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = u'(x_0)v'(u(x_0))$$

Exemple
Montrer que $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Posons $u(x) = x^2$ et $v(y) = \sin(y)$, ces deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, or $f = v \circ u$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$f'(x) = u'(x) \times v'(y) = 2x \cos(x^2)$$

.

Exemples d'applications

Théorème 61
Soit u une fonction dérivable en x_0. Alors

— la fonction $f : x \mapsto (u(x))^n$, $(n \in \mathbb{Z})$, est dérivable sur en x_0 (sous la condition $u(x_0) \neq 0$ pour $n < 0$ et
$$f'(x_0) = nu'(x_0)(u(x_0))^{n-1}$$

— Si $u(x_0) > 0$, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en x_0 et
$$g'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$$

— la fonction $h : x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable en x_0 et
$$h'(x_0) = u'(x_0) \times \exp(u(x_0))$$

II. Tableau récapitulatif

Dérivées des fonctions usuelles

fonction	dérivée	commentaire	ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	k constante	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}$ si $n < 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		sur $]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$		sur $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \exp(x)$	$x \mapsto \exp(x)$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		sur $]0; +\infty[$

Opérations et compositions

fonction	dérivée	commentaire	conditions
$u+v$	$u'+v'$		
au	au'	a constante	
uv	$u'v+uv'$		
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$		si $v(x)\neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$		si $v(x)\neq 0$
$x\mapsto v\circ u(x)$	$x\mapsto u'(x)\times v'(u(x))$		
$x\mapsto (u(x))^n$	$x\mapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$	$n\in\mathbb{Z}$	si $u(x)\neq 0$ lorsque $n<0$
$x\mapsto\sqrt{u(x)}$	$x\mapsto\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$		si $u(x)>0$
$x\mapsto\exp(u)$	$x\mapsto u'(x)\exp(u(x))$		
$x\mapsto\ln u(x)$	$x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$		si $u(x)>0$

III. Exercices

III.1. calcul de dérivées

Exercice 273. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

1. $f(x)=\cos(x^2)$
2. $f(x=\cos(\cos x))$
3. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$
4. $f(x)=\sqrt{x^4+1}$
5. $f(x)=\sqrt{5+\sin x}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$
8. $f(x)=\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
9. $f(x)=x^2\times\exp(-x^2)$

Exercice 274. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable sur une réunion d'intervalles et calculer sa dérivée :

1. $f(x)=\tan(2x)$
2. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
3. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$
4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
5. $f(x)=\sqrt{\cos x}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x}$

Exercice 275. Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto\exp(5x)$

Exercice 276. Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x\exp(x)$

Exercice 277. **maths expertes avec complexes**
Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto x\cos x$

Exercice 278. approfondissements

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I

1. Calculer la dérivée seconde de $u \times v$.
2. Calculer la dérivée troisième de $u \times v$.
3. Calculer la dérivée n-ième de $u \times v$.

Optimisation

Exercice 279. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans l'arche de parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = 1 - x^2$ (avec $y \geqslant 0$), on inscrit un rectangle $MNQP$ ayant pour axe (Oy) avec M et N sur (Ox) et P et Q sur $\mathscr{P}$.

1. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?
2. Quel est le point d'abscisse positive de $\mathscr{P}$ le plus près de l'origine ?
3. La tangente à $\mathscr{P}$ en $S(x, y)$ coupe (Ox) en A et (Oy) en B ($x > 0$ et $y > 0$). Déterminer S pour que l'aire du triangleOAB soit minimale.

Comparaison de fonctions

Exercice 280. Etudier la position relative de la courbe de la fonction cos par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 281. Démontrer que, pour tout x positif ou nul, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 282. Démontrer que, pour tout x positif ou nul,et inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$

$$\sin x \leqslant x$$

Fiche 10

Analyse- Fonctions
Dérivation -Approfondissements- Les exercices de Monsieur Tosel

N. Tosel- Calculus- 2017- Epsitemon Exercices 82 à 100. Bonne chance et bon vent !

Fiche 11

Analyse- Fonctions
Convexité

Hachette MPSI - 2008

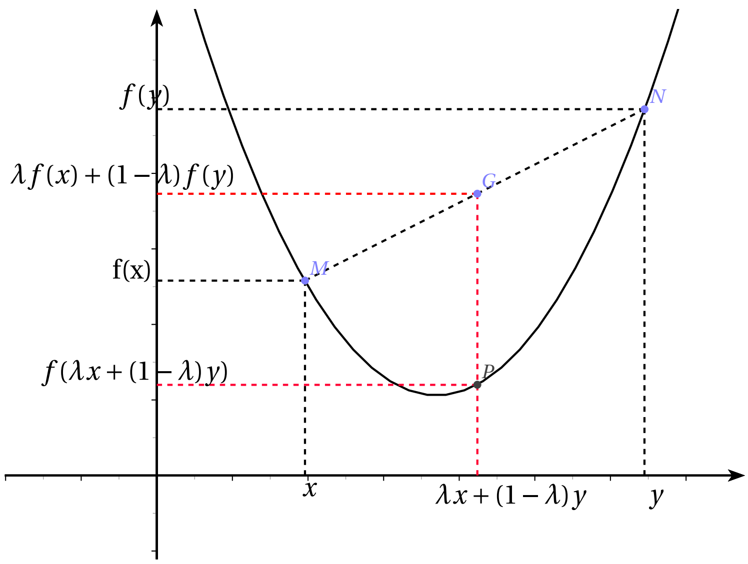
I. Définition

Définition 48
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Interprétation graphique

Soit M et N deux points de la courbe représentative de f d'abascisses respectives x et y.
Soit G le point de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y\ ;\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MG}$ sont $((1-\lambda)(y-x)\ ;\ (1-\lambda)(f(y)-f(x))$. Les coordonnées de de $\overrightarrow{MN}$ sont $((y-x)\ ;\ (f(y)-f(x))$. On obtient ainsi l'égalité $\overrightarrow{MG} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN}$ qui permet de conclure que le point G est un point du segment $[MN]$.En notant P le point de la courbe d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$. Les coordonnées de P sont $(\lambda x + (1-\lambda)y\ ;\ f(\lambda x + (1-\lambda)y))$. La définition de la convexité de f exprime donc que le point P est situé en dessous de G.



Théorème 62
Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de sa courbe est situé en dessous de la corde correspondante.

Exemples

1. la fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$
2. la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$

Définition 49
Une fonction est dite concave sur I si son opposée est convexe sur I. Tout arc est situé au dessus de sa corde.

II. Caractérisations des fonctions convexes dérivables

Croissance de la fonction dérivée

Théorème 63
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I

Démonstration : Admis □

Dérivée seconde positive sur I

Théorème 64

— Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I

— Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle I est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur I

Démonstration : Admis □

Définition 50
Un point de la courbe en lequel la dérivée seconde **s'annule en changeant de signe** est appelé **point d'inflexion**. La courbe traverse sa tangente en ce point.

Application

— la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

— la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

— la fonction inverse est convexe sur $]0, +\infty[$ et **concave** sur $]-\infty, 0[$

— la fonction racine carrée est concave sur $]0, +\infty[$

— la fonction tangente est convexe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Position par rapport à une tangente

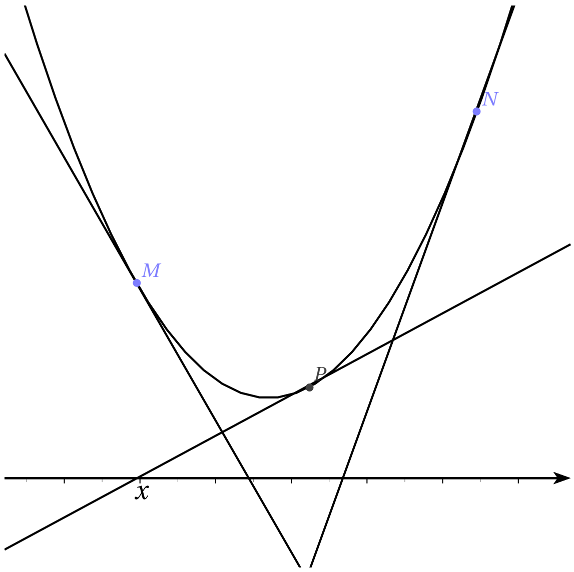
Théorème 65
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration : Preuve du programme sens : si f convexe alors la courbe est situé au dessus de chacune de ses tangentes. Si f est une fonction dérivable sur I. l'équation de la tangente à sa courbe en un point d'abscisse a est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Notons $d(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Cette fonction d est dérivable sur I et sa dérivée est $d'(x) = f'(x) - f'(a)$. La croissance de la fonction f' implique que :

— si $x \leqslant a$ alors $f'(x) \leqslant f'(a)$ et donc $d'(x) \leqslant 0$.

— si $x \geqslant a$ alors $f'(x) \geqslant f'(a)$ et donc $d'(x) \geqslant 0$.

Ainsi d' est décroissante sur l'intervalle situé à gauche de a et croissante sur l'intervalle situé à droite de a et donc la fonction d admet un minimum sur I atteint lorsque x vaut a. Or $d(a) = 0$ donc d est positive sur I donc $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$ et donc la courbe de f est au dessus de sa tangente. $\square$



Application

— $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1$

— $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leqslant x$

— $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{1}{x+1} \geqslant -x+1$

III. Exercices

Exercices

Exercice 283. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

   a. $\ln 2$ **b.** $-2\ln 2$

   c. $2\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

   a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

   c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

   a. $y = 2x$ **b.** $y = x - 1$

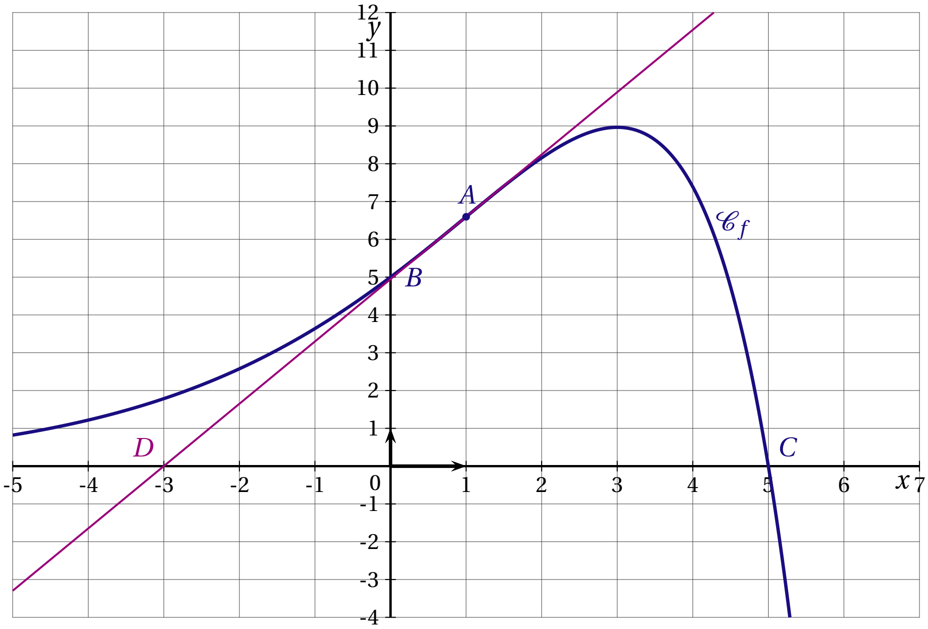
   c. $y = x$ **d.** $y = 2x - 1$

4. La fonction f est :

   a. concave sur $[0\ ;\ 1]$ **b.** concave sur $[0\ ;\ +\infty[$

   c. convexe sur $[0;+\infty[$ **d.** convexe sur $[0;1]$

Exercice 284. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A\left(1\ ;\ 4\mathrm{e}^{0,5}\right)$, $B(0\ ;\ 5)$ et $C(5\ ;\ 0)$.
Le point $D(-3\ ;\ 0)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Par lecture graphique

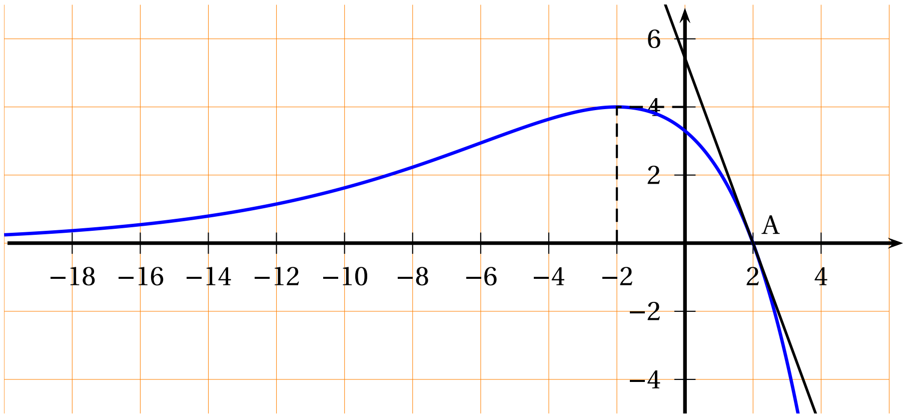
1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\mathrm{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5 - 0,5x)\mathrm{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = 0,25(-x+1)\mathrm{e}^{0,5x}$.
   (b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.
2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)\mathrm{e}^{0,5x}$. Démontrer que que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 285. On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

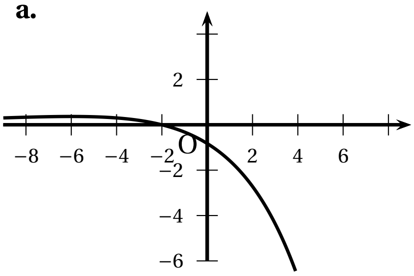
   a. $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ **b.** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c.** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d.** $y = -5x + 4\mathrm{e}$

2. La fonction f est :

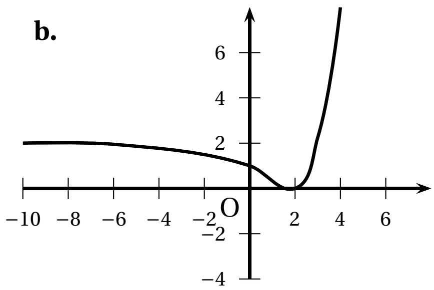
   a. concave sur $]-\infty\,;0]$ **b.** convexe sur $]-\infty\,;0]$ **c.** concave sur $[0\,;2]$ **d.** convexe sur $[0\,;2]$

3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?

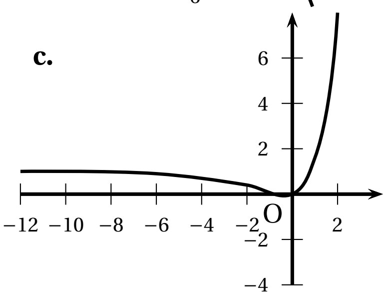
a.



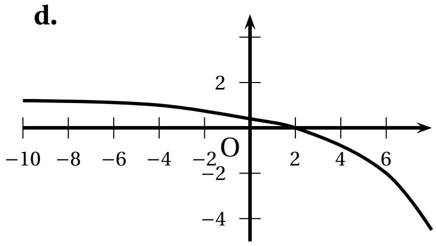
b.



c.

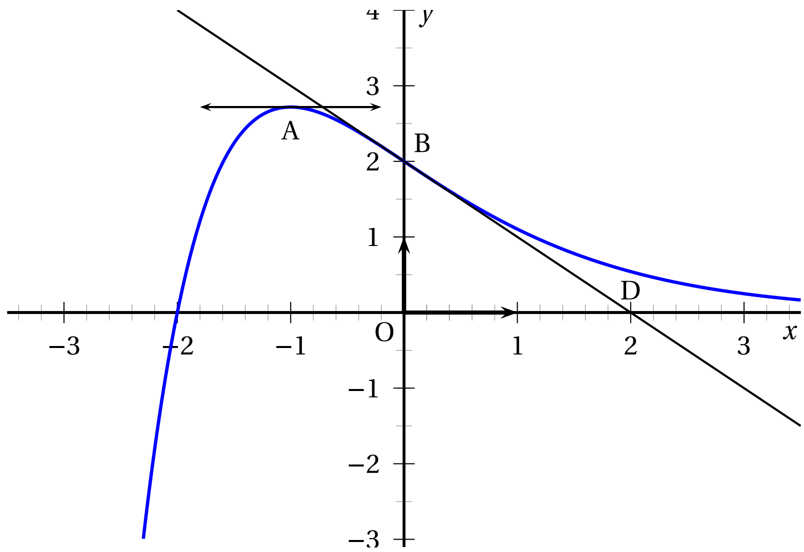


d.



Exercice 286. *Les parties A et B sont indépendantes.*

Partie A
La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points A$(-1\,;\,\mathrm{e})$ et B$(0\,;\,2)$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2\,;\,0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.
Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$.
5. $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

Partie B
Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.
Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
   La fonction g est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 287. Etudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(-\dfrac{x^2}{2})$. Préciser les points d'inflexions éventuels.

Exercice 288. Etudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$.Préciser les points d'inflexions éventuels.

Exercices approfondissements

Exercice 289. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I

Démontrer que f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout x_0 dans I, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I-\{x_0\}$.

Exercice 290.

1. Démontrer que si une fonction dérivable sur I est convexe alors sa dérivée est croissante sur I.
2. Démontrer que si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a)=f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. (Théorème de Rolle) On pourra utiliser le résultat de l'exercice 251.
3. Déduire du théorème précédent que si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Égalité des accroissements finis.
4. Démontrer que si une fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est croissante alors f est convexe sur I.

Exercice 291. Inégalité de Jensen. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \geqslant 2, \forall (x_i) \in I^n, \forall (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Exercice 292.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln x$ est convexe.
2. En déduire :
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$
3. Démontrer que :
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3, a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3, (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Fiche 12

Analyse- Fonctions
Fonction exponentielle et fonction logarithme Néperien

Terracher- 2002

I. La fonction exponentielle. Rappels de première

Généralités

Théorème 66
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la nomme fonction exponentielle, elle est notée exp.

Théorème 67
1. $\exp(0) = 1$
2. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
3. signe : pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
4. sens de variation : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
5. convexité : la fonction exp est convexes sur $\mathbb{R}$
6. Inégalité de convexité fondamentale : pour tout x réel, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

Le nombre e

On pose $\exp(1) = e$. La calculatrice donne :

$$e \approx 2,718281828.$$

propriétés algébriques

Théorème 68
Pour tous réels a et b,

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Théorème 69
Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n

- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(\dfrac{a}{n}) = \sqrt[n]{\exp(a)}$ $(n \geqslant 1)$.

Application $\exp(n) = e^n$

La notation e^x

Par convention, on prolonge à $\mathbb{R}$ l'égalité précédente valable sur $\mathbb{Z}$ pour tout x réel, $\exp(x) = e^x$.

Propriétés asymptotiques

Théorème 70

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

II. La fonction logarithme Népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0+\infty[$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$. Sa fonction réciproque, définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée logarithme Népérien, on note $\ln(x)$ le logarithme Népérien du nombre x.

Définition 51
La fonction logarithme Népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est notée ln.

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in]0;+\infty[\end{cases} \quad \text{est équivalent à} \begin{cases} x = e^y \\ y \text{ réel} \end{cases}$$

Théorème 71

— La fonction logarithme n'est définie que pour $x > 0$

— $\ln(1) = 0$

— $\ln(e) = 1$

— $\ln(\frac{1}{e} = -1$

— **Pour tout réel** x, $\ln(e^x) = x$

— **Pour tout réel strictement positif**,$e^{\ln(x)} = x$

Propriétés asymptotiques

Théorème 72

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

Propriétés algébriques

Théorème 73
Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$$

Théorème 74
Pour tous réels strictement positifs a et b, et pour tout entier relatif n

* $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
* $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
* $\ln a^n = n \ln a$
* $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$

Dérivation, Variations et signe

Théorème 75
La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifie :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Théorème 76
une limite à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Théorème 77
inégalité de convexité fondamentale :
Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\ln(x) \leqslant x - 1$$

Théorème 78
Dérivée d'une composée
Si u est une fonction dérivable sur un ensemble E et **à valeurs strictement positives** alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur E et on dispose de l'égalité :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

III. logarithme décimal

Définition

On note log la fonction définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Formules à connaître

$$\forall x > 0 \quad \log'(x) = \frac{1}{x \times \ln 10}$$
$$\forall a, b > 0 \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

IV. Exercices

Exercice 293. Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1. $\ln x$
2. $\ln(3 - x)$
3. $\ln(x + 2)$
4. $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 294. Simplifier.

1. $\mathrm{e}^{\ln 3}$
2. $\mathrm{e}^{-\ln 5}$
3. $\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
4. $\ln(\mathrm{e}^5)$
5. $\ln 1 + \ln \mathrm{e}$
6. $\ln(\mathrm{e}^{-2})$

Exercice 295. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = \ln 7 + \ln 8$
2. $B = \ln 20 - \ln 4$
3. $C = -\ln 4 + \ln 28$
4. $D = 3\ln 2$
5. $E = -2\ln 4$

Exercice 296. Dans chacun des cas, comparer les réels A et B.

1. $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$
2. $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$
3. $A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$
4. $A = \ln 25$ et $B = 2\ln 5$

Exercice 297. Résoudre les équations suivantes.

1. $\mathrm{e}^x = 2$
2. $\mathrm{e}^x = -5$
3. $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{4}$

Exercice 298. Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

2. $\ln x = \dfrac{\ln 5}{2}$
3. $\ln x = -\ln 9$

Exercice 299. Résoudre les équations suivantes.

1. $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$
2. $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$
3. $(\ln x)(6 - 3\ln x) = 0$

Exercice 300. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geqslant 1$
2. $\ln(x) > -2$
3. $\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
4. $\ln(x) < 3$

Fonction ln

Exercice 301. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1. 0 a un seul antécédent par f.
2. L'image de 1 par f est e.
3. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
4. L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
5. Il n'existe aucun réel x tel que $\ln x > 100$.

Propriétés algébriques

Exercice 302. Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5) + \ln 2$
2. $3\ln 2 - \ln 4$
3. $(\ln(e^3))^2$
4. $e^{\ln 2 + \ln 3}$

Exercice 303. Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1. $A = e^{2\ln 3}$
2. $B = e^{4\ln 2}$
3. $C = e^{-\ln 4}$
4. $D = e^{-5\ln 2}$

Exercice 304. Simplifier au maximum les expressions
suivantes :

1. $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$

2. $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$
3. $C = \dfrac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$
4. $D = \dfrac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Exercice 305. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = 2\ln 5 + \ln 3$
2. $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$
3. $C = -\ln 5 + 3\ln 2$
4. $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

Exercice 306. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
4. $3\ln 2 - \ln 16$

Exercice 307. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$.

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $\ln 24 - \ln 8$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ln 4$
4. $2\ln 3 - \ln 27$
5. $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$

Exercice 308. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1. $\ln 20$
2. $\ln 100$
3. $\ln\left(\dfrac{4}{25}\right)$
4. $\ln\sqrt{10}$

Exercice 309. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$
2. $\ln 441$
3. $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$
4. $\ln\sqrt{21}$

Exercice 310. On donne les encadrements suivants :

$$0,69 < \ln 2 < 0,70 \text{ et } 1,60 < \ln 5 < 1,61.$$

En déduire, sans calculatrice, les encadrements des nombres suivants.

1. $\ln 4$
2. $\ln\left(2^5\right)$
3. $\ln \dfrac{5}{2}$
4. $\ln \dfrac{16}{25}$

Équations

Exercice 311. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln x = 2$;
2. $\ln x = -1$;
3. $3\ln x - 9 = 0$.

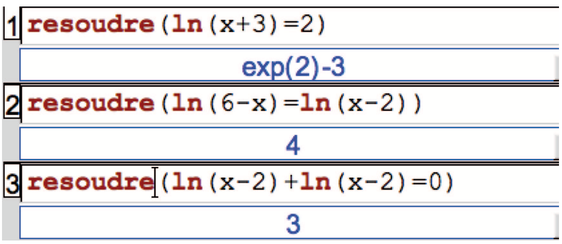
Exercice 312. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x+5) = \ln 3$;
2. $\ln(x^2) = \ln 9$;
3. $\ln(x^2 + x) = \ln 6$.

Exercice 313. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 + 3\ln x = 14$;
2. $\ln(x^2) = \ln 9$;
3. $\mathrm{e}^{2-3x} = 5$;
4. $2\mathrm{e}^{2x} - 10 = 0$.

Exercice 314. Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.



Exercice 315. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2-x) + 1 = 0$;
2. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
3. $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

Exercice 316 — Changement de variable

1. Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.
2. En déduire les solutions des équations suivantes :

(a) $e^{2x} - 2e^{x} - 15 = 0$;

(b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Exercice 317. Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).
2. $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$ (on pourra poser $X = \ln x$).

Inéquations

Exercice 318. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2-3x) \geqslant 0$;
2. $\ln(1-x) < 1$;
3. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right) > \ln 3$.

Exercice 319. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$;
2. $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$;
3. $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

Exercice 320. Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 resoudre(ln(3x)-2ln(x)>=0)
                (x>0)and (x<=3)
2 resoudre(ln(x*(x+1))<ln(6))
        ( (x>(-3))and (x<(-1)),  (x>0)and (x<2)  )
```

Exercice 321. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x} > 3$
2. $e^{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$
3. $e^{x} < -e$

Exercice 322. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2e^{x} - 3 > 9$
2. $4e^{x} - 1 \geqslant e^{x} + 5$
3. $e^{2x} - 5e^{x} < 0$

Exercice 323. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
2. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
3. $\ln(2x-1) + 1 > 0$

Exercice 324. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction ln, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;

2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

Exercice 325. Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\dfrac{1}{5}$.
Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à $0,999$?

Limites

Exercice 326. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^2 - \ln x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right)$

Exercice 327. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left((\ln x)^2 - 3\ln x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(-(\ln x)^2 + 2\ln x - 3\right)$

Étude de fonction

Exercice 328. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4. En déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$ que l'on précisera.

Exercice 329. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. $f(x) = 3x + 5 - \ln x$
2. $f(x) = \ln x + x^4$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4\ln x$
4. $f(x) = (\ln x)(x+1)$

Exercice 330. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{3 - 2\ln x}{x-1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
3. $f(x) = (\ln x)^3$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

Exercice 331. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I =]0;1[$
2. $f(x) = (\ln x)^2(3 - \ln x)$ sur $I =]0;+\infty[$
3. $f(x) = (2 - \ln x)(1 - \ln x)$ sur $I =]0;+\infty[$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{5\ln x + 2}$ sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 332. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2$
2. $f(x) = 5x - x\ln x$
3. $f(x) = \dfrac{3 - \ln x}{x}$

Exercice 333. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 2 - 5(\ln x)^2$ sur $I =]0;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{4}{\ln x}$ sur $I =]0;1[$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2\ln x - x}$ sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 334. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + x^2.$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
5. À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Exercice 335. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

   (b) Dresser le tableau de variation de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Construire $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 336. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.

Fonction $\ln(u)$

Exercice 337. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x-3)$
2. $g : x \mapsto \ln(-8x+4)$
3. $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

Exercice 338. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(5x-1)$, $I = \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$
2. $f(x) = \ln(9-x^2)$, $I =]-3;3[$
3. $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, $I = \mathbb{R}$

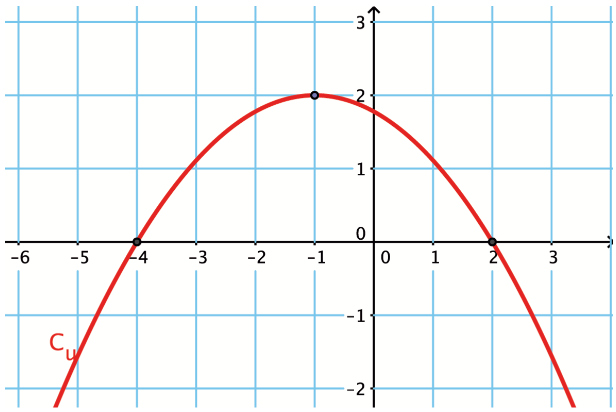
Exercice 339. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \ln(3x^2-5x+7)$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln(9-3x)$, $I =]-\infty;3[$
3. $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$, $I =]-1;5[$

Exercice 340. Dans chaque cas, étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

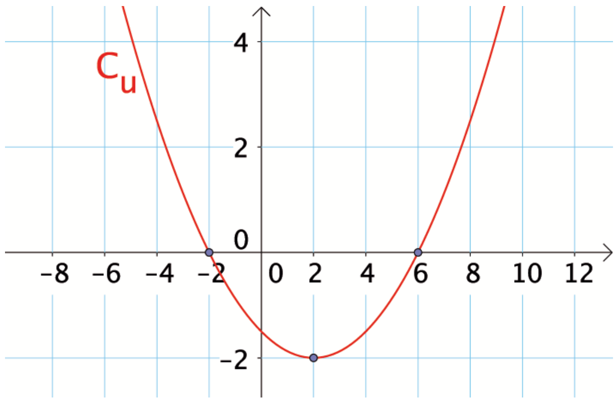
1. $f(x) = \ln(6-2x)$, $I =]-\infty;3[$
2. $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x-1)$, $I =]0;+\infty[$

Exercice 341. On donne ci-dessous la courbe représentative C_u d'une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u)$.
2. Étudier les limites de la fonction $\ln(u)$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $\ln(u)$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln(u)$.

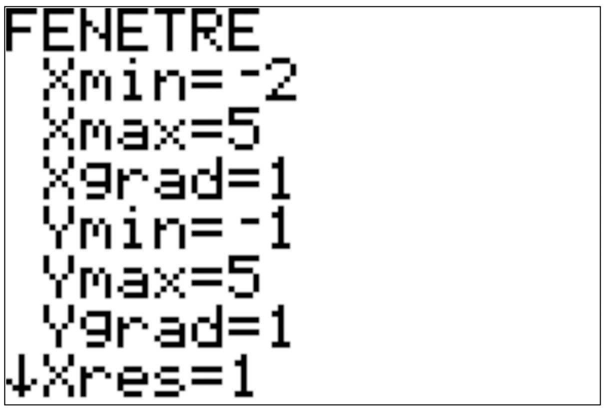
Exercice 342. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la courbe suivante.

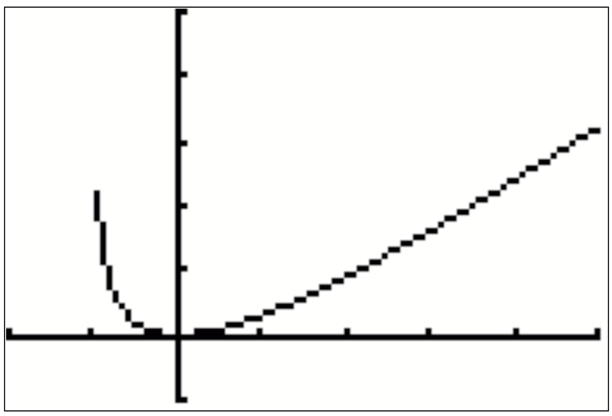


Exercice 343. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

On a représenté ci-dessous la fonction f à l'aide d'une calculatrice.





1. Conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudier la limite de f en -1. En donner une conséquence graphique.

   (b) Montrer que pour tout réel $x > 0$,

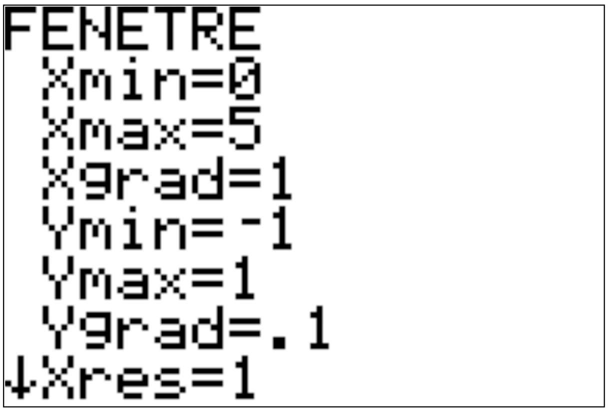
   $$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

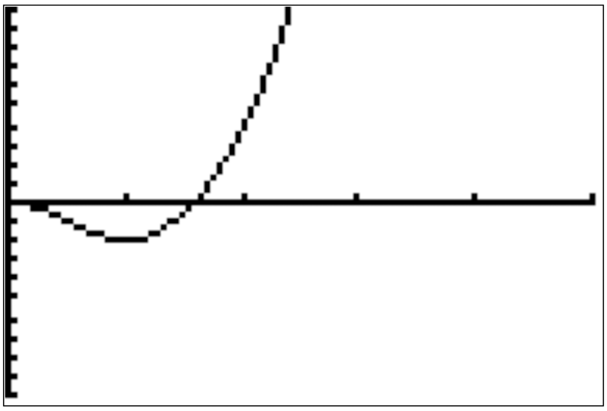
   (c) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Démontrer la conjecture établie au 1).

Exercice 344. Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln\left(x^2+1\right).$$

La courbe de f a été tracée à l'aide d'une calculatrice.





1. Conjecturer :
   (a) le sens de variation de f ;
   (b) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Pour tout réel $x \in [0;5]$, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0;5]$.
   (b) Donner un encadrement de la solution non entière α d'amplitude 10^{-2}.
   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

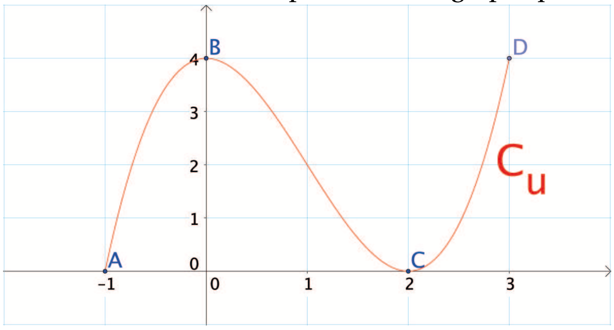
Exercice 345. Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,4[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel $x \in]-4\,;\,4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un élément de symétrie.
2. Étude de f sur $[0\,;\,4[$.
   (a) Déterminer la limite de f en 4. En donner une conséquence graphique
   (b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,4[$.
   (c) En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,4[$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
   (e) Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
3. Tracer précisément la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Exercice 346. Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ est donnée ci-dessous. On note f la fonction $\ln(u)$.

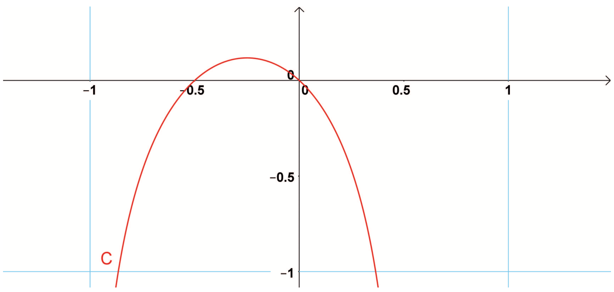


1. Justifier que f est définie sur $]-1\,;2[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Étudier les limites de f en -1 et en 2.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Discuter selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 347. Soit f la fonction définie sur $\left]-1\,;\frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
   Vérifier graphiquement le résultat.
2. (a) La courbe $\mathscr{C}$ semble-t-elle admettre une tangente horizontale ? Si oui, en quel point ?
   (b) Démontrer cette conjecture.

Logarithmes et suites

Exercice 348. En 2015, la population d'une ville compte
250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2 %. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Exercice 349 — Placement Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

Exercice 350 — Absorption d'un médicament Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h.
Combien de temps faut-il attendre pour que 99 % du médicament ait disparu de l'organisme ?

Exercice 351. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
$1+5+5^2+\ldots+5^n \geqslant 10^9$.

Exercice 352 — Comportement d'une suite **Étude d'une fonction**
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x.$$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire que, pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

Étude d'une suite récurrente
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

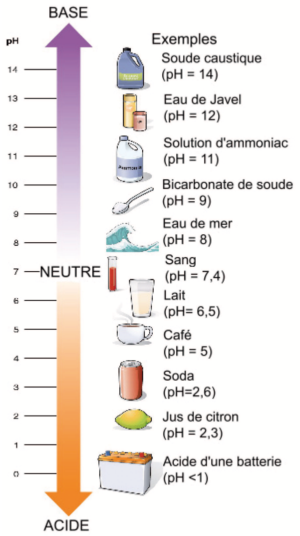
1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Logarithme décimal

Exercice 353. Résoudre les équations suivantes dans $]0;+\infty[$.

1. $\log(x) = 1$
2. $\log(x) = -3$
3. $\log(x) = 5$
4. $\log(x) = 0$

Exercice 354.



Le pH d'une solution en fonction de la concentration des ions oxonium est donné par la formule : $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$ où $\left[H_3O^+\right]$ est exprimée en moles par litres.

1. Calculer le pH d'une eau savonneuse dont la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ est de 5×10^{-10}.
   Cette solution est-elle acide ou basique ?
2. Calculer la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ des solutions suivantes :
   (a) eau pure de pH 7 ;
   (b) soda de pH 2,6 ;
   (c) eau de mer de pH 8.
3. Comment varie la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ quand le pH augmente ?

Exercice 355. Le niveau d'intensité sonore L (en décibels) d'un son est donnée par la formule : $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et I_0 le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). On prendra $I_0 = 10^{-12}$ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

1. Compléter le tableau suivant :

L (en dB)	I (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$)	Exemple
140		Avion au décollage
	1	Discothèque
100		Marteau piqueur
	10^{-4}	Restaurant scolaire
60		Salle de classe
	10^{-5}	Conversation normale
20		Vent léger

2. Lorsque l'intensité I double, de combien de décibels augmente L ?
3. Lorsque L augmente de 20 dB, par combien est multiplié I ?

Histoire : Le bel (B) et le décibel (dB) sont des unités acoustiques nommées ainsi en l'honneur du scientifique Alexander Graham Bell. Il est principalement connu pour l'invention du téléphone en 1876.

Problèmes

Exercice 356. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x - 1)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer des équations des tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement aux points A et B.

Exercice 357 — Carbone 14 À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années. Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique. L'âge de l'objet $A(x)$ en années est modélisé par $A(x) = -k \ln x$ où k est une constante et x est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.

1. La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5 730 ans. En déduire la valeur de k (arrondir à l'unité).
2. Dans la suite, on prendra $A(x) = -8267 \ln x$.
   (a) Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?

Le pied de pélican (*Aporrhais pespelecani*)

   (b) Quelle est la proportion en carbone 14, de la momie de Xin Zhui âgée de 2170 ans ?

Exercice 358 — Bactéries Le nombre de bactéries présentes dans une culture après t jours est donné par :
$N(t) = a\mathrm{e}^{bt}$, où a et b sont deux constantes réelles.

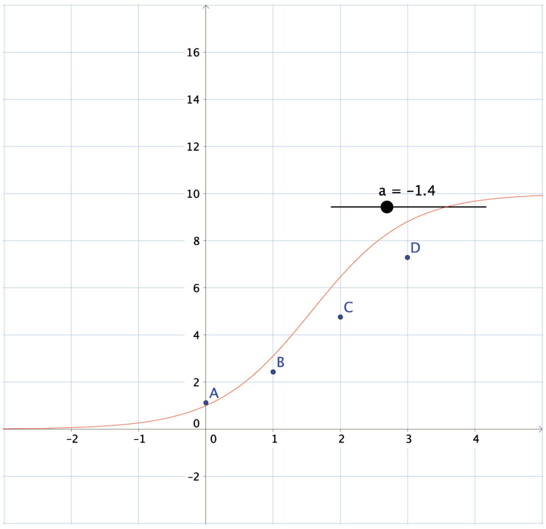
1. Calculer a et b sachant qu'initialement, il y a 10 000 bactéries et qu'au bout de deux jours, il y a 50 000
   bactéries.
2. Quel sera le nombre de bactéries au bouts de 6 jours ? (arrondir à l'unité)
3. Au bout de combien de jours, la culture dépassera-t-elle 400 000 bactéries ?

Exercice 359 — Modélisation   Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants équipés d'une tablette dans un pays de 60 millions d'habitants.

Année	2012	2013	2014	2015
Effectif (en millions)	1,12	2,43	4,76	7,29

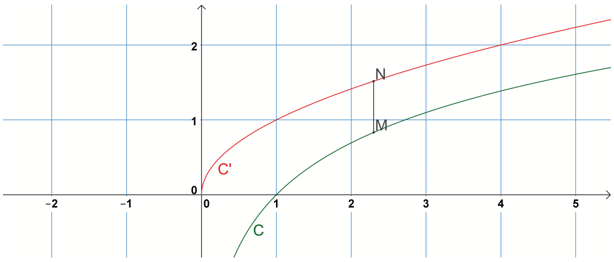
On souhaite modéliser par une fonction cette situation. x désigne le temps, en années, écoulé depuis 2012.
On donne $f(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{ax}+1}$ où a est un réel. $f(x)$ désigne le nombre d'habitants équipés, en millions.

1. (a) À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C et D issus des données statistiques. Créer un curseur a variant entre -5 et 5 avec un incrément de $0,1$. Représenter la fonction f.



   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, f semble-t-elle donner une modélisation satisfaisante de la situation ?
2. Dans la suite, on prend $a = -1,08$.
   (a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 9$. Interpréter ce résultat.
   (b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 360 — Limite d'une distance   Dans un repère orthogonal, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction ln et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction racine carrée.
Soit x un réel strictement positif. On note respectivement M et N les points de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'abscisses x.



1. Construire cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Quelle semble être la limite de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
3. (a) Pour tout réel $x > 0$, montrer que :

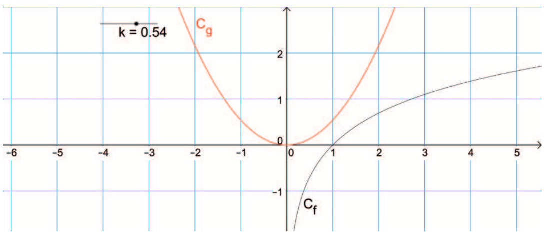
$$\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x}\left(1 - 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).$$

   (b) Démontrer la conjecture établie au 2.

Exercice 361 — Nombre de solutions d'une équation Soit k un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\ln x = kx^2 \text{ avec } x > 0.$$

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k variant de -2 à 2 avec un incrément de $0,01$.
   Représenter les fonctions ln et $x \mapsto kx^2$.



   (b) On suppose $k > 0$. Trouver à l'aide du logiciel, une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) semble admettre une unique solution.
   (c) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).
2. On suppose $k < 0$. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

D'après épreuve pratique 2007

Thème 6 : Probabilités

Fiche 1

Probabilité- Modélisation de la succession d'épreuves

I. Modélisation d'une succession d'épreuves

Définition 52

— Rappelons qu'une expérience aléatoire est un processus conduisant à un résultat appelé issue dont on peut dire deux choses :

  — on connaît l'ensemble des issues possibles que l'on note Ω

  — on ne peut savoir quelle issue va être réalisée avant d'effectuer l'expérience

— On dit que des expériences aléatoires sont indépendantes si la réalisation de l'un d'entre elle n' a pas de raison a priori d'influencer les conditions de réalisations des autres expériences.

Règle fondamentale de modélisation d'une succession d'épreuves indépendantes Si E_1 , E_2,...,E_n sont des épreuves aléatoires supposées « indépendantes » dans leur ensemble, on choisit de modéliser l'épreuve consistant en leur succession de la manière suivante

— L'ensemble des issues de la succession est le produit cartésien des univers de chacune des expériences : $E = E_1 \times \times E_2 \times ... \times E_n$.

— Le produit d'un $n - uplet$ est le produit des probabilités de chacune des composantes de ce $n - uplet$.

Exemples

On considère une urne contenant quatre boules deux blanches et deux noires.

Considérons les deux expériences aléatoires suivantes : tirer une boule de l'urne, noter la couleur puis tirer une seconde boule dans l'urne sans remettre la première dans l'urne. Comment modéliser cette expérience aléatoire ?

— Considérons les deux expériences aléatoires suivantes : tirer une boule de l'urne, noter la couleur puis tirer une seconde boule dans l'urne après avoir remis la première dans l'urne. Ces deux expériences aléatoires sont indépendantes.

— Considérons une expérience qui consiste à tirer trois fois successivement avec remise une boule dans une urne contenant une proportion de boules blanches égale à p. Quelle est la probabilité de l'événement il y a exactement deux boules blanches ?

II. Schéma de Bernoulli

épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

Le dernier exemple est un cas particulier de succession de trois expériences aléatoires indépendantes ayant deux issues.

Définition 53
Une épreuve à deux issues est appelée épreuve de Bernoulli. La loi de probabilité choisie sur l'ensemble des deux issues est appelé loi de Bernoulli. On convient de nommer l'une des issues « succès » ,l'autre sera désignée par « échec ».

Schéma de Bernoulli

Définition 54
On appelle schéma de Bernoulli toute répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

On peut coder les issues d'un schéma de Bernoulli comme les branches d'un arbre ou des mots de n lettres choisies parmi les lettres S et E. Ainsi pour calculer le nombre d'issues réalisant un événement défini sur l'univers d'un schéma de Bernoulli, on pourra utiliser les résultats de dénombrement.

II.1. Exemple fondamental de variable aléatoire définie sur l'univers d'un schéma de Bernoulli : le nombre de succès- loi binomiale

Définition 55
La variable aléatoire X,définie par le nombre de succès lors de la réalisation d'un schéma de Bernoulli d'ordre n, la probabilité du succès étant nommée p, suit une loi de probabilité appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note$\mathscr{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n, p.

Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Théorème 79
Si X désigne une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors si k désigne un entier naturel,

— si $k > n$ alors $P(X=k)=0$

— si $k \leqslant n$ alors $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Démonstration : Considérons un schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétition et p est la probabilité du succès. Si k est un entier naturel strictement supérieur à n, l'événement « obtenir k succès ne peut être réalisé car le nombre de répétitions de l'épreuve est strictement inférieur à k. Supposons alors que $n \geqslant k$. Les issues réalisant l'événement $(X=k)$ sont les n-uplets comportant k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E. Ces $n-upets$ ont tous la même probabilité qui est $p^k(1-p)^{n-k}$. Il suffit de compter le nombre de $n-uplet$ réalisant l'événement $X=k$. Or, il y a $\binom{n}{k}$ de choisir les composantes du $n-uplet$ qui seront égales à S. Ainsi $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ □

III. Exercices

Capacités attendues

— Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.

— Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.

— Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.'

— Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X=k)$, $P(X\leqslant k)$, $P(k\leqslant X\leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X\in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1-\alpha$.

exercices

Exercice 362. Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1. Vérifier la cohérence des données.
2. Calculer $P(X<2)$, $P(X>4)$,$P(1,3<X<3,5)$.
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Calculer alors l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Exercice 363. Une usine fabrique des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1, 2 ou 3 défauts d'aspect. On choisit une pièce au hasard.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de défauts de la pièce choisie. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
0.92	0.06	0.016	0.004

   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Le prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente selon le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente en euros	30	20	15	5

   Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de la pièce choisie au hasard. Déterminer la la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et sa variance.

3. On choisit deux pièces au hasard et de manière indépendante, et l'on note Z le prix de vente de ces deux pièces. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance.

Exercice 364. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$. Le passage « sans faute » d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Pour k entier compris entre 0 et 6, exprimer en fonction de k la probabilité de l'événement (X = k). En déduire l'espérance E(X) de X.
2. La durée du parcours est alors une variable aléatoire D. Exprimer D en fonction de X, puis calculer la durée moyenne E(D) du parcours.

Exercice 365. Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues parmi les trois boules extraites. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de l'urne, en remettant, après chaque tirage, la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours des trois tirages. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et son écart type.

d'après Baccalauréat 96

Exercice 366. Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1.

1. (a) Combien l'appareil peut-il fabriquer décodes distincts ? On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.
   (b) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. L'imprimante a été choisie au hasard dans un stock, qui est connu pour contenir cinq sortes d'imprimantes. Les imprimantes E_0 n'impriment que des « 1 ». Pour tout i de 1,2,3, les imprimantes E_i n'écrivent correctement que les i premiers éléments du code et les complètent par $4-i$ signes « 1 ». Les imprimantes E_4 fonctionnent correctement.
   On admet que pour tout i de $\{0,1,2,3\}$, la probabilité pour qu'une imprimante utilisée soit de type E_i est 32.10^{-3}. Le code émis est indépendant de l'état de l'imprimante.
   (a) Calculer la probabilité $P(E_4)$.
   Pour la suite, C désigne l'événement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».
   (b) Calculer $P(C)$
   (c) Si le code imprimé est exactement celui qui a été émis par l'appareil, quelle est la probabilité que l'imprimante utilisée soit de typeE_2 ?

Exercice 367. Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse. Un robot les teste une par une jusqu'à ce que la pièce défectueuse soit détectée.

1. Le robot effectue le n -ième test dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse. Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tests effectués. On considère l'événement A_i : « la pièce défectueuse est détectée au i-ème test ». Déterminer la probabilité de A_i. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

2. La machine est réglée de façon à ne pas effectuer le dernier test dans le cas où seule la pièce défectueuse n'a pas été testée. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre des tests effectués. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de y. Comparer avec X.

Exercice 368. L'objet de cet exercice est de comparer l'efficacité de deux méthodes pour réaliser dans un délai très cours un contrôle médical sur 1000 personnes. Ce contrôle doit permettre de déterminer la présence (résultat +) ou l'absence (résultat -) d'une certaine maladie, dont on sait qu'elle atteint un individu donné avec la probabilité 0,01. L'origine des personnes est telle que l'on admet que les résultats des tests individuels sont deux à deux indépendants. Dans la méthode A, on analyse séparément les prélèvements effectués sur chaque personne, ce qui conduit à réaliser 1000 analyses. Dans la méthode B, on répartit d'abord les 1 000 personnes en n groupes de r personnes ($nr = 1\ 000$); on mélange les prélèvements effectués sur les r personnes d'un même groupe, et l'on analyse chacun de ces n mélanges. Si le résultat est positif pour un groupe, on analyse alors séparément le sang des r personnes qui composent le groupe.

1. Dans cette question, on établit un résultat qui sera utilisé à la question 3 pour comparer les méthodes A et B. Soit f la fonction numérique de variable réelle définie sur l'intervalle $[1;1000]$ par $f(x) = 10\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) < 1000$.
2. Dans cette question, on procède à l'étude de la méthode B.
   (a) Quelle est la probabilité p pour qu'un groupe soit négatif? En déduire la probabilité q pour qu'il soit positif. Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de groupes positifs. Donner en fonction de p et q la loi de probabilité et l'espérance de Y.
   (b) Soit X le nombre d'analyses réalisées avec la méthode B. Calculer en fonction de r l'espérance mathématique de X.
3. Dans cette question, on procède à la comparaison des méthodes A et B. On convient de remplacer $(0,99)^r$ par la valeur approchée $1 - \dfrac{r}{100}$. Donner la valeur approchée correspondante de $E(X)$ en fonction de r.Utiliser la question 1 pour indiquer les valeurs de r pour lesquelles la méthode B est plus efficace que la méthode A.

Exercice 369. Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention de la première boule blanche.

1. Dans cette partie, on effectuera au maximum quatre tirages. On appellera X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tirages nécessaires et suffisant à l'obtention de la première boule blanche, et, par convention, on notera X = 0 si les quatre tirages ont tous amené une boule noire.Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Dans cette partie, on effectuera au maximum n tirages. On appellera X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de tirages nécessaires et suffisant à l'obtention de la première boule blanche, et, par convention, on notera X = 0 si les n tirages ont tous amené une boule noire.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) On considère le polynôme $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}$.
      i. Exprimer $E(X)$ à l'aide de f.
      ii. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Calculer $G(x) = 1 + F(x)$.
      Pour tout x différent de 1 exprimer $G(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle.

iii. On pose $\Gamma(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Calculer $\Gamma'(x)$. En déduire que

$$E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Fiche 2

Espérance et variance d'une somme deux variables aléatoires finies

I. Loi du couple formé par deux variables aléatoires finies X et Y

Étude d'un premier exemple dans le cas de l'indépendance de X et Y

Une urne est composée de 2 boules portant le numéro 1 et trois boules portant le numéro 2. Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir successivement et avec remise deux boules dans l'urne. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule. Le couple (X, Y) peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{(1;1)\ ;\ (1;2)\ ;\ (2;1)\ ; (2;2)\}$. La loi de ce couple est appelée loi conjointe des deux variables X et Y. On remarque que quelle que soit la valeur x_i de X et quelle que soit la valeur de y_j de Y, la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est le produit des probabilités des événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ en raison de l'hypothèse d'indépendance des tirages.

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 1) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$

$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1) \times P(Y = 2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2) \times P(Y = 1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$

$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$

On présente la loi de (X, Y) sous la forme su tableau suivant :

	$(X = 1)$	$(X = 2)$	
$(Y = 1)$	$4/25$	$6/25$	$2/5$
$(Y = 2)$	$6/25$	$9/25$	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Étude d'un deuxième exemple dans un cas de dépendance de X et Y

Une urne est composée de 2 boules portant le numéro 1 et trois boules portant le numéro 2. Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir successivement et SANS remise deux boules dans l'urne. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule. Le couple (X, Y) peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{(1;1)\ ;\ (1;2)\ ;\ (2;1)\ ; (2;2)\}$. La loi de ce couple est appelée loi conjointe des deux variables X et Y.

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \times P_{X=1}(Y = 1) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20}$

$P(X=1, Y=2) = P(X=1) \times P_{X=1}(Y=2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
$P(X=2, Y=1) = P(X=2) \times P_{X=2}(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
$P(X=2, Y=2) = P(X=2) \times P_{X=2}(Y=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

On résume la loi de (X, Y) sous la forme su tableau suivant :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	$2/20$	$6/20$	$2/5$
$(Y=2)$	$6/20$	$6/20$	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Le cas général

Définition 56
Si deux variables aléatoires finies X et Y sont définies sur le même univers Ω, on dit qu'elles sont indépendantes si quelles que soient x_i et y_j, $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \times P(Y=y_j)$.

II. Loi de la somme de deux variables aléatoires finies

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, pour connaître la loi de la variable aléatoire $X+Y$, il est nécessaire de connaître la loi du couple (X, Y). Examinons le cas de deux exemples précédents.

Exemple 1 : somme de deux variables aléatoires Indépendantes

On reprend le tableau de valeurs précédent en écrivant en rouge les valeurs de $X+Y$ et en vert les probabilités :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	2 ||4/25	3 || 6/25	$2/5$
$(Y=2)$	3 || 6/25	4 || 9/25	$3/5$
	$2/5$	$3/5$	1

Cela permet de dresser le tableau donnant l aloi de probabilité de $X+Y$:

z_i	$(Z=2)$	$(Z=3)$	$(Z=4)$
$P(z=z_i)$	$4/25$	$12/25$	$9/25$

exemple 2 : somme de deux variables non indépendantes

On reprend le tableau de valeurs précédent en écrivant en rouge les valeurs de $X+Y$ et en vert les probabilités :

	$(X=1)$	$(X=2)$	
$(Y=1)$	2 ‖ 2/20	3 ‖ 6/20	2/5
$(Y=2)$	3 ‖ 6/20	4 ‖ 6/20	3/5
	2/5	3/5	1

Cela permet de dresser le tableau donnant l aloi de probabilité de $X+Y$:

z_i	$(Z=2)$	$(Z=3)$	$(Z=4)$
$P(z=z_i)$	2/20	12/20	6/20

III. Espérance de la somme de deux variables aléatoires finies

On va démontrer que l'espérance de la somme des deux variables aléatoires peut être connue sans connaître la loi du couple (X, Y), mais en connaissant seulement l'espérance de X et celle de Y.

Théorème 80
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration : Preuve dans le cas de deux variables aléatoires avec deux valeurs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i+y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} (x_i+y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} x_i\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) + \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} y_j\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i \sum_{y_j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) + \sum_{y_j\in X(\Omega)} y_j \sum_{x_j\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}((X=x_i)) + \sum_{y_j\in X(\Omega)} y_j\mathbb{P}((Y=y_j)) \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

Généralisation à la somme de n variables aléatoires

Théorème 81
Si X_1,... X_n sont n variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(X_1+...+X_n) = \mathbb{E}(X_1)+...+\mathbb{E}(X_n)$$

Espérance d'une loi binomiale de paramètre n, p

Théorème 82
Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p alors $\mathbb{E}(X) = n \times p$

Démonstration : X est la somme de n variables X_i de Bernoulli de paramètre p, chacune d'espérance $\mathbb{E}(x_i) = p$ donc $\mathbb{E}(X) = p + ... + p = np$ □

IV. Variance de la somme de deux variables aléatoires finies

On va démontrer que la variance de la somme de des deux variables aléatoires ne peut pas être connue sans connaître la loi du couple (X, Y),

Théorème 83
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}Y))^2 \\
&= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 + 2\mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)^2 - (\mathbb{E}Y)^2 - 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)
\end{aligned}$$

Variance de la somme de deux variables aléatoires finies INDEPENDANTES

Théorème 84
Si X et Y sont deux variables aléatoires Indépendantes définies sur Ω, alors

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i \times y_j)\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j)) \\
&= \sum_{(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega))} (x_i \times y_j)\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} x_i \times y_j \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X=x_i) \sum_{y_j\in Y(\Omega)} y_j\mathbb{P}(Y=y_j) \\
&= \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(Y) \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\mathbb{P}(X=x_i) \\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Théorème 85
La variance de deux variables aléatoires **indépendantes** est la somme des variances de ces deux variables aléatoires :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Démonstration : On sait déjà que :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right).$$

Puisque les deux variables sont supposées indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Donc

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Généralisation à la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 57
Pour toute suite (X_n) de variables aléatoires sur un espace probabilisé **fini** Ω, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour toute famille finie $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'indices deux à deux distincts et toute famille associée $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ de réels vérifiant $x_{i_h} \in X_{i_h}(\Omega)$, pour tout $h \in \{1, k\}$, on dispose de l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1}) \cap (X_{i_2} = x_{i_2}) \cap ... \cap X_{i_k} = x_{i_k})) = \mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1})\mathbb{P}((X_{i_2} = x_{i_2})...\mathbb{P}(X_{i_k} = x_{i_k}))$$

Théorème 86
La variance de la somme de n variables aléatoires définies sur un même espace fini Ω et **mutuellement indépendantes** est la somme des variances de chacune de ces variables aléatoires.

$$\mathbb{V}(X_1 + ... + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + ... + \mathbb{V}(X_n)$$

Démonstration : Admis □

Théorème 87
La variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p est

$$\mathbb{V}(X) = npq \text{ où } q = 1 - p$$

Démonstration : X est la somme de n variables X_i de Bernoulli de paramètre p, chacune de variance $\mathbb{V}(x_i) = pq$ et dont admet qu'elles sont mutuellement indépendantes donc $\mathbb{V}(X) = pq + ... + pq = npq$. □

Fiche 3

Probabilité- Approfondissements

I. Loi de Poisson

Exercice 370. On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\mathrm{E}(S_n)$ est égale à 10.
Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. (a) Établir l'égalité $\ln\left[\mathrm{P}(S_n = 0)\right] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-10}$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   (c) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.
   (d) Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathrm{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

II. Loi binomiale

Exercice 371. Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. (a) Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre $0,20$ et $0,21$.
   (b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.
   Préciser l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$
   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?
   (c) Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.
   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.
   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.
   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.
   Préciser l'espérance mathématique de S.
2. (a) Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.
   Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?
   (b) Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.
   (c) Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :
   $$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\mathrm{P}_{13}.$$
   Calculer ce gain.
   (d) La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Exercice 372. Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

1. Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer espérance et variance de Z.

Fiche 4

Inégalité de concentration et loi faible des grands nombres

I. Expériences mutuellement indépendantes

Considérons une expérience aléatoire à deux issues que nous noterons « réussite », obtenue avec la probabilité p et « échec », obtenue avec la probabilité $q = 1 - p$. A une telle expérience, on fait correspondre la variable aléatoire X, qui prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité q. une telle variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Son espérance est p et sa variance pq.

Considérons alors une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X. On dit que (X_n) est un échantillon aléatoire de cette loi.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ désigne le nombre des variables X_i qui prennent la valeur 1, c'est à dire le nombre de celles des n expériences aléatoires successives envisagées qui débouchent sur un succès.
On sait que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p définie sur $\{0, ..., n\}$, et vérifiant, pour tout k de $\{0, ..., n\}$ l'égalité

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Son espérance est $\mathbb{E}(S_n) = np$ et sa variance $\mathbb{V}(S_n) = npq$.
La variable $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ prend pour valeur la proportion de réussites dans les n expériences faisant l'objet de l'étude.
Son espérance est :

$$\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} == \frac{np}{n} = p.$$

Sa variance est :

$$\mathbb{V}(F_n) = \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

On constate que l'espérance de F_n est la probabilité de réussite de chaque expérience et ne dépend pas du nombre d'expériences et que sa variance tend vers 0 quand le nombre d'expériences tend vers $+\infty$.

II. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Propriété 29
Pour tout variable aléatoire réelle X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admettant une espérance non nulle m, et pour tout réel strictement positif λ, on dispose de l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda m) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration : Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ où l'on suppose $0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$ et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Par définition,

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Si l'on restreint cette somme aux termes tels que $x_i \geqslant \lambda m$, on obtient puisque tous les termes de cette somme sont positifs

$$m \geqslant \sum_{x_i \geqslant \lambda m} x_i p_i \geqslant \lambda m \sum_{x_i \geqslant \lambda m} p_i = \lambda m \mathbb{P}(X \geqslant \lambda m).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 30
Pour tout variable aléatoire réelle X admettant une espérance m et une variance σ^2, et pour tout réel strictement positif ε, on dispose de l'inégalité

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Démonstration : La variable aléatoire $Y = (X - m)^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admet une espérance qui est la variance de X, σ^2. En lui appliquant l'inégalité de Markov, avec $\lambda = \dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$ on obtient

$$\mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\sigma^2\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}\left((X - m)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, les événements $(X - m)^2 \geqslant \varepsilon^2$ et $|X - m| \geqslant \varepsilon$ sont identiques, d'où le résultat. □

Le théorème d'or de Bernoulli

Propriété 31
Pour tout réel strictement positif ε, la probabilité $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ pour que , dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p, la fréquence F_n des succès s'écarte de ε du paramètre p est majorée par $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Démonstration : L'inégalité de Bienaymé appliquée à F_n donne

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Or $pq = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ donc

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Propriété 32
Pour tout réel strictement positif ε, la probabilité $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ pour que , dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p, la fréquence F_n des succès s'écarte de ε du paramètre p est tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La loi faible des grands nombres

Le théorème en or de Bernoulli est un cas particulier d'un résultat plus général connu sous le nom de loi faible des grands nombres que nous admettons

Théorème 88
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2. On pose $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors, $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

III. exercices

Exercice 373. D'après livre de Terminale D, Delagrave, 1967.
On jette un dé n fois de suite. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer à partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que la fréquence d'apparition du 6 sera comprise entre $\frac{9}{60}$ et $\frac{11}{60}$, **avec un risque d'erreur** inférieur à 0,1.

Exercice 374. D'après livre de Terminale D, Delagrave, 1967.
Admettons que le poids d'un oeuf d'une certaine variété de poules est une variable aléatoire (Ndr : le terme utilisé en 1967 est aléa numérique) de moyenne 60 grammes et d'écart type 10 grammes. On choisit 100 oeufs au hasard. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour montrer que, **avec un risque d'erreur** inférieur à 0,1, que la moyenne de l'échantillon sera comprise entre deux nombres que l'on déterminera.

Fiche 5

Exercices de probabilités

Exercice 375. Un lot de pièces mécaniques comporte $0,5\%$ de pièces non conformes. Quelle est la probabilité pour que, parmi 1500 pièces, il y ait au plus de 10 pièces non conformes ?

Exercice 376. Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ de pièces défectueuses. Le contrôle des pièces donne le résultats suivants :

— si une pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité $0,97$

— si une pièce est défectueuse, elle est refusée avec la probabilité $0,99$

1. Quelle est la probabilité que la pièce sortant de l'usine soit défectueuse ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
3. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait exactement 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
4. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait au plus 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
5. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait au moins 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
6. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait moins de 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
7. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait plus de 12 erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?
8. En supposant que les contrôles soient effectués de manière indépendante, calculer la probabilité qu'il y ait entre 10 et 15 au sens large erreurs de contrôle sur les 1000 pièces sorties en une journée ?

Exercice 377. BAC 2021

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée* ;

— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d ?une fraction irréductible.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
   (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu ?elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
   Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l ?exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   (a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 378. Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 379. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

   a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **b.** $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

Exercice 380. Quelle est la probabilité qu'en jetant six dès équilibrés et discernables, toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

Exercice 381. Quelles sont les probabilités que, parmi les familles à n enfants, $n \geqslant 2$, une famille soit constituée d'enfants de deux sexes (événement A), puis de garçons et d'au plus une fille (événement B) ? Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$. les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 382. 1. Une urne contient M jetons numérotées de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.

2. Des étudiants au nombre de n sont réunis dans un amphithéâtre. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour (on suppose qu'un aucun n'est né un 29 février et que $n \leqslant 365$) ?

Exercice 383. Un joueur jette une pièce a priori non équilibrée (on note p la probabilité d'obtenir « Pile » lors d'un jet de la pièce) jusqu'à ce qu'il obtienne « Pile » ; si ceci se passe à la suite du k-ième jet, il lance k fois de suite un dé bien équilibré. Il gagne s'il obtient exactement un 6. On demande la probabilité pour que le joueur gagne à ce jeu.

Exercice 384. Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est définie par

$$p_0 = p_1 = a$$

et pour $k \geqslant 2$,

$$p_k = (1-2a)2^{-(k-1)}$$

où a est un réel strictement compris entre 0 et 1. On suppose de plus que la probabilité d'avoir un garçon ou une famille lors d'une naissance est la même.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

Exercice 385. Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2. Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile »dans un lancer est notée p, avec $0 < p < 1$.
Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi,

— si un joueur obtient « pile »au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer,

— s'il obtient « pile »au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1,

— s'il obtient « pile »au n-ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$,

— s'il n'obtient pas « pile »durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

Exercice 386. Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. La probabilité d'un évènement A est notée $\mathbb{P}(A)$.

1. (a) Vérifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

   (b) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j , j^2 ?

(c) Montrer que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

2. On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F . Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(Z = j^2) = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère un entier $n \geqslant$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j^2$.
   (a) Déterminer $U_n + V_n + W_n$.
   (b) Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2 W_n$.
   (c) Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.
   (d) En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.
4. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(U_n = m) = \dbinom{3m}{m}\dfrac{2^{2m}}{3^{3m}}$
   (c) On note $\mathbb{P}_(U_n = m(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$. Montrer que $P_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m}\dbinom{2m}{m}$
   (d) En déduire que $p_{3m} = 3^{-3m}\dbinom{3m}{m}\dbinom{2m}{m}$
   (e) Démontrer que $\dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \dfrac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$
5. Pour tout entier $m \geqslant 1$, montrer que $\dfrac{m}{m+1} \leqslant \dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geqslant \dfrac{2}{9m}$
6. Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $S_k = 0$.
   (a) Déterminer des variables de Bernoulli Y_k , avec $1 \leqslant k \leqslant n$, telles que $X_n = Y_1 + ... + Y_n$.
   (b) On note $E(X_n), E(Y_1), ..., E(Y_n)$ les espérances de X_n , Y_1 , . . . , Y_n .Montrer que $E(X_n) = p_1 + ... + p_n$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$.
7. Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leqslant k \leqslant n$, c'est-à-dire $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$. L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.
   (a) Montrer que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leqslant q \leqslant 1$ pour tout n.
   (b) Pour r , n entiers naturels non nuls, montrer que $\mathbb{P}(X_n \geqslant r) \leqslant q^r$.
   (c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $E(X_n) \leqslant q + q^2 + ... + q^n$.
   (d) Conclure.

Exercice 387. Soient $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur un ensemble Ω d'issues possibles et A et B deux événements. La proposition suivante est elle vraie ou fausse ?

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)).$$

Exercice 388. Une urne contient trois boules : une bleue, une blanche et une rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de cette dernière dans l'urne. pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on désigne par A_n l'événement « les $n-1$ premiers tirages ont donné la même boule, et la n-ième boule tirée est différente de celles tirées lors des $n-1$ premiers tirages ».

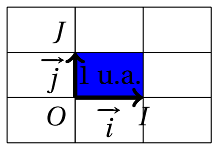
1. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(A_2)$,$\mathbb{P}(A_3)$,$\mathbb{P}(A_n)$
2. Calculer la limite de $\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ quand n tend vers $+\infty$.

Thème 7 : Intégrale

Fiche 1

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Sesamaths

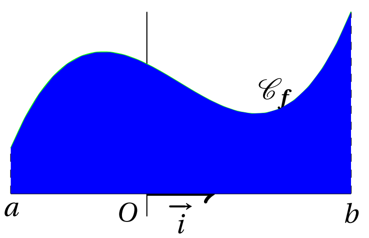


Définition 58
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
L'unité d'aire , que l'on note u.a. est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 59
Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
L'intégrale de a à b de f est la mesure de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cette aire se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Remarques

— a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.

— La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

— Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.

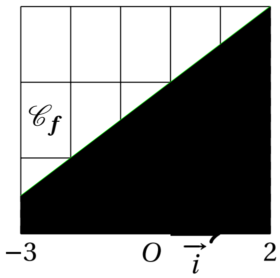
— Le symbole $\int$ est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3;2]$.

Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{0,5+3}{2} \times 5 = 8,75$$



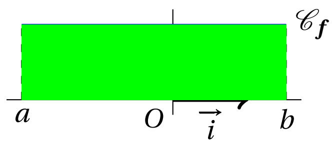
Les unités graphiques étant 0,6 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente 0,6 cm^2 et donc l'aire coloriée représente 5,25 cm^2.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 1$ définie sur $[a;b]$.

Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur 1. Ainsi :

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

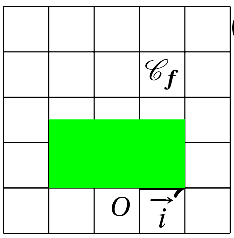


II. Exercices

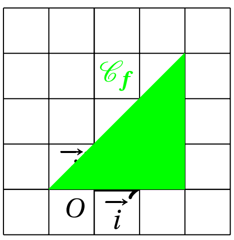
Exercice 389. Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1. l'expression de la fonction f représentée en rouge ;
2. la description du domaine coloré ;
3. l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;
4. l'aire de ce domaine, en u.a.

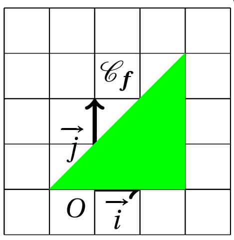
(a)



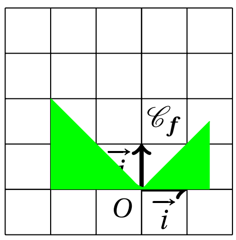
(b)



(c)



(d)

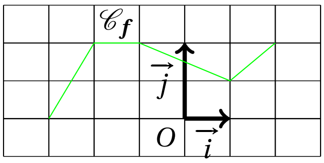


Exercice 390. Dans chacun des cas suivants :

1. représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée ;
2. décrire ce domaine ;
3. donner la valeur de son aire, en u.a.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{3,5} x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} (4-x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 391. Soit f une fonction continue sur $[-3;2]$ représentée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous :



Dans chacun des cas suivants, calculer :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Fiche 2

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 89
Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a;b]$ et on a $F' = f$.

Démonstration : On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.
Pour tout $x \in [a;b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;x]$.
Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a;b]$. On considère alors, pour tous $x \in [a;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a;b]$:

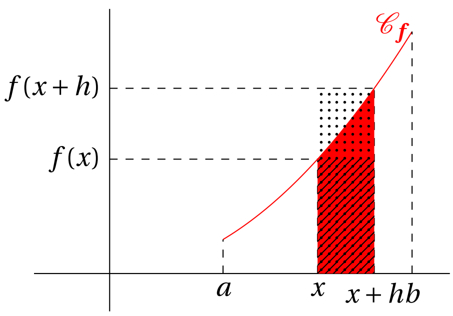
$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

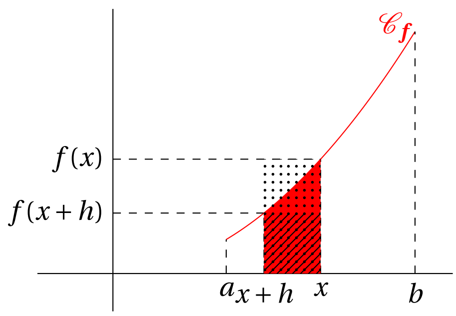
Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h)-F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x;x+h]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$f(x)h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant f(x+h)h \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x+h).$$

Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x)-F(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x+h;x]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$f(x+h)(-h) \leqslant F(x)-F(x+h) \leqslant f(x)(-h) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x+h) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x).$$





□

f étant une fonction continue, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas, d'après le théorème des gendarmes , on conclut que $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = f(x)$.

II. Exercices

Exercice 392. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie aussi sur $[a;b]$.

1. Déterminer $F'(x)$.
2. Étudier les variations de F sur $[a;b]$.

Exercice 393. Dans chacun des cas suivants :

1. donner un intervalle I sur lequel on peut appliquer le théorème ;
2. déterminer $F'(x)$, pour tout $x \in I$.

(a) $F : x \mapsto \int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t$

(b) $F : x \mapsto \int_2^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(c) $F : x \mapsto \int_{-5}^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

(d) $F : x \mapsto \int_2^x |1-t|\,\mathrm{d}t$

(e) $F : x \mapsto \int_{-2}^x \ln|t|\,\mathrm{d}t$

Fiche 3

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I. Primitives d'une fonction continue

Définition 60
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque
On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple
Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F_1' = F_2' = f$.

Théorème 90 (Existence de primitives)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration : On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Soit f une fonction continue sur I et notons m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. D'après le théorème précédent, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.
Étant donné que l'on cherche une fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. □

Théorème 91 (Lien entre les primitives)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

— Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.

La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

— Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I. □

Propriété 33
Condition d'unicité de la primitive Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration :

— **Existence :** soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

— **Unicité :** notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I. □

Remarque
Pour tout $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc *la* primitive de f sur I s'annulant en x_0. En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

Exercice 394. Utiliser les propriétés élémentaires des primitives Soient φ et ψ les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{x^3}{3}.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $[1\,;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.

2. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 3$.

correction

1. (a) $f : t \mapsto t^2$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ donc d'après le théorème , φ est définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a $\varphi' = f$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$, $\psi'(x) = x^2$.

   (b) ψ est une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$ donc φ est de la forme $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ pour tout $x \geqslant 1$. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1) + k$ et donc $0 = \frac{1}{3} + k$, c'est-à-dire $k = -\frac{1}{3}$. On en déduit alors que pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{3}$.

2. Les primitives de f sur $[1\,;+\infty[$ sont donc de la forme $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

   $F(1) = 3$ donc $\frac{1}{3} + k = 3$ donc $k = \frac{8}{3}$ et ainsi $F(x) = \frac{x^3 + 8}{3}$ pour tout réel $x \geqslant 1$.

Propriété 34
Calcul pratique d'une intégrale Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

Démonstration : Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.
Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$.
Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$ et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

Exemple
On souhaite calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0;1]$.
En remarquant que $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0;1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

II. Exercices

Exercice 395. Soient φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$$

1. (a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que :
   (a) $F(0) = 0$
   (b) $F(1) = 0$

Exercice 396. Même consigne qu'à l'exercice précédent avec les fonctions φ et ψ définies sur $[1;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \psi(x) = x\ln(x) - x.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 0$ et $F(\mathrm{e}) = 0$.

Exercice 397. Même consigne qu'à l'exercice avec les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 1$ et $F(2) = 0$.

Exercice 398. Dans l'exercice précédent, la relation entre φ et ψ a été établie pour tout réel x strictement positif.

1. Pourquoi n'a-t-on pas pu établir la relation pour $x = 0$ alors que φ et ψ sont bien définies en 0 ?
2. Étudier le cas particulier $x = 0$.

Exercice 399. Soient $F : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+1}$ définies sur $I =]-\infty\,;-1[$.

1. Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur I ?
2. Si oui, laquelle ?

Exercice 400. Même consigne avec les fonctions $F : x \mapsto \ln(7x)$ et $G : x \mapsto -\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$ définies sur $I =]0\,;+\infty[$.

Exercice 401. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1. En reconnaissant une forme connue de dérivée, déterminer une primitive H_1 de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout réel t, écrire $h(t)$ à l'aide d'un sinus.
   (b) À partir de cette forme, en déduire une primitive H_2 de h sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Représenter graphiquement H_1 et H_2. Ces deux fonctions sont-elles égales ?
   (b) Quelle est la constante qui les différencie ?
4. Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 402. Dans chacun des cas suivants :

1. déterminer les primitives de chacune des fonctions sur l'intervalle donné ;
2. déterminer la primitive F vérifiant la condition donnée.
   (a) $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 1$.
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ avec $F(2) = 0$.
   (c) $f : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
   (d) $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = \ln(2)$.

Exercice 403. Un mobile M se déplace de façon rectiligne sur un axe $(O\,;\vec{i})$, gradué en cm. Son abscisse (en cm) et sa vitesse (en cm·s^{-1}) en fonction du temps $t \geqslant 0$ sont données par les fonctions $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ et $\vec{v} : t \mapsto v(t)$.

1. Rappeler le lien qu'il existe entre $\vec{v}$ et $\vec{x}$.
2. On sait que $\vec{v}(t)$ est donné par $\vec{v}(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t + 1\right)\vec{i}$ et qu'à l'instant $t = 1$ s, le mobile est à 2 cm de l'origine.
   (a) Déterminer $\vec{x}(t)$.
   (b) Quelle est alors sa position à $t = 0$ s ?
   (c) Quand le mobile repasse-t-il par l'origine ? Quelle est alors sa vitesse ?

Fiche 4

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue et positive

I.

Propriété 35
Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Exercice 404. Déterminer des primitives simples sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \frac{6}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$
3. $h(x) = \frac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

correction

1. f est une fonction de degré 2, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 3.
   Or $(x^3)' = 3x^2$.
   On écrit alors $f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
   $$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
2. g est du type $\frac{1}{x^3}$, continue sur $]-\infty;0[$, une primitive sera donc du type $\frac{1}{x^2}$.
   Or, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.
   On écrit alors $g(x) = (-3) \times \frac{-2}{x^3}$ et les primitives de g sur $]-\infty;0[$ sont définies par :
   $$G(x) = -\frac{3}{x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$
3. h est du type $\frac{1}{x}$, continue sur $]0;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.
   Or, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
   On écrit alors $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ et les primitives de h sur $]0;+\infty[$ sont définies par :
   $$H(x) = \frac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Propriété 36 (Primitives et opérations sur les fonctions)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

Exercice 405. Déterminer des primitives sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de f, la fonction u, ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x)=(2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
3. $h(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

correction

1. f est du type $u'u^3$ avec $u:x\mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type u^4.
   Or, $\left((2x-1)^4\right)'=4\times 2\times(2x-1)^3=8(2x-1)^3$.
   On écrit alors $f(x)=\dfrac{1}{8}\times 8(2x-1)^3$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
   $$F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k,\, k\in\mathbb{R}.$$
2. g est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u:x\mapsto x^2-1$, $u(x)>0$ sur $]1\,;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.
   Or, $\left(\ln(x^2-1)\right)'=\dfrac{2x}{x^2-1}$. On écrit alors $g(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}$ et les primitives de g sur $]1\,;+\infty[$ sont définies par :
   $$G(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+k,\, k\in\mathbb{R}.$$
3. h est du type $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u:x\mapsto 2x-1$, $u(x)\neq 0$ sur I, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{u}$.
   Or, $\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)'=-\dfrac{2}{(2x-1)^2}$. On écrit alors $h(x)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ et les primitives de h sur I sont définies par :
   $$H(x)=-\frac{1}{2(2x-1)}+k,\, k\in\mathbb{R}.$$

II. Exercices

Exercice 406. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f:x\mapsto x^2+x^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f:x\mapsto \dfrac{1}{x}+1$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f:x\mapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f:x\mapsto \sin(x)-\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 407. Même consigne qu'à l'exercice précédent

1. $f:x\mapsto x^5-4x+3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f:x\mapsto \dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{4x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f:x\mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f:x\mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 408. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{7}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto x^{-4} + 8x^4$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 409. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty\,;0[$

Exercice 410. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 411. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
3. $f : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ sur $]1\,;+\infty[$

Exercice 412. Même consigne qu'à l'exercice précédent.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Fiche 5

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

I. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu dans les fiches précédentes que, pour une fonction continue et positive sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$. On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a;b]$ avec la définition ci-dessous.

Définition 61
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a;b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple
On souhaite calculer $\int_{-1}^{2}(x^2-2)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2-2$ définie sur $I = [-1;2]$. Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^{2}(x^2-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\right) = -3.$$

Remarques

— Pour toute fonction f continue en a, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$.

— Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 413. Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère l'intégrale $I = \int_\alpha^\beta \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire une valeur de I.
3. En particularisant α et β, vérifier le résultat obtenu à la question 2) l'exercice

Exercice 414. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2} \,\mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \,\mathrm{d}t$
4. $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2-1}{x} \,\mathrm{d}x$

Exercice 415. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \,\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2 \,\mathrm{d}u$
3. $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t} \,\mathrm{d}t$

Exercice 416. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}x$

Exercice 417. Après avoir rappelé la formule de duplication donnant $\sin(2t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 418. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x+5} \,\mathrm{d}x.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ?
2. Démontrer que pour tout $x \neq -5$, $\dfrac{2x-1}{x+5}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x+5}$, où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 419. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1} \,\mathrm{d}x.$$

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$
où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 420. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas la calculer directement ?
2. Première méthode.
   (a) En remarquant que $1 = e^x + 1 - e^x$, décomposer I en deux intégrales calculables.
   (b) Calculer chacune des deux intégrales et en déduire que $I = -\ln(e+1) + \ln(2) + 1$.
3. Seconde méthode.
   (a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{e^x+1}$ par e^{-x} puis calculer I.
   (b) Vérifier que les résultats, malgré leur forme apparemment différentes, sont bien égaux.

Exercice 421. En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,dt.$$

Exercice 422. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,du.$$

Exercice 423. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt.$$

On pose $f : t \mapsto t\cos(t)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout réel t :
$$f(t) = -2\sin(t) - f''(t).$$
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 424. On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-5}^1 xe^x\,dx.$$

On pose $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(x)$.
2. En déduire la valeur de I.

Fiche 6

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue

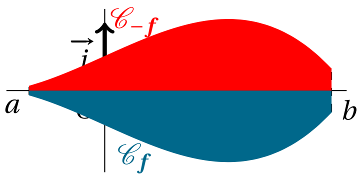
Propriété 37
Linéarité de l'intégrale Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel. Alors :

— $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$ — $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration : Voir exercice. □

Propriété 38 (Fonction négative et aire)
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$ est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On note $\mathscr{D}$ le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[a;b]$.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{E}$, compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$. Ainsi :



$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

Exemple
Utiliser la linéarité de l'intégrale Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?
2. Calculer $I+J$ et $I-J$.
3. En déduire les valeurs respectives de I et J.

correction

1. Aucune des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.

2. Par linéarité de l'intégrale, on a :
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$
De même :
$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$
On reconnaît ici une dérivée de la forme $\frac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$. Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a :
$$I-J=-\Big[\ln(\sin(x)+\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$
3. On doit résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} I+J &= \frac{\pi}{2} \\ I-J &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2I &= \frac{\pi}{2} \\ I &= J \end{cases} \iff I=J=\frac{\pi}{4}$$

I. Exercices

Exercice 425. On note F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a;b]$.

1. Démonstration du premier point.
   (a) Donner une primitive de la fonction $f+g$ sur $[a;b]$.
   (b) En utilisant la définition, en déduire une expression de $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de F et G.
   (c) Faire de même avec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   (d) Comparer les résultats.
2. Démonstration du second point.
   (a) Pour tout réel λ, donner une primitive de la fonction λf sur $[a;b]$.
   (b) Démontrer l'égalité.

Exercice 426. On considère les deux intégrales :
$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x \qquad J=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$
1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 427. Même consigne avec les intégrales :
$$I=\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad J=\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 428. On considère les deux intégrales suivantes :
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$
1. De ces deux intégrales, l'une est calculable facilement : la calculer.
2. Calculer $I+J$.
3. En déduire la valeur de l'autre intégrale.

Fiche 7

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- relation de Chasles

Propriété 39
Relation de Chasles Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle. Notons F une primitive de f sur I.
Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

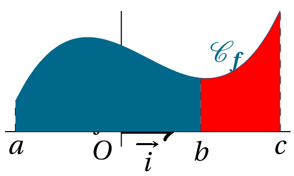
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$ par définition.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie. □

Remarque

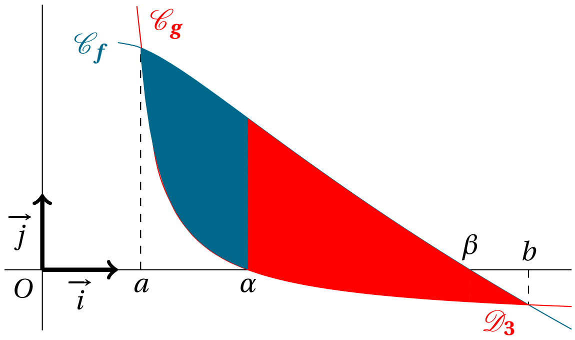
Lorsque f est positive et continue sur $[a;c]$ et que $b \in [a;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} + \mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{A}_{\text{totale}}.$$



Propriété 40
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On distingue trois cas, selon que les fonctions sont toutes les deux positives, de signes contraires ou toutes les deux négatives :



— Premier cas.
L'aire de $\mathscr{D}_1$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;\alpha]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Deuxième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_2$ est la somme de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Troisième cas.
L'aire de $\mathscr{D}_3$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta;b]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_3} = \int_\beta^b (-g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_\beta^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines. □

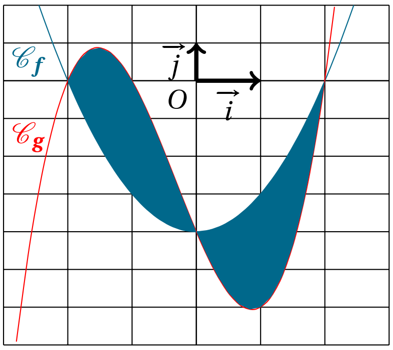
Exemple
Calculer une aire entre deux courbes

1. Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2. Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

Exercice 429. Soient $f : x \mapsto x^2-4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2;2]$.

correction

1. On calcule la différence $f(x)-g(x) = x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a :



$f(x) - g(x) = (x^2 - 4)(1 - x - 1) = -x(x^2 - 4)$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
$x^2 - 4$	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$	0	$-$	0	$+$	0

On décompose donc l'intervalle $I = [-2;2]$ en deux sous-intervalles $I_1 = [-2;0]$ et $I_2 = [0;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g - f$ et $f - g$.

2. Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} -x(x^2-4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.
   D'une part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} = \dfrac{(-4)^2}{4} - \dfrac{0^2}{4} = 4$.
   D'autre part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2} = \dfrac{0^2}{4} - \dfrac{(-4)^2}{4} = -4$.
   Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 8$ u.a.

I. Exercices

Exercice 430. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,;b]$ et soit c, un réel appartenant à $[a,;b]$.
Énoncer la relation de Chasles puis la démontrer.

Exercice 431. Soit f définie sur $I = [-1;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur I.

Exercice 432. Même consigne avec f définie sur $I = [0;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{2} & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

Fiche 8

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue-
Intégrales et inégalités

Propriété 41
Intégrales et inégalités Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

— Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

— Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : Voir exercice □

Remarques
Les réciproques de chacun des points de cette propriétés sont fausses.

— Par exemple $\int_0^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction $x \mapsto x^2-1$ n'est pas positive sur $[0;2]$: l'image de 0 est -1.

— De même, $\int_0^2 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ puisque $2 \leqslant \frac{8}{3}$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0;2]$.

Exemple
Encadrer une intégrale Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geqslant 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $0 \leqslant F(a) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

correction

1. Une exponentielle étant toujours positive, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$. De plus, si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$, c'est-à-dire $-x \geqslant -x^2$ et donc $\mathrm{e}^{-x} \geqslant f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
   On en déduit donc que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1;a]$ et ainsi :
$$\int_1^a 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant F(a) \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a.$$
   Cette dernière quantité est égale à $-\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

I. Exercices

Exercice 433. 1. Le premier point provient de la définition de l'intégrale. Expliquer pourquoi.

2. Pour démontrer le second point, on considère la fonction $h = g - f$ définie sur $[a\,;b]$.
   Appliquer le premier point à h puis conclure.

Exercice 434. On considère $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer un encadrement de la fonction à intégrer, sur $[0\,;\pi]$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale I.

Exercice 435. On considère $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:
$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$
2. En déduire un encadrement de I.

Exercice 436. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$ sur $[1\,;+\infty[$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[n\,;n+1]$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de u_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 437. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n$.
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 438. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent , déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par :
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 439. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante.

2. (a) Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$
   (c) Expliquer les égalités suivantes :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_{n+1} - 1.$$
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 440. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que (I_n) est décroissante.
2. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, démontrer que :
$$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{x+1} \leqslant x^n.$$
   (b) Pour tout $n \geqslant 0$, en déduire un encadrement de I_n.
3. En déduire le comportement asymptotique de (I_n).

Exercice 441. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :
$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.
   (c) Que peut-on en déduire sur (I_n).
2. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire le signe de $f(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
   (c) En déduire la limite de (I_n).

Fiche 9

Analyse-Intégrale
Intégrale d'une fonction continue- Valeur Moyenne d'une fonction

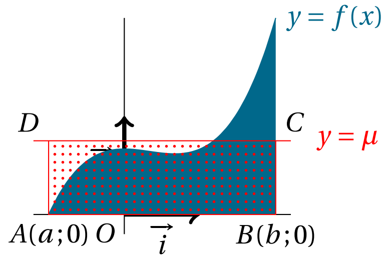
Définition 62
Valeur moyenne Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a;b]$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Exemple
Pour connaître la valeur moyenne de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0;\pi]$, on calcule :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^\pi = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Remarques

— En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a;b]$.

— En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2.

I. Exercices

Exercice 442. Valeur moyenne d'un signal On souhaite calculer la valeur moyenne sur une période de deux types de signaux périodiques.

1. On considère un signal purement sinusoïdal. La fonction le représentant peut se mettre sous la forme $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où u_0 est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ la phase à l'origine.
   (a) Rappeler la plus petite période de la fonction cos.
   (b) Soit T la plus petite période de u. En écrivant que pour tout réel t, $u(t+T) = u(t)$, en déduire une expression de T en fonction de ω.
   (c) Déterminer une primitive de u sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire la valeur moyenne du signal v sur l'intervalle $[a\,;a+T]$.
2. On considère la fonction v suivante, représentant un signal triangulaire de période T, où a est un réel :
$$v(t) = \begin{cases} -a\left(\dfrac{4t}{T}+1\right) & \text{si} \quad -\dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant 0 \\ a\left(\dfrac{4t}{T}-1\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \end{cases}.$$
   (a) Représenter graphiquement v pour $a = 1$ et $T = \pi$.
   (b) Quelle semble être la valeur de l'intégrale de v sur l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\dfrac{T}{2}\right]$?
   (c) Le démontrer dans le cas général.

Exercice 443. **Valeur efficace d'un signal** Si f représente un signal, la valeur efficace f_{eff} de f est par définition la racine carrée de la moyenne sur une période de f^2. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de f.

1. Traduire par une formule la phrase décrivant le calcul de f_{eff}.
2. On reprend les fonctions de l'exo
   (a) Démontrer que la valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal est $u_{\text{eff}} = \dfrac{u_0}{\sqrt{2}}$.
   On pourra utiliser une formule de réduction de $\cos^2(x)$ pour la détermination d'une primitive.
   (b) Démontrer que la valeur efficace du signal triangulaire est $v_{\text{eff}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Remarque
Physiquement, l'intensité efficace d'un courant alternatif i est égale à l'intensité du courant continu dissipant la même énergie que i à travers une résistance sur une période T.

Fiche 10

Analyse-Intégrale
Intégrale d'un produit de fonctions à dérivées continues - Intégration par parties

I. Intégration par parties

Théorème 92
Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur $[a,b]$ et à dérivées continues u' et v' sur $[a,b]$

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple

$$\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 1\times\ln(x)\mathrm{d}x = [x\times\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\mathrm{d}x = 2\ln(2)-1$$

Exercice 444. On admet que la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x)$ est $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Soit pour $n\in\mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Soit n un entier naturel, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_2 et I_3.

correction

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^0}\mathrm{d}x = 1$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^1}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
2. Posons pour n entier non nul, $\begin{cases} u'(x)=1 & u(x)=1 \\ v(x)=(x^2+1)^{-n} & v'(x) = -n\times 2x(x^2+1)^{-n-1}\end{cases}$

   Alors
$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n}}\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$I_n - 2nI_n = \frac{1}{2^n} - 2nI_{n+1}$$

$$(1-2n)I_n - \frac{1}{2^n} = -2nI_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

3. $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

II. Exercices

Exercice 445. Calculer les intégrales $A = \int_0^4 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 446. Calculer les intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t^2)\sin t\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^e (3x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 447. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t$

Exercice 448. Calculer $A = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

Exercice 449. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(3x)\mathrm{d}x$

Exercice 450. Calculer $A = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 451. Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\mathrm{d}x$

Exercice 452. Calculer $A = \int_0^2 (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Exercice 453. Calculer $A = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 454. Calculer $A = \int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x$

Fiche 11

Analyse-Intégrale
Intégrale -Exercices de synthèse

Exercice 455. Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :
$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,
$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$
   (b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
   Quelle est alors la fonction g ?
2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :
$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$
   (b) Résoudre (F).
   (c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).
   (d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,
$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

(b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

(a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0;1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

(b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

(c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

(d) En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 456. On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0;1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \leqslant x$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R}$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   (a) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

   (b) Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

   (e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 457. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le sens de variations de cette suite.

   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

   (c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Étudier le sens de variations et le signe de f.

   (b) En déduire le sens de variations de g sur $[0\,;\,1]$.

   (c) Établir, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

   (d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

   (e) Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

   (f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Fiche 12

Analyse-Intégrale
Intégrale - Approfondissements

I. Changement de variables

Théorème 93
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et, φ une fonction dont la dérivée est continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans I alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Remarque
Dans la pratique, on pose $t=\varphi(x)$ et $\mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x$, puis il faut penser à transformer

- les bornes de l'intégrale
- l'expression de la fonction
- l'élément différentiel $\mathrm{d}t$.

Exemple
Pour calculer $I=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.
On pose $t=\sin(x)$ alors $\mathrm{d}t=\cos(x)\mathrm{d}x$.

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin(x))^2}\cos(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x$$
$$I=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 458. exploiter la périodicité et les symétries de la courbe
Calculer $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$. **correction** La fonction $f : x\mapsto\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$ est impaire et périodique de période 2π. Posons $t=2\pi-x$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{2\pi}^0 f(2\pi-t)(-\mathrm{d}t)=-\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=-I$$

donc $I=0$

Exercice 459. se ramener à une primitive connue Calculer $\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ avec $a>0$. **correction** Posons $t=\frac{x}{a}$, donc $x=at$

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{a^2t^2+a^2}a\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[\arctan(t)\right]_0^1$$

donc

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a}$$

II. Comparaison de suites

II.1. Suite dominée par une autre

Définition 63
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **dominée** par (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ est borné.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant M$$

On note $y_n = \mathcal{O}(x_n)$. Lire : y_n est un **grand O** de x_n

Exemple
$n\sin(n) = \mathcal{O}(n)$

II.2. Suite négligeable devant une autre

Définition 64
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **négligeable** devant (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 0.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

On note $y_n = o(x_n)$. Lire : y_n est un **petit o** de x_n.

Exemple
$n\sin(n) = o(n^2)$

II.3. Suites équivalentes

Définition 65
Soit (x_n) une suite de réels non nuls. on dit que la suite réelle (y_n) est **équivalente** à (x_n) si le quotient $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 1.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{y_n}{x_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

On note $y_n \sim x_n$. Lire : y_n est équivalent à x_n.

Exemple
$\sqrt{n^2+1} \sim n$

Théorème 94
Soit (x_n) une suite de réels non nuls et (y_n) une suite réelle,

$$y_n \sim x_n \Longleftrightarrow y_n - x_n = o(x_n) \Longleftrightarrow y_n - x_n = o(y_n)$$

Fiche 13

Analyse-Intégrale
Intégrale -Exercice Approfondissements

problème de max Hochart. On étudie ici les intégrales de Wallis définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$. On établit ensuite des résultats classiques à l'aide de ces intégrales : calcul de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et démonstration de la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

.1. Etude des intégrales de Wallis

1. Calculer W_n pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Prouver que $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$ et retrouver W_2 sans calcul.Changement de variable.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Intégration par parties.
   Donner W_4 et W_5.

.2. Calcul de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$.

1. (a) Calculer J_n pour $n=0$ et $n=1$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
   $$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{2n+2}.$$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $W_n > 0$ et que
   $$\frac{J_{n+1}}{W_{2n+2}} - \frac{J_n}{W_{2n}} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n en fonction de $\frac{J_0}{W_0}$ et $\frac{J_n}{W_{2n}}$.
2. (a) Prouver que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
   $$t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t.$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2}) = \frac{\pi^2}{8}\frac{W_{2n}}{n+1}.$$

(b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite, notée $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

.3. Intégrale de Gauss

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Etudier la monotonie de F. Montrer que F est majorée, en remarquant que pour $t \geqslant 1$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$. Conclure que F admet une limite en $+\infty$ notée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, prouver que
   $$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
   On note
   $$A_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$
   (b) En posant $t = \sqrt{n}\cos u$, montrer que
   $$A_n = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$
   (c) En posant $t = \sqrt{n}\tan u$, montrer que
   $$B_n \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$
   (d) Justifier l'encadrement
   $$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant F(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}.$$
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir
   $$W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n.$$
   En déduire
   $$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}.$$
   (b) Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.
   (c) Déduire de (a) et (b) l'équivalent
   $$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
4. Déduire de tout ce qui précéde la valeur de l'intégrale de Gauss.

.4. Expression des intégrales de Wallis, formule de Wallis

1. Avec A3, montrer que, pour $p \in \mathbb{N}$,
   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{\pi}{2^{2p+1}} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}2^{2p}.$$
2. En utilisant C.3.1 , montrer que
   $$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{2^{4p}\,p!^4}{(2p)!^2\,p}\right) = \pi.$$

.5. Utilisation du développement en série entière de $\ln(1+x)$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et x dans $]0;+\infty[$.

1. Montrer que : pour tout $t \in [0,x]$,

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + (-1)^m \frac{t^{m+1}}{1+t}$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^m \int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

   Puis que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

3. En déduire (en passant) que si $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$$

4. Écrire l'égalité obtenue au 2) pour $m=2$ et démontrer que : Pour tout x réel vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

.6. Démonstration de la formule de Stirling

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Montrer que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

2. Montrer que

$$-\frac{1}{24n^4}(2n^2-2n-3) \geqslant \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant -\frac{1}{4n^2}.$$

3. En déduire que la suite $\left(T_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   Simplifier T_n pour conclure que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

   Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

4. En utilisant cet équivalent dans D2, démontrer la formule de Stirling.